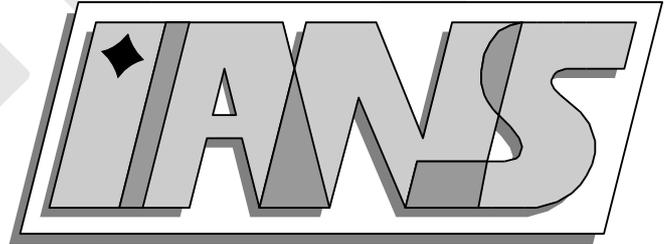


**Universität  
Stuttgart**



---

**Nichtlineare Funktionalanalysis mit Anwendungen in  
der Festkörpermechanik**

Anna-Margarete Sändig, (Hrsg.), Dorothee Knees (Hrsg.)

---

**Berichte aus dem Institut für  
Angewandte Analysis und Numerische Simulation**

Seminarbericht 2004/011



**Universität Stuttgart**

---

**Nichtlineare Funktionalanalysis mit Anwendungen in  
der Festkörpermechanik**

Anna-Margarete Sändig, (Hrsg.), Dorothee Knees (Hrsg.)

---

**Berichte aus dem Institut für  
Angewandte Analysis und Numerische Simulation**

Seminarbericht 2004/011

Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation (IANS)  
Fakultät Mathematik und Physik  
Fachbereich Mathematik  
Pfaffenwaldring 57  
D-70 569 Stuttgart

**E-Mail:** [ians-preprints@mathematik.uni-stuttgart.de](mailto:ians-preprints@mathematik.uni-stuttgart.de)  
**WWW:** <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

ISSN **1611-4176**

© Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck nur mit Genehmigung des Autors.  
IANS-Logo: Andreas Klimke.  $\LaTeX$ -Style: Winfried Geis, Thomas Merkle.

## Vorwort

Der vorliegende Bericht entstand im Rahmen des Hauptseminars *Nichtlineare Funktionalanalysis mit Anwendungen in der Festkörpermechanik*, das im Wintersemester 2003/04 am Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation (IANS) der Universität Stuttgart veranstaltet wurde. Es nahmen 10 Studenten teil: MARKUS DAUB, ROLAND ERNST, SVEN FISCH (ohne Vortrag), TOBIAS HÄCKER, ANITA KETTEMANN, ANIKA REIMANN, EUGEN REMPEL, MARITA THOMAS, ALEXANDER WEISS, JUN ZHOU.

Im Mittelpunkt des Seminars stand der Hauptsatz über monotone Operatoren. Er wurde zunächst durch drei Vorträge über lineare monotone Operatoren vorbereitet, in denen Begriffe und Definitionen zu schwachen Ableitungen und Sobolevräumen aufgefrischt, der Satz von Lax-Milgram bewiesen sowie Aussagen zur linearen Elastizität wiederholt und vertieft wurden. Es schlossen sich drei Vorträge über die Theorie nichtlinearer monotoner Operatoren an. Dabei wurden Beispiele für nichtlineare monotone Operatoren behandelt, der Hauptsatz über monotone Operatoren diskutiert und bewiesen sowie Spezialfälle dieses Satzes angesprochen. Die letzten drei Vorträge befassten sich mit Anwendungen des Hauptsatzes. Der  $p$ -Laplace-Operator wurde analysiert, und ein scherenzähendes, nicht Newtonsches Fluid von  $p$ -Struktur wurde untersucht. Als Abschluss wurden numerische Simulationen des Stokes und Navier-Stokes Systems gezeigt, die Unterschiede der linearen und nichtlinearen Modellierung bei einem Fluss in einem gekrümmten Rohr dokumentierten.

Als Literaturquellen wurden u.a. die Bücher von R.A.Adams [2], E.Zeidler [27, 28], sowie preprints von D.Knees [14], M. Ruziska [18] und A.M.Sändig [19, 22, 21] benutzt.

Die Studenten haben mit viel Einsatz die Vorträge vorbereitet, sich über didaktische und methodische Fragen Gedanken gemacht, sowie schriftliche Ausarbeitungen in Latex erstellt. Es war für sie nicht immer einfach, alle Vorträge sofort zu verstehen, da unterschiedliche funktionalanalytische Vorkenntnisse vorlagen und es viel Engagement erforderte, Lücken zu schließen.

Wir hoffen, dass dieser Seminar-Bericht eine gute Einführung in die Theorie der monotonen Operatoren darstellt und dass die ausgearbeiteten Beispiele zum Verständnis beitragen.

Dipl.-Math. Dorothee Knees und Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

Stuttgart, im Februar 2004



## Vortragsverzeichnis

1. Schwache Ableitungen und Sobolevräume (ROLAND ERNST) .....	1
2. Satz von Lax-Milgram (JUN ZHOU) .....	11
3. Lineare Elastizität (EUGEN REMPEL) .....	17
4. Einführung in die Theorie der monotonen Operatoren (MARKUS DAUB) .....	31
5. Hauptsatz über monotone Operatoren, I (ANIKA REIMANN) .....	43
6. Hauptsatz über monotone Operatoren, II (MARITA THOMAS) .....	55
7. Der $p$ -Laplace-Operator (ALEXANDER WEISS) .....	65
8. Ein mathematisches Modell für scherentzähende Fluide (ANITA KETTEMANN) .....	77
9. Analysis für ein Modell scherentzähender Fluide (TOBIAS HÄCKER) .....	89



## Schwache Ableitungen und Sobolevräume

ROLAND ERNST

Für die schwache Formulierung partieller Differentialgleichungen sind die Arbeiten von S.L. Sobolev (1908 – 1989) zu den nach ihm benannten Sobolevräumen grundlegend. In den 30'er Jahren begann er, klassische Lösungsbegriffe von partiellen Differentialgleichungen zu überdenken und lieferte theoretische Ansätze zur Untersuchung schwacher Lösungen. Den folgenden Ausführungen liegen die Arbeiten [9], [20], [24], [6] zugrunde.

### 1. Einleitung

In der Einleitung werden Bezeichnungen für die schwachen Ableitungen und Sobolevräume kurz erläutert. Ausführlich sind diese Grundlagen in [22] dargelegt.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  sei ein offenes zusammenhängendes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand  $\partial\Omega$ .

Es wird an folgende Begriffe erinnert:

- Träger einer Funktion:  $\text{supp } v := \overline{\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}}$ .
- Maß einer Menge  $\Omega$  :

$$\text{meas}(\Omega) = \mu(\Omega) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mathcal{I}_i| : \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{I}_i \supset \Omega \right\},$$

wobei  $|\mathcal{I}_i|$  das  $n$ -dimensionale Volumen von  $\mathcal{I}_i$  (kartesisches Produkt von eindimensionalen Intervallen) ist.

- Messbarkeit: Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist messbar, falls für jedes  $c \in \mathbb{R}$  die Menge  $\{x \in \Omega : f(x) < c\}$  messbar ist.
- Multiindex:  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$ ;  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .
- $L_p(\Omega)$ : Raum der Äquivalenzklassen aller auf  $\Omega$  definierten messbaren Funktionen, für die gilt:

$$\int_{\Omega} |v(x)|^p dx < \infty.$$

Dabei sind Vertreter einer Klasse gleich, falls sie sich nur auf einer Menge vom Maß Null unterscheiden. Die  $L_p$ -Norm ist definiert als

$$\|v\|_{L_p(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty.$$

- $L_{\infty}(\Omega)$ : Raum der auf  $\Omega$  messbaren und bis auf einer Menge vom Maß Null beschränkten Funktionen, d.h. es existiert ein  $c > 0$  und eine Menge  $\mathcal{N}$  mit  $\mu(\mathcal{N}) = 0$ ,

so dass für alle  $x \in \Omega \setminus \mathcal{N}$  die Funktion  $v$  beschränkt ist mit  $|v(x)| \leq c$ . Dieser Raum ist mit der Norm versehen:

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |v(x)| = \inf_{\mathcal{N} \subset \Omega, \mu(\mathcal{N})=0} \sup_{x \in \Omega \setminus \mathcal{N}} |v(x)|.$$

Die Norm  $\|v\|_{L^\infty(\Omega)}$  ist die kleinste obere Schranke  $c$ , so dass  $|v(x)| > c$  nur auf einer Menge vom Maß 0 ist.

