Fachbereich Mathematik und Informatik **SoSe 2006**
Prof. Dr. Andreas Meister
Dr. Philipp Birken

Numerik I

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1
Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 & 4 \\ 4 & 18 & 17 & 16 \\ 6 & 25 & 24 & 21 \\ 4 & 14 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie: $\det \boldsymbol{A}[k] \neq 0$ für $k = 1, 2, 3, 4$.

b) Bestimmen Sie die Matrizen

$$\boldsymbol{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \ell_{41} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \qquad \boldsymbol{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ell_{32} & 1 & 0 \\ 0 & \ell_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4},$$

$$\boldsymbol{L}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ell_{43} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad \text{und} \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

derart, dass

$$\boldsymbol{L}_1 \boldsymbol{L}_2 \boldsymbol{L}_3 \boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}$$

gilt.

c) Berechnen Sie $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}(8, 22, 29, 17)^T$ in effizienter Weise. (4 P)

Aufgabe 2

a) Gegeben seien eine symmetrische Matrix $\mathbf{A}_{n-1} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ und eine untere Dreiecksmatrix $\mathbf{L}_{n-1} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ mit positiven Diagonalelementen, die $\mathbf{L}_{n-1}\mathbf{L}_{n-1}^T = \mathbf{A}_{n-1}$ erfülle. Weiter seien $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ein Spaltenvektor, $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$\mathbf{A}_n := \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass ein Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und eine positive reelle Zahl β existieren, so dass

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{n-1} & 0 \\ \mathbf{c}^T & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{n-1}^T & \mathbf{c} \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

gilt.

b) Beweisen Sie, dass zu jeder symmetrischen, positiv definiten Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau eine untere Dreiecksmatrix $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit positiven Diagonalelementen existiert, für welche $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ gilt.

(4 P)

Aufgabe 3
Eine invertierbare Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genüge der Bedingung

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}| = 1,\ j = 1, ..., n.$$

Zeigen Sie, dass für jede invertierbare Diagonalmatrix $\mathbf{D}$ gilt:

$$\mathrm{cond}_\infty(\mathbf{A}) \leq \mathrm{cond}_\infty(\mathbf{DA}).$$

(4 P)

Abgabe: **Dienstag, 6.6.2004 vor der Vorlesung**