

Numerik I

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie

$$\mathbf{A}^j \rightarrow \mathbf{0}, \quad j \rightarrow \infty \quad \iff \quad \rho(\mathbf{A}) < 1$$

(4 P)

Aufgabe 2

Leiten Sie unter Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes ein iteratives Verfahren her, dass für jeden Startwert $x \in (0, 1)$ gegen den in $(0, 1)$ liegenden Fixpunkt der Funktion $f(x) = -\ln x$ konvergiert. (4 P)

Aufgabe 3

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{7}{8} \cos \frac{\pi}{4} & \frac{7}{8} \sin \frac{\pi}{4} \\ -\frac{7}{8} \sin \frac{\pi}{4} & 1 - \frac{7}{8} \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß das lineare Iterationsverfahren

$$\mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_n + \mathbf{b}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

für beliebigen Startvektor $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ gegen die eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{x} = (0, 0)^T$ konvergiert, obwohl eine Matrixnorm mit

$$\|\mathbf{I} - \mathbf{A}\| > 1$$

existiert. Geben Sie ein Beispiel für eine solche. Veranschaulichen Sie beide Sachverhalte zudem graphisch. (4 P)

Aufgabe 4

Dies ist eine Programmieraufgabe. Für die Lösung der kompletten Aufgabe sind zwei Wochen Zeit gegeben.

Gesucht sind die Lösungen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ \frac{1}{16}x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

- a) Fertigen Sie eine Skizze an, die die Lage der Lösungen verdeutlicht. Bestimmen Sie für den 1. Quadranten einen *guten* ganzzahligen Startwert (x_0, y_0) .
- b) Gesucht ist nun die Lösung im ersten Quadranten. Geben Sie eine geeignete Fixpunktgleichung an und weisen Sie hierfür die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach nach.
- c) Wieviele Schritte sind (ausgehend von dem in a) gewählten Startwert) höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit (welche Norm?) von $\epsilon = 10^{-4}$ zu erzielen. Verwenden Sie die a-priori-Fehlerabschätzung.
- d) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, welches das Fixpunktverfahren für die betrachtete Fixpunktgleichung durchführt. Das Programm soll die Iteration abbrechen, wenn die a-posteriori-Fehlerschätzung einen Fehler von weniger als $\epsilon = 10^{-4}$ ergibt. Lesen Sie hierzu den Schnellkurs in Matlab bis Seite 17 weiter. Schicken Sie wie beim letzten mal das entsprechende .m-File an numerikabgabe@mathematik.uni-kassel.de.
- e) Geben Sie die anderen Lösungen mit derselben Genauigkeit (ohne weitere Rechnung) an.

(8 P)

Abgabe: Dienstag, 16.5.2004 vor der Vorlesung