- $L_1^{loc}(\Omega)$ : Raum der lokal integrierbaren Funktionen, d.h.  $v$  ist bezüglich jeder abgeschlossenen und beschränkten Teilmenge von  $\Omega$  integrierbar.

BEISPIEL 1.1. Wir betrachten  $u(x) = \frac{1}{x}$ ,  $\Omega = (0, 1)$ . Es ist

$$\int_0^1 u(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon = \infty.$$

Sei  $0 < a < b < 1$ ,  $u(x) = \frac{1}{x}$ . Wir erhalten

$$\int_a^b u(x) dx = \ln \frac{b}{a} < \infty.$$

Damit ist  $u \notin L_1(\Omega)$ , aber  $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ .

- $C_0^\infty(\Omega)$ : Raum der  $\infty$ -oft stetig differenzierbaren Funktionen über  $\Omega$  mit kompaktem Träger in  $\Omega$ .

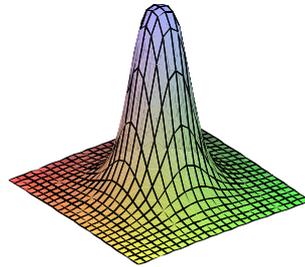


ABBILDUNG 1. Beispielfunktion  $f \in C_0^\infty(\Omega)$

- $C_0^\infty(\Omega)$  liegt dicht in  $L_p(\Omega)$ , d.h. jedes  $v \in L_p(\Omega)$  ist Grenzwert einer Folge  $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ , die der Norm nach in  $L_p(\Omega)$  konvergiert.

## 2. Schwache Ableitungen

Als nächstes wird der Begriff der schwachen Ableitung eingeführt. Er dient zur Verallgemeinerung der klassischen Ableitung.

Ausgangspunkt der Betrachtung ist die partielle Integration:

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) dx + \int_{\partial \Omega} u(x) v(x) n_i ds_x, \quad i = 1, \dots, n.$$

Nach wiederholten Anwendungen ergibt sich dann mit dem Normalenvektor  $\vec{n}$  :

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} v(x) dx + \int_{\partial\Omega} R(u, v) \cdot \vec{n} ds_x,$$

wobei  $R(u, v)$  von den Ableitungen von  $u$  und  $v$  bis zum Grad  $|\alpha| - 1$  abhängt. Es liegt nahe,  $v$  aus einem geeigneten Raum zu wählen, damit  $R(u, v)$  auf  $\partial\Omega$  verschwindet. Somit erhält man folgende

DEFINITION 1.2.  $D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$  heißt schwache  $\alpha$ -te Ableitung von  $u$  in  $\Omega$ , falls für  $u, D^\alpha u \in L_1^{loc}(\Omega)$  gilt:

$$\int_{\Omega} u D^\alpha v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u v dx \quad \text{für alle } v \in C_0^\infty(\Omega).$$

SATZ 1.3. Die schwache Ableitung einer Funktion  $u \in L_1^{loc}(\Omega)$  ist, bis auf einer Menge vom Maß Null, eindeutig bestimmt.

BEWEIS. Seien  $w, \tilde{w} \in L_1^{loc}(\Omega)$  beides  $\alpha$ -te Ableitungen von  $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ . Dann ist

$$\int_{\Omega} u D^\alpha v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \tilde{w} v dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

woraus

$$\int_{\Omega} (w - \tilde{w}) v dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.1}$$

folgt. Nach dem Variationslemma von Du Bois-Reymond [20] ist (1.1) äquivalent zu

$$w - \tilde{w} \equiv 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \mathcal{N}, \text{ mit } \mu(\mathcal{N}) = 0.$$

□

SCHLUSSFOLGERUNG 1.4. Die schwache Ableitung stimmt mit der klassischen Ableitung überein, falls diese existiert und sich in  $L_1^{loc}(\Omega)$  befindet.

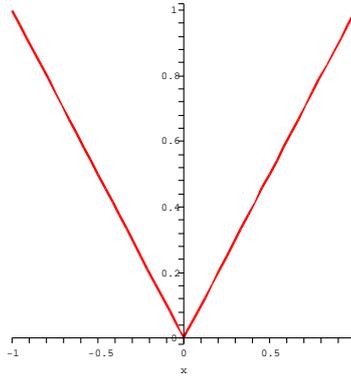
Wir betrachten jetzt zwei Beispiele.

BEISPIEL 1.5. Sei  $u(x) = |x|$  in  $\Omega = [-1, 1]$ . Mit Hilfe der partiellen Integration auf  $(-1, 0)$  und  $(0, 1)$  ergibt sich für  $v \in C_0^\infty((-1, 1))$ :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u v' dx &= \int_{-1}^0 -x v' dx + \int_0^1 x v' dx \\ &= \int_{-1}^0 v dx - \int_0^1 v dx \\ &= - \int_{-1}^1 \text{sign}(x) v dx \end{aligned}$$

Daher existiert die schwache Ableitung von  $u$  in  $L_1^{loc}((-1, 1))$  und es ist

$$D^1 u = \text{sign}(x).$$

ABBILDUNG 2. Funktion  $u(x)$  in Beispiel 1.5

BEISPIEL 1.6. Im Gebiet  $\Omega = (0, 2)$  sei die folgende Funktion  $u$  gegeben, vergleiche auch Abbildung 3:

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in (0, 1], \\ 2 & \text{für } x \in (1, 2). \end{cases}$$

Für ein beliebiges  $v \in C_0^\infty((0, 2))$  gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^2 uv' dx &= \int_0^1 xv' dx + \int_1^2 2v' dx \\ &= - \int_0^1 v dx + [xv]_0^1 + 2(v(2) - v(1)) \\ &= - \int_0^1 v dx - v(1). \end{aligned}$$

Es bleibt zu überprüfen, ob eine Funktion  $D^1u \in L_1^{loc}((0, 2))$  existiert, so dass gilt:

$$- \int_0^2 D^1u(x)v(x) dx = - \int_0^1 v(x) dx - v(1).$$

Sei  $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $C_0^\infty(\Omega)$  mit  $v_m(1) = 1$  und  $v_m(x) \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty, x \neq 1$ . Wir nehmen an, es sei  $D^1u \in L_1^{loc}((0, 2))$ . Dann gilt:

$$1 = v_m(1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \int_0^2 (D^1u(x))v_m(x) dx - \int_0^1 v_m(x) dx \right) = 0.$$

Aus diesem Widerspruch folgt, dass  $u$  keine schwache Ableitung in  $L_1^{loc}((0, 2))$  besitzt.

### 3. Sobolevräume

Durch die schwache Ableitung ist es jetzt möglich, neue Funktionenräume einzuführen. Sie spielen in der Analysis und Numerik für schwache Formulierungen von Randwertproblemen für partielle Differentialgleichungen eine zentrale Rolle.

Bis auf weiteres sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein offenes, zusammenhängendes, beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand  $\partial\Omega$ .

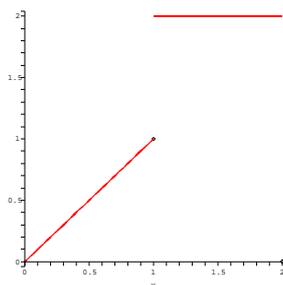


ABBILDUNG 3. Funktion  $u(x)$  in Beispiel 1.6

DEFINITION 1.7. Sei  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Der Raum  $W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L_p(\Omega) : D^\alpha u \in L_p(\Omega) \text{ für } |\alpha| \leq k\}$  heißt **Sobolevraum**.

Die Norm in  $W^{k,p}(\Omega)$  ist definiert durch

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} (\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p)^{1/p} & \text{für } 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Die Sobolevräume können auch als Abschluss von  $C^\infty(\overline{\Omega})$  bezüglich dieser Normen charakterisiert werden.

Von besonderem Interesse für spätere Anwendungen ist der Hilbertraum  $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L_2(\Omega)}$$

und der Norm

$$\|u\|_{H^k(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \langle u, u \rangle_{H^k(\Omega)}.$$

In  $H^k(\Omega)$  ist eine Seminorm durch

$$|u|_{H^k(\Omega)} := \left( \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

definiert. Dies ist keine vollständige Norm. Hierfür lässt sich leicht ein Beispiel finden.

