

Numerik II

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1

Gegeben sei die eindimensionale Helmholtz-Gleichung mit periodischen Randbedingungen (was ist die exakte Lösung?):

$$u''(x) + 2\pi^2 u(x) = -2\pi^2 \sin(2\pi x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u(x) = u(x + 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Das Intervall $[0, 1]$ wird in 4 gleiche Teilstücke unterteilt. Diskretisieren Sie die Gleichung wie in der Vorlesung beschrieben und lösen Sie das entstandene zirkulante Gleichungssystem mit dem angegebenen Verfahren über die schnelle Fourier-Transformation. (4 P)

Aufgabe 2

Beweisen Sie:

- a) Ist A hermitesch, so sind alle Eigenwerte reell.
- b) Gilt folgende Aussage? Sind A und B hermitesch, so hat $A \cdot B$ nur reelle Eigenwerte.
- c) Eine strikt diagonaldominante Matrix ist regulär.

(4 P)

Aufgabe 3

Zeigen Sie, daß die Matrix E aus der Vorlesung vollen Rang hat. Folgern Sie daraus, daß die Matrix A der Vorlesung positiv definit ist. (4 P)

Abgabe: Montag, 17.1.2005 vor der Vorlesung