

Numerik II

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1

Gegeben sind das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ und die iterative Methode:

$$\mathbf{u} := \mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{b}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{N}\mathbf{A}.$$

\mathbf{M} hat die sogenannte Smoothing Property, falls es eine Konstante C_S und eine Funktion $\eta(\nu)$ unabhängig von der Maschenweite h gibt, so dass

$$\|\mathbf{A}\mathbf{M}^\nu\| \leq C_S h^{-2m} \eta(\nu), \quad \eta(\nu) \rightarrow 0 \quad \text{für } \nu \rightarrow \infty,$$

wobei $2m$ die Ordnung der partiellen Differentialgleichung ist (also $m = 1$ für die Laplace-Gleichung).

Beweisen Sie: Wenn die Smoothing Property gilt, konvergiert die oben angegebene iterative Methode. (3 P)

Aufgabe 2

Es gelten die Smoothing Property und die sogenannte Approximation Property: Es existiert also eine Konstante C_A unabhängig von h , so dass

$$\|\mathbf{A}_1^{-1} - \mathbf{P}_{1-1}^1 \mathbf{A}_{1-1}^{-1} \mathbf{R}_1^{1-1}\| \leq C_A h^{2m},$$

mit $2m$ wie oben und \mathbf{P} und \mathbf{R} die entsprechenden Prolongations- und Restriktionsoperatoren.

Beweisen Sie: Unter den oben angegebenen Voraussetzungen existiert ein ν , so dass das Zweigitterverfahren ohne Vorglättung mit ν Nachglättungen konvergiert. (3 P)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Fourier-Reihen der periodischen Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x \in [-\pi, \pi] \setminus [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

(3 P)

Aufgabe 4

Wie lautet die Fourier-Reihenentwicklung einer L -periodischen Funktion ($L > 0$)? (3 P)

Abgabe: Freitag, 10.12.2004 vor der Vorlesung