Sei  $u = \text{const} \neq 0$  und  $k = 1$ , dann ist  $|u|_{H^1(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2} = 0$ .

Offensichtlich folgt aus Definition 1.7 die Beziehung  $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$ .

Desweiteren ergeben sich die Sobolevräume

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}$$

als Abschluss der Räume von unendlich-oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in  $\Omega$ . Für  $k = 2$  werden diese Räume wieder mit

$$H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$$

bezeichnet. Elemente aus diesem Hilbertraum kann man folgendermaßen beschreiben:

Für  $u \in H_0^k(\Omega)$  gilt:  $u \in H^k(\Omega)$  mit der Eigenschaft, dass “ $D^\alpha u = 0$ ” auf  $\partial\Omega$  für  $|\alpha| \leq k-1$ , d.h. die Funktionen und ihre Ableitungen bis zur  $(|\alpha| - 1)$ -ten Ordnung verschwinden (im “Spursinn”) auf dem Rand von  $\Omega$ .

**SATZ 1.8 (Poincaré-Friedrichs-Ungleichung).** [27, S. 59] *Sei  $\Omega$  beschränktes zusammenhängendes Gebiet. Dann existiert eine Konstante  $c > 0$ , so dass gilt:*

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} \leq c |u|_{H^k(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^k(\Omega).$$

**BEWEIS.** Wegen der Eigenschaft, dass  $W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ , genügt es zunächst, den Beweis auf  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  einzuschränken. Sei  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ . Da  $\Omega$  beschränkt ist, existiert eine Kugel  $K_r(0)$ , so dass  $\Omega \subset K_r(0)$  ist. Für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$  gilt dann  $x_1 \in [-r, r]$ . Aus dem Hauptsatz der Differentialrechnung und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= \left| \int_{-r}^{x_1} 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n) d\xi \right|^2 \\ &\leq |x_1 + r| \int_{-r}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^2 d\xi \\ &\leq 2r \int_{-r}^r \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \\ &\leq 2r \int_{\Omega} \int_{-r}^r \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^2 d\xi dx \\ &= 2r \int_{-r}^r \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dx d\xi \\ &= 2r \int_{-r}^r \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 d\xi \\ &= 4r^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Es folgt mit  $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^0(\Omega)}^2 &\leq 4r^2 |u|_{H^1(\Omega)}^2 \\ \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|u\|_{H^0(\Omega)}^2 + |u|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (4r^2 + 1) |u|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Analog erhält man allgemein

$$|u|_{H^{j-1}(\Omega)}^2 \leq 4r^2 |u|_{H^j(\Omega)}^2,$$

woraus

$$|u|_{H^0(\Omega)}^2 \leq 4r^2 |u|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (4r^2)^2 |u|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \dots \leq (4r^2)^k |u|_{H^k(\Omega)}^2$$

folgt. Mit Hilfe der geometrischen Reihe gilt schließlich für  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^k(\Omega)}^2 &= \sum_{j=0}^k |u|_{H^j(\Omega)}^2 \\ &\leq ((4R^2)^k + (4R^2)^{k-1} + \dots + 4R^2 + 1) |u|_{H^k(\Omega)}^2 \\ &= \frac{1 - (4R^2)^{k+1}}{1 - 4R^2} |u|_{H^k(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Sei nun  $u \in H_0^k(\Omega)$ . Dann ist wegen der Dichtheit von  $C_0^\infty(\Omega)$  in  $W_0^k(\Omega)$  folgendes erfüllt: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\tilde{u} \in C_0^\infty(\Omega)$  mit der Eigenschaft, dass  $\|u - \tilde{u}\|_{H^k(\Omega)} < \varepsilon$  ist. Damit ist

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^k(\Omega)} &\leq \|u - \tilde{u}\|_{H^k(\Omega)} + \|\tilde{u}\|_{H^k(\Omega)} \\ &\leq \varepsilon + c |\tilde{u}|_{H^k(\Omega)} \\ &\leq \varepsilon + c(|u - \tilde{u}|_{H^k(\Omega)} + |u|_{H^k(\Omega)}) \\ &< \varepsilon(c + 1) + c |u|_{H^k(\Omega)}. \end{aligned}$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt die Behauptung.  $\square$

Anschließend sind noch einige wichtige Ungleichungen aufgeführt. Für die Beweise sei auf die Literatur [24] verwiesen.

Sei  $\partial\Omega$  Lipschitz-stetig und  $\Gamma \subset \partial\Omega$  mit  $\text{meas}(\Gamma) \neq 0$ . Dann gilt für alle  $u \in H^1(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)} &\leq C \left( \left| \int_{\partial\Omega} u ds \right| + \left( \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \right), \\ \|u\|_{H^1(\Omega)} &\leq C \left( \left| \int_{\Omega} u dx \right| + \left( \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \right), \\ \|u\|_{H^1(\Omega)} &\leq C \left( \left| \int_{\Gamma} |u| ds \right| + \left( \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

DEFINITION 1.9.  $H^{-k}(\Omega) := \{f : H_0^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ linear, stetig}\}$  ist der Dualraum zu  $H_0^k(\Omega)$ . Er ist versehen mit der Norm

$$\|f\|_{H^{-k}(\Omega)} := \sup_{0 \neq u \in H^k(\Omega)} \frac{\langle f, u \rangle}{\|u\|_{H^k(\Omega)}},$$

wobei die duale Paarung  $\langle f, u \rangle = f(u)$  als Anwendung von  $f$  auf  $u$  zu verstehen ist.

Auf die Sobolevräume mit  $k \notin \mathbb{N}$  wird hier nicht ausführlich eingegangen (siehe [2]). Zur Vollständigkeit werden in diesem Fall noch die Raum- und Normdefinitionen angegeben.

DEFINITION 1.10. Sei  $k \in \mathbb{N}_0, \kappa \in (0, 1)$  mit  $s = k + \kappa$ . Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  gelten die gleichen Bedingungen wie bisher.

$$H^s(\Omega) := \{u \in H^k(\Omega) : \|u\|_{H^s(\Omega)} < \infty\}$$

mit der Sobolev-Slobodeckii-Norm

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} := \left\{ \|u\|_{H^k(\Omega)}^2 + |u|_{H^s(\Omega)}^2 \right\}^{1/2},$$

wobei der zweite Term definiert ist durch

$$|u|_{H^s(\Omega)} := \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\kappa}} dx dy.$$

#### 4. Schwache Formulierung des homogenen Dirichlet-Randwertproblems

Als letzter Unterpunkt dieses Kapitels wird eine Anwendung der Sobolevräume für ein spezielles Dirichlet-Randwertproblem betrachtet. Es sei wieder  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein offenes zusammenhängendes beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand  $\partial\Omega$ .

PROBLEM 1.11. Sei

$$Lu := -\operatorname{div}(A\nabla u) = -\sum_{i,k=1}^n \partial_i(a_{ik}\partial_k u)$$

mit der konstanten reellen Matrix

$$A = (a_{ik})_{1 \leq i,k \leq n}.$$

Das Dirichlet-Problem lautet: Finde für gegebenes  $f$  eine Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$ , so dass gilt:

$$Lu = f \quad \text{für } x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$u = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega. \quad (1.3)$$

Mit der Annahme, dass  $f \in L_2(\Omega)$  so gewählt werden kann und dass der Satz von Gauß anwendbar ist, liefert die Multiplikation von (1.2) mit  $v \in H_0^1(\Omega)$  und Integration über  $\Omega$ :

$$-\sum_{i,k=1}^n \int_{\Omega} \partial_i(a_{ik}\partial_k u)v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Nach partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v dx &= -\sum_{i,k=1}^n \int_{\Omega} \partial_i(a_{ik}\partial_k u)v dx \\ &= -\sum_{i,k=1}^n \left[ -\int_{\Omega} (a_{ik}\partial_k u)\partial_i v dx + \int_{\partial\Omega} (a_{ik}\partial_k u)v n_i ds_x \right] \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^n (a_{ik}\partial_k u)\partial_i v dx \quad =: a(u, v) \end{aligned}$$

Mit diesem Resultat lässt sich nun die sogenannte **schwache Formulierung** des homogenen Dirichlet-Randwertproblems angeben:

Finde ein  $u \in H_0^1(\Omega)$ , so dass für  $f \in H^{-1}(\Omega)$  gilt:

$$\int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^n (a_{ik} \partial_k u) \partial_i v dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Abschließend wird die schwache Formulierung des homogenen Dirichlet-Randwertproblems für  $Lu = -\Delta u$  und  $n = 2$  angegeben:

Die Bilinearform  $a(u, v)$  ergibt sich durch voriges Schema als

$$\begin{aligned} a(u, v) &= - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \cdot v dx \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) dx + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx. \end{aligned}$$

Somit lautet die zugehörige schwache Formulierung:

Finde ein  $u \in H_0^1(\Omega)$ , so dass für  $f \in H^{-1}(\Omega)$  gilt:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$



## VORTRAG 2

# Satz von Lax-Milgram

JUN ZHOU

In diesem Vortrag beweisen wir den Satz von Lax-Milgram in einem Hilbertraum und betrachten die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines inhomogenen Dirichletproblems. Wir definieren zuerst, was wir unter einer beschränkten und V-elliptischen Bilinearform verstehen.

