Fachbereich Mathematik und Informatik **WiSe 2004/2005**
Prof. Dr. Andreas Meister
Fil. mag. Philipp Birken

Numerik II

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1

Für eine Zahl $\Theta \in \mathbb{C}$ definiert man das Richardson-Verfahren (siehe auch Meister, Numerik linearer Gleichungssysteme, Seite 82) zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mittels:

$$\mathbf{x}_{m+1} = (\mathbf{I} - \Theta\mathbf{A})\mathbf{x}_m + \Theta\mathbf{Ib}.$$

Beweisen Sie:

a) Wenn $\mathbf{A}$ mindestens einen positiven und einen negativen reellen Eigenwert besitzt, divergiert das Richardson-Verfahren für jede Wahl von $\Theta \in \mathbb{C}$.

b) Wenn $\mathbf{A}$ unter anderem zwei komplexe Eigenwerte λ_1, λ_2 mit entgegengesetztem Vorzeichen besitzt $(\lambda_1/|\lambda_1| = -\lambda_2/|\lambda_2|)$, so divergiert das Richardson-Verfahren für jede Wahl von $\Theta \in \mathbb{C}$.

c) Das Spektrum von $\mathbf{A}$ liege in einem abgeschlossenen Kreis um $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit dem Radius $r < |\mu|$, dann führt die Wahl $\Theta = 1/\mu$ zur Konvergenz des Richardson-Verfahrens mit

$$\rho(\mathbf{I} - \Theta\mathbf{A}) \leq r/|\mu| < 1.$$

(4 P)

Aufgabe 2

Bestimmen Sie für das System

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die Spektralradien der Iterationsmatrizen für das Gesamtschritt- und das Einzelschrittverfahren und schreiben Sie beide Verfahren in Komponenten. Zeigen Sie, daß die Matrix konsistent geordnet ist und bestimmen Sie den optimalen Relaxationsparameter für das Einzelschrittverfahren. (4 P)

Aufgabe 3

a) Stellen Sie für ein zweidimensionales kartesisches Gitter mit konstanter Maschenweite h Prolongations- und Restriktionsmatrizen auf, die die in der Vorlesung für das eindimensionale Gitter angegebenen Matrizen sinnvoll überträgt.

b) Bestimmen Sie den sogenannten Abschneidefehler

$$u_{xx} + u_{yy} + (-u(x_{i-1}, y_j) - u(x_{i+1}, y_j) + 4u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j-1}) - u(x_i, y_{j+1}))/h^2$$

als Potenz von h. Stellen Sie also fest, ob der Fehler mit h, h^2, h^3 oder ... wächst.

(4 P)

Aufgabe 4

Programmieren Sie das Mehrgitterverfahren als V-Zyklus. Benutzen Sie als Glätter das relaxierte Gauß-Seidel-Verfahren (jeweils nur ein Vor- und Nachglättungsschritt). Vergleichen Sie das Verfahren mit dem CG-Verfahren. Testen Sie es an dem linearen Gleichungssystem von Zettel 5, Aufgabe 2 mit $u_0 = 0$ und $f = 1$. Fangen Sie hierzu mit einem Gitter der Maschenweite h an und halbieren Sie dann sukzessive die Maschenweite. Schauen Sie sich auch die Kondition der Matrix an. (8 P)

Abgabe: **Freitag, 3.12.2004 vor der Vorlesung**