Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Andreas Meister
Fil. mag. Philipp Birken

WiSe 2005/2006

Mathematik für Naturwissenschaftler

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1

Besitzt eine tierische oder pflanzliche Population einen begrenzten Lebensraum (mit einer Sättigungsgrenze $G > 0$), so definiert man ihr Wachstum rekursiv durch

$$a_{n+1} = a_n + ka_n(G - a_n),\ a_1 = a \quad \text{(Anfangsgröße)}.$$

Dabei sei a_n ein Maß für die Populationsgröße nach n Zeiteinheiten. Für die Konstanten soll gelten:

$$0 < a < G, \quad 0 < k < G^{-1}.$$

a) Bestimmen sie die relative Wachstumsrate $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$ und interpretieren sie das Wachstumsgesetz.

b) Begründen Sie, wieso G eine obere Schranke der Folge (a_n) ist.

c) Beweisen Sie: $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

d) Zeigen Sie: Die Folge (a_n) ist monoton wachsend.

e) Skizzieren Sie für $G = 80$, $a = 10$ und $k = 0.01$ den Verlauf des Graphen von (a_n). Welche Vermutung haben Sie zur Konvergenz der Folge (a_n)?

(4 P)

Aufgabe 2

Gegeben seien zwei Folgen (a_n) durch

a) $a_n = \frac{1}{1+2n}$

b) $a_n = q^n$ $(0 < q < 1)$ Beide Folgen sind Nullfolgen. Beweisen Sie dies durch Anwendung der Definition der Konvergenz einer Folge, also durch Angabe von $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \epsilon$ für alle $n > n_\epsilon$.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(\sqrt[n]{n})$ experimentell mit dem Taschenrechner. Damit können Sie direkt den Grenzwert der Folge $(\sqrt[n]{7})$ angeben. Begründen Sie ihre Antwort.

(4 P)

Aufgabe 3
Die beiden folgenden unendlichen Reihen lassen sich jeweils auf eine geometrische Reihe zurückführen. Bestimmen Sie ihre Grenzwerte:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{5}{3^{k+1}}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{k+1}}{3^k}.$$

(4 P)

Abgabe: Donnerstag, 19.1.2006 in der Vorlesung oder Freitag, 20.1.2006 bis 12:00 in den Kästen. Für jede Aufgabe ein eigenes Blatt nehmen sowie auf jedem Blatt Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe eintragen. Sie dürfen in Gruppen bis zu zwei Personen abgeben.