### 1. Bilinearform, Stetigkeit, V-Elliptizität

DEFINITION 2.1. Ein normierter Raum  $V$  heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge gegen ein  $x \in V$  konvergiert. Ein Banach-Raum ist ein normierter (linearer) und vollständiger Raum.

BEISPIEL 2.2.

Der Sobolevraum  $V = H^1(\Omega)$ , versehen mit der Norm

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

ist ein Banachraum.

BEISPIEL 2.3.

Der Teilraum  $V = H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$  mit  $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}$  ist ebenfalls ein Banachraum.

Ein Hilbertraum ist ein Banachraum mit Skalarprodukt. Z.B. ist  $H^1(\Omega)$  ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt  $(u, v) = \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$ .

Es sein  $V$  ein reeller Banach-Raum und  $a(\cdot, \cdot)$  eine Abbildung von  $V \times V$  in  $\mathbb{R}$ .

DEFINITION 2.4.  $a(\cdot, \cdot)$  ist eine Bilinearform, falls

$$\begin{aligned} a(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) &= \lambda_1 a(u_1, v) + \lambda_2 a(u_2, v) \\ a(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \lambda_1 a(u, v_1) + \lambda_2 a(u, v_2) \\ \forall u_1, u_2, u, v_1, v_2, v \in V, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad &\text{gilt.} \end{aligned}$$

BEISPIEL 2.5.

1) Sei  $V = \mathbb{R}^n$  und  $u, v \in \mathbb{R}^n$ ,  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ . Dann ist  $a(u, v) := u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$

eine Bilinearform.

2) Sei  $V = L^2(\Omega)$  und  $u, v \in L^2(\Omega)$ .  $a(u, v) := \int_{\Omega} uv dx$  ist eine Bilinearform auf  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

3) Sei  $V = H^1(\Omega)$ , und  $u, v \in H^1(\Omega)$ . Die Abbildung  $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$  von  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  in  $\mathbb{R}$  beschreibt eine Bilinearform.

DEFINITION 2.6.  $a(\cdot, \cdot)$  ist beschränkt (stetig), falls ein  $c > 0$  existiert, so dass

$$|a(u, v)| \leq c \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V \quad \text{ist.}$$

DEFINITION 2.7. Eine Bilinearform heißt V-elliptisch, falls die Bedingung

$$a(u, u) \geq c \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V$$

mit einer Konstanten  $c > 0$  gilt.

## 2. Satz von Lax-Milgram

Um den Satz von Lax-Milgram zu beweisen, brauchen wir den Banachschen Fixpunktsatz und den Rieszschen Darstellungssatz. Die beide Sätze werden hier ohne Beweis angegeben.

SATZ 2.8 (Banachscher Fixpunktsatz). (vgl. [12, Seite 67]):

Seien  $V$  ein Banachraum und  $T: V \rightarrow V$  eine Kontraktion, also

$$\|Tv - Tw\| \leq L \|v - w\|, \quad \forall v, w \in V \quad \text{mit } L \in [0, 1).$$

Dann besitzt  $T$  einen eindeutigen Fixpunkt. D.h. es existiert genau ein  $u \in V$ , so dass  $Tu = u$  ist.

Wir beschreiben jetzt den Rieszschen Isomorphismus  $\tau: H' \rightarrow H$ .

SATZ 2.9 (Rieszscher Darstellungssatz). (vgl. [12, Seite 319])

Es sei  $H$  ein Hilbertraum und  $H'$  sein Dualraum. Dann existiert ein Norm-Isomorphismus zwischen  $H'$  und  $H$ . D.h. es existiert eine bijektive Abbildung  $\tau: H' \rightarrow H$ , so dass für alle  $F \in H'$  gilt:

$$\|\tau F\|_H = \|F\|_{H'} \quad \text{und} \quad F(v) = (\tau F, v)_H \quad \text{für alle } v \in H. \quad (2.1)$$

Hierbei bezeichnet  $(\cdot, \cdot)_H$  das Skalarprodukt in  $H$ .

Dieser Satz wird in Vortrag 5 (Satz 5.11) bewiesen.

Wir kommen nun zum zentralen Satz von Lax-Milgram.

SATZ 2.10 (Satz von Lax-Milgram). [27, S.69]

Es sei  $V=H$  ein Hilbertraum und  $a(\cdot, \cdot)$  eine reelle Bilinearform auf  $V \times V$ . Wir nehmen an, dass Konstanten  $c_1 > 0$  und  $c_2 > 0$  existieren, so dass für alle  $u, v \in V$  gilt

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq c_1 \|u\|_V \|v\|_V, \\ a(u, u) &\geq c_2 \|u\|_V^2. \end{aligned}$$

Sei weiter  $F: V \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige lineare Abbildung, d.h.  $F \in V'$ . Dann existiert für jedes  $F$  ein eindeutig bestimmtes Element  $u^* \in V$  mit  $a(u^*, v) = F(v) = \langle F, v \rangle$  für alle  $v \in V$ . Hierbei bedeutet das Symbol  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die duale Paarung, d.h. das Funktional  $F \in V'$  wird auf die Elemente  $v \in V$  angewandt.

BEWEIS. Sei  $A: V \rightarrow V'$  eine stetige Abbildung, die für alle  $u$  und  $v$  aus  $V$  durch  $Au(v) = a(u, v)$  definiert ist. Wir betrachten den Rieszischen Isomorphismus  $\tau: V' \rightarrow V$ . Dann gilt  $(\tau Au, v)_V = Au(v) = a(u, v)$ . Weiterhin erhalten wir die Abschätzung

$$c_2 \|v\|_V^2 \leq |a(v, v)| = |(\tau Av, v)_V| \leq \|\tau Av\|_V \|v\|_V \stackrel{(2.1)}{=} \|Av\|_{V'} \|v\|_V \leq \|A\| \|v\|_V^2.$$

Daraus folgt

$$0 < \frac{c_2}{b} \leq 1 \quad \text{mit} \quad b = \|A\|. \quad (2.2)$$

Wir definieren

$$Q(u) := u - k(\tau Au - \tau F), \quad (2.3)$$

wobei  $k$  eine reelle Zahl ist.  $Q$  ist eine Abbildung von  $V$  in  $V$ .

Es ist sofort zu sehen:  $u^*$  ist Fixpunkt von  $Q$  genau dann wenn

$$\tau Au^* - \tau F = 0. \quad (2.4)$$

Wir überlegen, dass  $\tau Au^* - \tau F = 0$  ist, genau dann, wenn für alle  $v \in V$  gilt  $a(u^*, v) = \langle F, v \rangle$ . Nach (2.1) ist  $a(u, v) = \langle F, v \rangle$  äquivalent zu  $(\tau Au, v)_V = \langle F, v \rangle = (\tau F, v)_V$ . Daraus folgt, dass

$$(\tau Au - \tau F, v)_V = 0, \quad \text{für alle } v \in V \text{ ist.} \quad (2.5)$$

Da diese Gleichung für alle  $v \in V$  gilt, können wir  $v = \tau Au - \tau F$  wählen. Wir erhalten aus (2.5), dass  $\|\tau Au - \tau F\|_V^2 = 0$  ist, und daher  $\tau Au = \tau F$  folgt.

