Fachbereich Mathematik und Informatik **SoSe 2006**
Prof. Dr. Andreas Meister
Dr. mag. Philipp Birken

Numerik I

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1
Bestimmen Sie für das System

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die Spektralradien der Iterationsmatrizen für das Gesamtschritt- und das Einzelschrittverfahren und schreiben Sie beide Verfahren in Komponenten. Zeigen Sie, daß die Matrix konsistent geordnet ist und bestimmen Sie den optimalen Relaxationsparameter für das Einzelschrittverfahren. (4 P)

Aufgabe 2

a) Welche der folgenden Matrizen besitzen eine LR-Zerlegung und welche lassen sich nach geeigneter Zeilenvertauschung LR-zerlegen?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie gegebenfalls die Permutationsmatrizen an.

b) Bestimme mit Hilfe der in a) gewonnen LR-Zerlegungen die Determinante, den Rang und, falls die Matrizen regulär sind, auch die Inverse.

(4 P)

Aufgabe 3
Ein Physiker macht ein Physikexperiment. An den Stellen $t = -1$, 0 und 2 erhält er die Werte 1, 2 und -3. Er versucht nun, eine Parabel $y(t) = at^2 + b$ in Abhängigkeit von den Parametern a und b so zu bestimmen, dass die Summe der Fehlerquadrate minimal wird. Formulieren Sie dazu das entsprechende Ausgleichsproblem $\min \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2$ und lösen Sie es mittels der Normalgleichungen. (4 P)

Aufgabe 4
Programmieren Sie in MATLAB Routinen zur Berechnung einer LR-Zerlegung einer Matrix, sowie zum Vorwärts-Rückwärts-Einsetzen. Nehmen Sie als Testfall zunächst die Ergebnisse von Blatt7, Aufgabe 1. Lösen Sie dann folgende Aufgabe mit Hilfe des Gauß-Verfahrens:

Die Funktionen a) $f(x) = cos(x), x \in [0, \pi/2]$ und b) $f(x) = e^x, x \in [0, 1]$ sollen durch Polynome n-ten Grades $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ für $n = 2, 4, 8$ approximiert werden, so dass die Summe der Quadrate der Residuen an $N = 10, 20$ äquidistanten Stützstellen minimal ist. Geben Sie jeweils die Kondition der Normalgleichungsmatrix bezüglich der Frobenius-Norm aus und erklären sie das beobachtete Verhalten der Verfahren.

Wer Lust hat, kann auch noch Pivotisierung ausprobieren (dies gibt aber keine Punkte).

(8 P)

Abgabe: **Dienstag, 13.5.2004 vor der Vorlesung**