Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Andreas Meister
Fil. mag. Philipp Birken **WiSe 2004/2005**

Numerik II

Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$. Gelte ferner $|\lambda_i| \neq |\lambda_j| \quad \forall j \neq i$. Beweisen Sie: Dann sind alle Eigenwerte reell. (4 P)

Aufgabe 2
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ linker Eigenvektor zum Eigenwert λ von $\mathbf{A}$. Zeigen Sie:

a) $\mathbf{y} \perp Ker(\mathbf{A} - \tilde{\lambda}\mathbf{I}) \quad \forall\, \tilde{\lambda} \neq \lambda$.

b) Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ ein rechter Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ (welche Vielfachheit?). Dann ist $\mathbf{y}^*\mathbf{x} \neq 0$.

(4 P)

Aufgabe 3
Beweisen Sie den Satz von Bauer-Fike: Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit einfachen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Seien $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ die dazugehörigen normierten Rechts-Eigenvektoren und $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ die entsprechenden normierten Links-Eigenvektoren. Dann gilt:

a) $\mathbf{y}_i^*\mathbf{x}_j = 0$ für $i \neq j$.

b) Mit $\mathbf{P} := (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n)$ ist

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1^*/\mathbf{y}_1^*\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^*/\mathbf{y}_n^*\mathbf{x}_n \end{pmatrix}.$$

c) Mit $\delta\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ einem Eigenwert von $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ existiert ein Index $i \in \{1, ..., n\}$ mit

$$|\lambda - \lambda_i| \leq n\frac{\|\delta\mathbf{A}\|_2}{|\mathbf{y}_i^*\mathbf{x}_i}$$

Hinweis: Benutzt den Satz von Gerschgorin.

(4 P)

Abgabe: **Freitag, 28.1.2005 vor der Vorlesung**