Somit haben wir folgendes Ergebnis erhalten:

Besitzt  $Q$  einen eindeutig bestimmten Fixpunkt  $u^*$ , dann ist  $u^*$  eindeutige Lösung von

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Wir zeigen nun, dass für bestimmte Wahl der Konstanten  $k$ ,  $Q$  einen eindeutig bestimmten Fixpunkt nach dem Banachschen Fixpunktsatz besitzt.

Seien  $v_1, v_2 \in V$  beliebig gewählt. Dann ist

$$\begin{aligned} \|Q(v_1) - Q(v_2)\|_V^2 &= ((v_1 - v_2) - k\tau A(v_1 - v_2), (v_1 - v_2) - k\tau A(v_1 - v_2))_V \\ &= \|v_1 - v_2\|_V^2 - 2k(\tau A(v_1 - v_2), (v_1 - v_2))_V + k^2 \|\tau A(v_1 - v_2)\|_V^2 \\ &= \|v_1 - v_2\|_V^2 - 2ka(v_1 - v_2, v_1 - v_2) + k^2 a(v_1 - v_2, \tau A(v_1 - v_2)) \\ &\leq \|v_1 - v_2\|_V^2 - 2kc_2 \|v_1 - v_2\|_V^2 \\ &\quad + k^2 \|A\| \|v_1 - v_2\|_V \|\tau A(v_1 - v_2)\|_V \\ &\leq \|v_1 - v_2\|_V^2 - 2kc_2 \|v_1 - v_2\|_V^2 + k^2 b^2 \|v_1 - v_2\|_V^2 \\ &= \|v_1 - v_2\|_V^2 \{1 - 2kc_2 + k^2 b^2\}. \end{aligned}$$

Wir setzen  $q^2 := 1 - 2kc_2 + k^2 b^2$  und  $k = \frac{c_2}{b^2}$ . Dann ist nach (2.2)  $q^2 = 1 - 2\frac{c_2^2}{b^2} + \frac{c_2^2}{b^2} \in [0, 1)$ . Nach dem Banachschen Fixpunktsatz haben wir die Existenz und Eindeutigkeit von  $u^*$  bewiesen.  $\square$

BEMERKUNG 2.11. Falls  $V$  ein reeller reflexiver Banachraum ist, gilt dieser Satz auch. ( siehe [21, Seite 104-105] )

### 3. Anwendung des Satzes von Lax-Milgram auf ein Randwertproblem

Wir betrachten folgendes inhomogenes Dirichletproblem:

Für  $f \in C(\bar{\Omega})$ ,  $c(x) \in L^\infty(\Omega)$ ,  $g \in C(\partial\Omega)$  finde ein  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ , so dass

$$-\Delta u + c(x)u = f \quad x \in \Omega, \quad (2.6)$$

$$u = g \quad x \in \partial\Omega \quad (2.7)$$

gilt. Dieses Problem hat nicht immer eine Lösung in  $C^2(\bar{\Omega})$ .

BEISPIEL 2.12. Man betrachte ein zweidimensionales Gebiet  $\Omega$  mit einspringender Ecke (Abbildung 1.)

$$\Omega = \{(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < 1, 0 < \phi < \frac{3}{2}\pi\}.$$

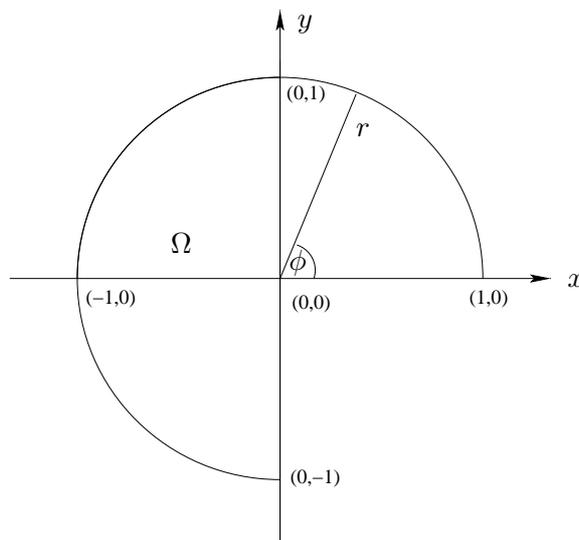


ABBILDUNG 1. Das Gebiet  $\Omega$

In Polarkoordinaten ist dann die harmonische Funktion  $u(r, \phi) = r^{\frac{2}{3}} \sin \frac{2}{3}\phi$  Lösung der Randwertaufgabe

$$-\Delta u = 0 \quad x \in \Omega,$$

mit dem Dirichletdatum

$$u = \begin{cases} \sin\left(\frac{2}{3}\phi\right) & \text{für } 0 \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2}, \\ 0 & \text{sonst auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ &= \frac{2}{3} r^{-\frac{1}{3}} \sin \frac{2}{3} \phi \cos \phi + \frac{2}{3} r^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2}{3} \phi \left( -\frac{\sin \phi}{r} \right) \\ &= \frac{2}{3} r^{-\frac{1}{3}} \left( \sin \frac{2}{3} \phi \cos \phi - \cos \frac{2}{3} \phi \sin \phi \right) \\ &= -\frac{2}{3} r^{-\frac{1}{3}} \sin \frac{1}{3} \phi\end{aligned}$$

sind nicht einmal die ersten Ableitungen von  $u$  für  $r \rightarrow 0$  beschränkt, d.h. dieses Dirichletproblem hat keine (klassische) Lösung in  $C^2(\bar{\Omega})$ .

Trotzdem können wir eine schwache Lösung finden. Um dies zu zeigen, geben wir zunächst eine schwache Formulierung für das Randwertproblem (2.6), (2.7) an.

Dazu nehmen wir an, dass  $f \in L_2(\Omega)$  sei, multiplizieren die partielle Differentialgleichung (2.6) mit einer Funktion  $v \in H_0^1(\Omega)$  und integrieren partiell. Wir erhalten

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x) u v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (2.8)$$

Nun sehen wir uns die Randbedingung (2.7) an und setzen voraus, dass  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  sei. Folgender Fortsetzungssatz garantiert, dass eine Fortsetzung  $g_1 \in H^1(\Omega)$  von  $g$  in das Gebiet  $\Omega$  existiert.

SATZ 2.13 (Fortsetzungssatz). (vgl.[26, Seite 133])

Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-stetiges Gebiet. Es existiert ein linearer, stetiger Fortsetzungsoperator

$$\Gamma : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \mapsto H^1(\Omega)$$

mit der Eigenschaft

$$\gamma \circ \Gamma g = g \quad \forall g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Hier ist  $\gamma$  der Spuroperator

$$\begin{aligned}\gamma : \quad H^1(\Omega) &\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \\ u &\mapsto u|_{\partial\Omega}.\end{aligned}$$

Wir stellen  $u$  in der Form  $u = w + g_1$  dar und setzen diesen Ausdruck für  $u$  in (2.8) ein. Wir erhalten

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x) w v dx = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Omega} \nabla g_1 \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} c(x) g_1 v dx =: \langle F, v \rangle. \quad (2.9)$$

Hierbei ist  $F \in V' = H^{-1}(\Omega)$ , und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichnet die duale Paarung zwischen  $V$  und  $V'$ .

Da  $w = u - g_1 \in H_0^1(\Omega)$  ist, sind wir nun in der Lage, eine **schwache Formulierung** für das Randwertproblem (2.6), (2.7) anzugeben:

Sei  $V = H_0^1(\Omega)$ . Für  $F \in V'$  finde ein  $w \in V$ , so dass gilt

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x) w v dx = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (2.10)$$

Jetzt können wir den folgenden Satz formulieren und beweisen:

SATZ 2.14. Falls  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ,  $f \in V'$ ,  $c \in L^\infty(\Omega)$  und  $c(x) \geq c_0 > 0$ , dann besitzt das Dirichletproblem (2.6), (2.7) genau eine schwache Lösung  $u \in H^1(\Omega)$ .

