Fachbereich Mathematik und Informatik **WiSe 2004/2005**
Prof. Dr. Andreas Meister
Fil. mag. Philipp Birken

Numerik II

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A^\dagger$ die Pseudoinverse von A. Beweisen Sie:

i) Die Singulärwerte von A sind eindeutig bestimmt.

ii) Es gilt: $AA^\dagger A = A$, $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$, $(AA^\dagger)^T = AA^\dagger$ und $(A^\dagger A)^T = A^\dagger A$.

iii) $AA^\dagger : \mathbb{R}^n \to Bild(A)$ und $A^\dagger A : \mathbb{R}^n \to Bild(A^T)$ sind orthogonale Projektionen.

(4 P)

Aufgabe 2

Beweisen Sie folgendes Störungslemma für lineare Ausgleichsprobleme. Die Aussagen aus Aufgabe 1 dürfen hierbei ohne Beweis verwendet werden.

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ sowie $b, \Delta b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Seien x bzw. $x + \Delta x$ die eindeutigen Lösungen minimaler euklidischer Norm der linearen Ausgleichsprobleme zu den Daten (A, b) bzw. $(A, b + \Delta b)$. Dann ist

$$\|\Delta x\|_2 \leq \|A^\dagger\| \|P_{Bild(A)} \Delta b\|_2, \qquad \frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \kappa_2(A) \frac{\|P_{Bild(A)} \Delta b\|_2}{\|P_{Bild(A)} b\|_2}$$

(4 P)

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Man weise für das CG-Verfahren für $n = 1, 2, ..., n_*$, wobei n_* die kleinste natürliche Zahl ist, für die $A^{n+1}b \in span(b, ..., A^{n_*}b)$, die folgenden Darstellungen nach:

a) $x_n = q_n(A)b$ mit $q_n \in \Pi_{n-1}$ und $r_n = -p_n(A)b$ mit $p_n(t) = 1 - tq_n(t)$

b) Der zur Entwicklung $q_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k$ gehörende Koeffizientenvektor $(c_0, c_1, ..., c_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} b^TAb & b^TA^2b & \cdots & b^TA^nb \\ b^TA^2b & b^TA^3b & \cdots & b^TA^{n+1}b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^TA^nb & b^TA^{n+1}b & \cdots & b^TA^{2n-1}b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^Tb \\ b^TAb \\ \vdots \\ b^TA^{n-1}b \end{pmatrix}$$

(4 P)

Aufgabe 4

Programmieren Sie eine MATLAB-Routine, die als Eingabe eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ verlangt und dann mittels Givens-Rotationen das entsprechende lineare Ausgleichsproblem löst. Testen Sie das Programm an den folgenden Beispielen:

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 0.166667 & 0.181269 \\ 0.333333 & 0.393469 \\ 0.500000 & 0.632121 \\ 0.600000 & 0.776870 \\ 0.666667 & 0.864665 \\ 0.750000 & 0.950213 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.8 \\ 1.0 \\ 1.2 \\ 1.3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0.04 & 0.0016 \\ 1 & 0.32 & 0.1024 \\ 1 & 0.51 & 0.2601 \\ 1 & 0.73 & 0.5329 \\ 1 & 1.03 & 1.0609 \\ 1 & 1.42 & 2.0164 \\ 1 & 1.60 & 2.5600 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2.63 \\ 1.18 \\ 1.16 \\ 1.54 \\ 2.65 \\ 5.41 \\ 7.67 \end{pmatrix}.$$

Vergleich Sie das Methode mit dem Verfahren der konjugierten Gradienten für die Normalengleichungen. (8 P)

Abgabe: **Freitag, 19.11.2004 vor der Vorlesung**