Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Andreas Meister
Fil. mag. Philipp Birken **WiSe 2004/2005**

Numerik II

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

a) Alle Eigenwerte liegen in der Vereinigung der Kreise

$$S_j := \{z \in \mathbb{C};\ |z - a_{jj}| \leq \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|\}.$$

b) Jede Zusammenhangskomponente von $\cup_{i=1}^{n} K_i$ (mit K_i wie in der Vorlesung) enthält genau so viele Eigenwerte wie Kreise an der Komponente beteiligt sind (Eigenwerte und Kreise werden entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt).

(4 P)

Aufgabe 2

a) Geben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+0.5i & 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 1-0.5i & 0.5 \\ 0.4 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Was können Sie über die Eigenwerte der Matrix mittels Aufgabe 1, Satz 10.1, Satz 10.4 und einer Matrixnorm aussagen?

b) Gilt folgende Aussage: In jedem Gerschgorin-Kreis K_i liegt ein Eigenwert?

(4 P)

Aufgabe 3
Programmieren Sie die Potenzmethode. Testen Sie es an folgenden Beispielen.

a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}_0 = (1,1,1,1,1)^T$$

b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_0 = (1,1,1)^T, \ (1,-1,1)^T$$

c)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_0 = (1,1,1)^T$$

d)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_0 = (1,1,1)^T$$

e)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_0 = (1,1,1)^T$$

Wie sieht das Konvergenzverhalten aus? Vergleichen Sie es mit den theoretischen Aussagen der Vorlesung. (8 P)

Abgabe: Freitag, 21.1.2005 vor der Vorlesung