BEWEIS. Wir zeigen, dass die Bilinearform, die auf der linken Seite von (2.10) auftritt, den Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram genügt. Die Bilinearform  $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  lautet:

$$a(w, v) := \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x) w v dx \quad \forall w, v \in H_0^1(\Omega).$$

Es gilt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und da  $|c(x)| \leq d$  f.ü.,

$$\begin{aligned} |a(w, v)| &\leq \int_{\Omega} |\nabla w \cdot \nabla v| dx + \int_{\Omega} |c(x) w v| dx \quad (\text{Dreiecks - Ungleichung}) \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |\nabla w \cdot \nabla w| dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\nabla v \cdot \nabla v| dx \right)^{\frac{1}{2}} + d \left( \int_{\Omega} |w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \max\{1, d\} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall w, v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Andererseits haben wir auf Grund der Voraussetzung  $c(x) \geq c_0 > 0$

$$\begin{aligned} a(w, w) &= \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w dx + \int_{\Omega} c(x) w^2 dx \\ &\geq \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w dx + c_0 \int_{\Omega} w^2 dx \\ &\geq \min\{1, c_0\} \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

d.h.,  $a(w, v)$  ist eine Bilinearform auf  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ , die beschränkt und V-elliptisch ist. Nach dem Satz von Lax-Milgram, gibt es genau ein  $w \in H_0^1(\Omega)$ , so dass

$$a(w, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \text{gilt.}$$

Die Behauptung folgt nun für  $u = w + g_1$ . □

## VORTRAG 3

# Lineare Elastizität

EUGEN REMPEL

Während wir in den ersten beiden Vorträgen das mathematische Rüstzeug kennengelernt haben, sehen wir uns in diesem Abschnitt ein Problem an, welches wir mit Hilfe dieses Apparats behandeln werden. Es handelt sich dabei um das Problem der linearen Elastizität.

### 1. Physikalische Motivierung

Aus Erfahrung wissen wir, dass ein Körper unter Einwirkung äußerer Kräfte deformiert wird. Um diese Tatsache mathematisch erfassen zu können, führen wir folgende Begriffe ein:

DEFINITION 3.1. Als **Referenzkonfiguration** wird ein Gebiet  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  bezeichnet, welches offen, beschränkt, zusammenhängend mit stückweise glattem Rand  $\partial\Omega$  ist, wobei  $\text{int}(\bar{\Omega}) = \Omega$  ist.

DEFINITION 3.2. Als **Deformation** der Referenzkonfiguration wird eine Abbildung  $\varphi$  bezeichnet, für welche gilt:

- $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ ,
- $\varphi$  bildet  $\bar{\Omega}$  auf  $\varphi(\bar{\Omega})$  bijektiv ab,
- $\det \nabla_x \varphi > 0$ .

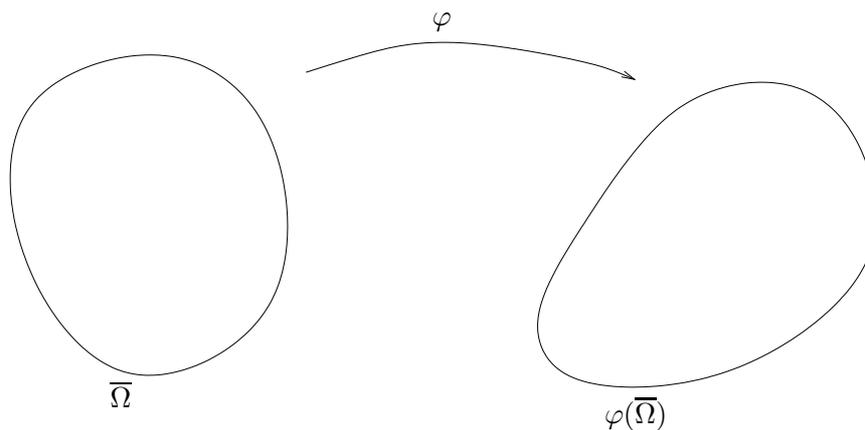


ABBILDUNG 1. Die Referenzkonfiguration  $\bar{\Omega}$  und der deformierte Körper  $\varphi(\bar{\Omega})$

DEFINITION 3.3. Als **Verschiebungsfeld**  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  wird die Abbildung bezeichnet, die durch die Relation

$$\varphi = id + u$$

definiert ist.

Anhand des Verhaltens, welches ein Körper offenbart, wenn er äußeren Kräften ausgesetzt ist, unterscheidet man folgende Deformationen:

- (1) Eine Deformation ist **elastisch**, falls sie rückgängig und zeitunabhängig ist.
- (2) Eine rückgängige, aber zeitabhängige Deformation bezeichnet man als **viskoelastisch**.
- (3) Eine Deformation ist **plastisch**, falls sie irreversibel oder permanent ist.

Für die Untersuchung der elastischen Deformationen sind die Begriffe Spannung bzw. Verzerrung von großer Bedeutung. Wir führen sie an einem eindimensionalen Beispiel ein.

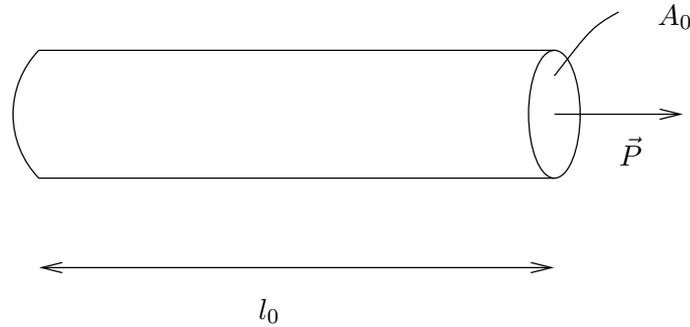


ABBILDUNG 2. Metalldraht unter axialer Zugsbelastung

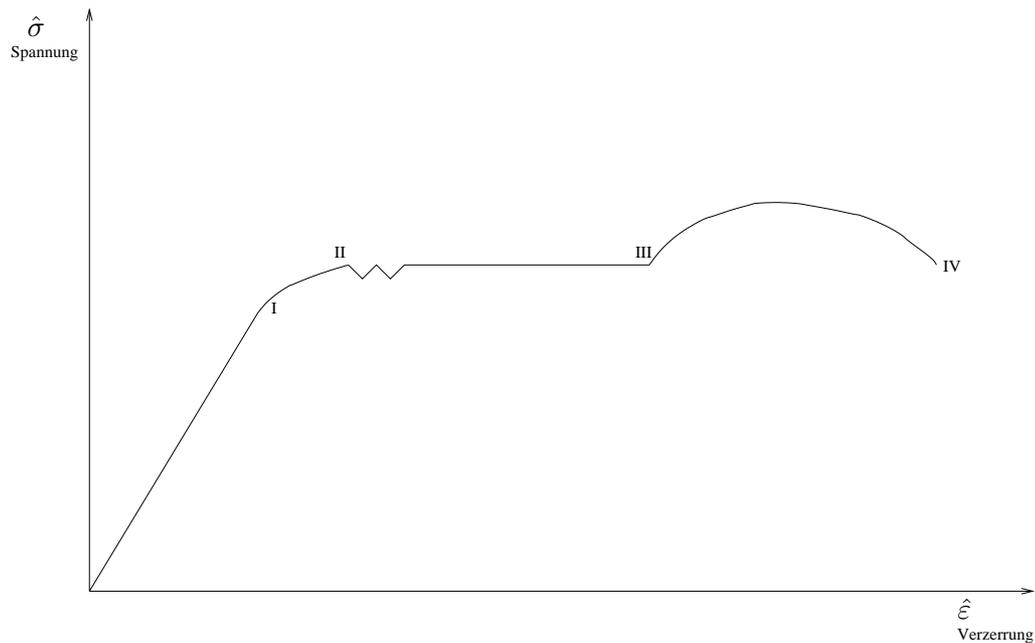
Wir betrachten einen Metalldraht unter axialer Zugsbelastung  $\vec{P} > 0$ , siehe Abbildung 2. Die ursprüngliche Länge des Drahtes ist  $l_0$ , die Länge des deformierten Drahtstückes ist  $l$ , die Fläche des Querschnittes ist  $A_0$ . Wir verstehen unter den Begriffen **Nominalspannung** bzw. **Nominalverzerrung** die Ausdrücke

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{A_0} \|\vec{P}\|, \quad \hat{\varepsilon} = \frac{l - l_0}{l_0}.$$

Die Relation  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\hat{\varepsilon})$  hängt von den Materialeigenschaften bzw. von der Kraft  $\vec{P}$  ab. Für die Druckbelastung  $\vec{P}$  ist die Nominalspannung  $\hat{\sigma}$  negativ.

Falls wir die Zugsbelastung langsam erhöhen, erhöht sich die Spannung und  $l$  nimmt zu. Abbildung 3 veranschaulicht einen typischen Verlauf der  $\hat{\sigma} - \hat{\varepsilon}$ -Kurve.

- (1) Im Bereich 0-I ist die Relation zwischen Spannung und Verzerrung linear,  $\hat{\sigma} = E\hat{\varepsilon}$ . Dies wird als Hookesches Gesetz bezeichnet. Die Konstante  $E$  nennt man Elastizitätsmodul.
- (2) Jenseits des Punktes I ist die Abhängigkeit zwischen  $\hat{\sigma}$  und  $\hat{\varepsilon}$  nicht mehr linear, aber die Deformation bleibt elastisch, d.h. nach dem Entfernen der Zugsbelastung kehrt der Körper in den ursprünglichen Zustand zurück. Die Relation  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\hat{\varepsilon})$  bezeichnet man als nichtlineares Hookesches Gesetz.
- (3) Der Bereich II-III zeichnet sich durch eine erhöhte Verzerrungsrate ohne essentiellen Zuwachs der Spannung aus. Er stellt ein plastisches Verhalten dar.

ABBILDUNG 3. Die  $\hat{\sigma} - \hat{\varepsilon}$ -Kurve

- (4) Falls im Punkt III die Spannung weiterhin erhöht wird, setzt eine Materialverhärtung ein, bis die maximale Spannung im Punkt IV erreicht wird. Jenseits des Punktes IV wird das Verhalten insgesamt instabil (der Draht reißt).

BEMERKUNG 3.4. Nominalspannung bzw. -verzerrung sind durch die ursprüngliche Maße definiert. Tatsächliche Spannung bzw. Verzerrung sind als

$$\sigma = \frac{1}{A} \|\vec{P}\|, \quad \varepsilon = \ln \frac{l}{l_0}$$

definiert, wobei  $A$  der deformierte Querschnitt ist.

Für den ausführlicheren Einstieg in die Elastizitätstheorie möchte ich auf [21, S. 77-97] und [8] verweisen.

## 2. Stark und schwach formuliertes Randwertproblem

**2.1. Starke Formulierung.** Wir betrachten jetzt dreidimensionale elastische Körper. Um bei gegebenen Volumen- bzw. Oberflächenkräften  $f$  und  $g$  Relationen zur Bestimmung des Verschiebungsfeldes  $u$  herzuleiten, werden sowohl kinematische Aspekte, als auch Gleichgewichtsbeziehungen und Materialgleichungen herangezogen. Dazu führen wir einen neuen Begriff ein.

DEFINITION 3.5. Der symmetrische Tensor

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla_x u + (\nabla_x u)^T) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

heißt **linearisierter Verzerrungstensor**.

Die Relation zwischen Verzerrungstensor  $\varepsilon$  und Spannungstensor  $\sigma$  wird als Hooke'sches Gesetz bezeichnet

$$\sigma(\varepsilon) = \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon,$$

wobei  $\lambda, \mu$  die sogenannten Lamé-Konstanten sind, welche vom homogenen, isotropen Material abhängen und experimentell bestimmt werden. Mit diesen Bezeichnungen lautet das stark formulierte Randwertproblem zur Bestimmung von  $u$ :

$$-\operatorname{div} \sigma(u) = f \quad \text{in } \Omega, \quad (3.1)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_0, \quad (3.2)$$

$$\sigma(u)n = g \quad \text{auf } \Gamma_1, \quad (3.3)$$

wobei  $n$  der äußere Normalenvektor ist und  $\partial\Omega = \overline{\cup_{i=0,1}\Gamma_i}, \cap_{i=0,1}\Gamma_i = \emptyset$  gilt.

LEMMA 3.6. *Das Randwertproblem (3.1),(3.2),(3.3) ist äquivalent zu:  
Finde ein Verschiebungsfeld  $u$ , so dass gilt*

$$-(\mu\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla_x(\operatorname{div} u)) = f \quad \text{in } \Omega, \quad (3.4)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_0, \quad (3.5)$$

$$\sigma n = g \quad \text{auf } \Gamma_1. \quad (3.6)$$

BEWEIS. Es gilt für  $u = (u_1, u_2, u_3)^T$

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(u) &= -\operatorname{div} \begin{pmatrix} \lambda \operatorname{div} u + 2\mu\partial_1 u_1 & \mu(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) & \mu(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) \\ \mu(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) & \lambda \operatorname{div} u + 2\mu\partial_2 u_2 & \mu(\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2) \\ \mu(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) & \mu(\partial_3 u_2 + \partial_2 u_3) & \lambda \operatorname{div} u + 2\mu\partial_3 u_3 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \partial_1(\lambda \operatorname{div} u + 2\mu\partial_1 u_1) + \partial_2\mu(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) + \partial_3\mu(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) \\ \partial_1\mu(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) + \partial_2(\lambda \operatorname{div} u + 2\mu\partial_2 u_2) + \partial_3\mu(\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2) \\ \partial_1\mu(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) + \partial_2\mu(\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2) + \partial_3(\lambda \operatorname{div} u + 2\mu\partial_3 u_3) \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \lambda\partial_1 \operatorname{div} u + 2\mu\partial_1^2 u_1 + \mu\partial_1\partial_2 u_2 + \mu\partial_2^2 u_1 + \mu\partial_1\partial_3 u_3 + \mu\partial_3^2 u_1 \\ \mu\partial_1^2 u_2 + \mu\partial_1\partial_2 u_1 + \lambda\partial_2 \operatorname{div} u + 2\mu\partial_2^2 u_2 + \mu\partial_2\partial_3 u_3 + \mu\partial_3^2 u_2 \\ \mu\partial_1^2 u_3 + \mu\partial_1\partial_3 u_1 + \mu\partial_2^2 u_3 + \mu\partial_2\partial_3 u_2 + \lambda\partial_3 \operatorname{div} u + 2\mu\partial_3^2 u_3 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \mu\Delta u_1 + \mu\partial_1 \operatorname{div} u + \lambda\partial_1 \operatorname{div} u \\ \mu\Delta u_2 + \mu\partial_2 \operatorname{div} u + \lambda\partial_2 \operatorname{div} u \\ \mu\Delta u_3 + \mu\partial_3 \operatorname{div} u + \lambda\partial_3 \operatorname{div} u \end{pmatrix} \\ &= -(\mu\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla_x(\operatorname{div} u)). \end{aligned}$$

□

DEFINITION 3.7. Der Differentialoperator

$$L := \begin{pmatrix} \mu\Delta + (\lambda + \mu)\partial_1^2 & (\lambda + \mu)\partial_1\partial_2 & (\lambda + \mu)\partial_1\partial_3 \\ (\lambda + \mu)\partial_2\partial_1 & \mu\Delta + (\lambda + \mu)\partial_2^2 & (\lambda + \mu)\partial_2\partial_3 \\ (\lambda + \mu)\partial_3\partial_1 & (\lambda + \mu)\partial_2\partial_3 & \mu\Delta + (\lambda + \mu)\partial_3^2 \end{pmatrix}$$

wird **Lamé-Operator** genannt.

BEMERKUNG 3.8. Somit läßt sich (3.1) als

$$-Lu = f \quad \text{in } \Omega \quad (3.7)$$

schreiben. (3.7) wird Lamé oder Lamé-Navier-System zur Bestimmung von  $u$  genannt.

Das Hooke'sche Gesetz in Tensorform lautet

$$\sigma = \tilde{M}\varepsilon,$$

wobei  $\tilde{M}$  ein Materialtensor 4. Stufe ist. Es ist häufig bequemer, die Verzerrungs- und Spannungstensoren als Vektoren zu schreiben:

$$\vec{\varepsilon} := (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13})^T, \quad \vec{\sigma} := (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13})^T.$$

Das Hooke'sche Gesetz lautet dann in Vektorschreibweise

$$\vec{\sigma} = M\vec{\varepsilon},$$

wobei  $M$  die Elastizitätsmatrix ist und für isotrope Materialien, d.h. für solche, für die es keine explizite Abhängigkeit von der Richtung gibt, folgendermaßen aussieht:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Weiterhin definieren wir die Matrizen

$$\tilde{D} := \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \end{pmatrix}, \quad N := \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \\ n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & n_1 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\tilde{D}u = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 \\ \partial_2 u_2 \\ \partial_3 u_3 \\ \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 \\ \partial_3 u_2 + \partial_2 u_3 \\ \partial_3 u_1 + \partial_1 u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{pmatrix} = \vec{\varepsilon}.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \tilde{D}^T \vec{\sigma} &= \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & \partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_2 & \partial_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} + \partial_3 \sigma_{13} \\ \partial_2 \sigma_{22} + \partial_1 \sigma_{12} + \partial_3 \sigma_{23} \\ \partial_3 \sigma_{33} + \partial_2 \sigma_{23} + \partial_1 \sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} + \partial_3 \sigma_{13} \\ \partial_1 \sigma_{21} + \partial_2 \sigma_{22} + \partial_3 \sigma_{23} \\ \partial_1 \sigma_{31} + \partial_2 \sigma_{32} + \partial_3 \sigma_{33} \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{div} \sigma = Lu. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$Lu = \tilde{D}^T \vec{\sigma} = \tilde{D}^T M \vec{\varepsilon} = \tilde{D}^T M \tilde{D}u. \quad (3.8)$$

Ferner gilt

$$N^T \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{12} + n_3 \sigma_{13} \\ n_2 \sigma_{22} + n_1 \sigma_{12} + n_3 \sigma_{23} \\ n_3 \sigma_{33} + n_2 \sigma_{23} + n_1 \sigma_{13} \end{pmatrix} = \sigma n.$$

D.h. es ist

$$\sigma n = N^T \vec{\sigma} = N^T M \tilde{D} u.$$

Das linearisierte Randwertproblem lautet dann

$$-Lu = -\tilde{D}^T M \tilde{D} u = f \quad \text{in } \Omega, \quad (3.9)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_0, \quad (3.10)$$

$$N^T M \tilde{D} u = g \quad \text{auf } \Gamma_1. \quad (3.11)$$

**2.2. Schwache Formulierung.** Für die schwache Formulierung des Randwertproblems wählen wir für den Raum der Testfunktionen den Abschluß des Funktionenraumes  $\{u \in \{C^\infty(\bar{\Omega})\}^3, u|_{\Gamma_0} = 0\}$  bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_V$  mit

$$\|u\|_V := \left( \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} (|u_i|^2 + \sum_{j=1}^3 |\partial_j u_i|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Diesen Raum bezeichnen wir mit  $V = H^1(\Omega, \Gamma_0)$ . Um die Variationsgleichung zu erhalten, multiplizieren wir (3.1) skalar mit einem  $v \in V$  und integrieren über  $\Omega$ . Wir erhalten zunächst

$$\int_{\Omega} f \cdot v dx = \int_{\Omega} -\operatorname{div} \sigma(u) \cdot v dx.$$

Mit folgender Gleichung, die sich leicht nachrechnen läßt (siehe auch [21, S. 33]),

$$\operatorname{div}(T^T v) = T : \nabla_x v + v \cdot \operatorname{div} T,$$

gilt dann

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\operatorname{div} \sigma(u) \cdot v dx &= \int_{\Omega} -\operatorname{div} \sigma(u) \cdot v - \sigma(u) : \nabla_x v + \sigma(u) : \nabla_x v dx \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\Omega} \sigma(u) : \nabla_x v dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(u)v) dx \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_{\Omega} \sigma(u) : \nabla_x v dx - \int_{\partial\Omega} \sigma(u)v \cdot n da \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\Omega} \sigma(u) : \nabla_x v dx - \int_{\partial\Omega} \sigma(u)n \cdot v da, \end{aligned}$$

wobei wir an der Stelle (1) den Satz von Gauß und an der Stelle (2) die Symmetrie der Matrix  $\sigma(u)$  angewendet haben. Ferner zerlegen wir  $\nabla_x v$  in seinen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil. Es gilt also

$$\begin{aligned} \nabla_x v &= \frac{1}{2}(\nabla_x v + (\nabla_x v)^T) + \frac{1}{2}(\nabla_x v - (\nabla_x v)^T) \\ &= \varepsilon(v) + \frac{1}{2}(\nabla_x v - (\nabla_x v)^T). \end{aligned}$$

Es ist bekannt (siehe [21, S. 11]), dass das Skalarprodukt einer symmetrischen Matrix mit einer antisymmetrischen gleich Null ist. Somit gilt

$$\begin{aligned}\sigma(u) : \nabla_x v &= \sigma(u) : \left( \varepsilon(v) + \frac{1}{2}(\nabla_x v - (\nabla_x v)^T) \right) \\ &= \sigma(u) : \varepsilon(v) + \sigma(u) : \left( \frac{1}{2}(\nabla_x v - (\nabla_x v)^T) \right) = \sigma(u) : \varepsilon(v).\end{aligned}$$

D.h. wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f \cdot v \, dx &= \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) \, dx - \int_{\partial\Omega} \sigma(u)n \cdot v \, da \\ &= \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) \, dx - \int_{\Gamma_0} \sigma(u)n \cdot v \, da - \int_{\Gamma_1} \sigma(u)n \cdot v \, da \\ &= \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) \, dx - \int_{\Gamma_1} g \cdot v \, da - \int_{\Gamma_0} \sigma(u)n \cdot 0 \, da \\ &= \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) \, dx - \int_{\Gamma_1} g \cdot v \, da.\end{aligned}$$

Insgesamt gilt mit der Definition

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) \, dx,$$

die Relation

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v \, da.$$

Für die Existenz dieser Integrale braucht man zum Beispiel, dass  $f \in L^2(\Omega)$  und  $g \in L^2(\Gamma_1)$  ist. Um dieses Problem auch in allgemeineren Räumen formulieren zu können, benutzen wir anstelle von  $\int_{\Omega} f \cdot v \, dx$  die duale Paarung  $\langle f, v \rangle_{\Omega}$  mit  $f$  aus dem Dualraum  $V'$  von  $V$  und  $v \in V$ . Analog verwenden wir die duale Paarung  $\langle g, v \rangle_{\Gamma_1}$  mit  $g \in [\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)]' = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  für  $\int_{\Gamma_1} g \cdot v \, da$ . Hierbei ist  $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) = \{u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \text{supp } u \in \overline{\Gamma_1}\}$ . Man kann sich überzeugen, dass  $\langle g, v \rangle_{\Gamma_1}$  für  $v \in V$  einen Sinn macht, denn es gilt nach dem Spursatz [8, S.279]: ist  $v \in H^1(\Omega, \Gamma_0)$ , so ist  $v|_{\Gamma_1} \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ . Sind  $f$  und  $g$  genügend glatt, so ist  $\langle f, v \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} f v \, dx$  und  $\langle g, v \rangle_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} g v \, da$ . Somit lautet das schwach formulierte Randwertproblem:

Für  $f$  aus  $V'$  und  $g$  aus  $[\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)]'$  finde ein  $u \in V$ , so dass für alle  $v \in V$  gilt:

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_{\Omega} + \langle g, v \rangle_{\Gamma_1}. \quad (3.12)$$

Im Folgenden geben wir verschiedene Darstellungen der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  an. Es gilt

$$\begin{aligned}\sigma(u) : \varepsilon(v) &= (\lambda \operatorname{tr} \varepsilon(u) I + 2\mu \varepsilon(u)) : \varepsilon(v) \\ &= \lambda \operatorname{tr} \varepsilon(u) I : \varepsilon(v) + 2\mu \varepsilon(u) : \varepsilon(v) \\ &= \lambda \operatorname{tr} \varepsilon(u) \operatorname{tr} \varepsilon(v) + 2\mu \varepsilon(u) : \varepsilon(v) \\ &= \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v + 2\mu \varepsilon(u) : \varepsilon(v),\end{aligned}$$

d.h.  $a(\cdot, \cdot)$  ist symmetrisch. Mit

$$M \tilde{D}u \cdot \tilde{D}v = \vec{\sigma}(u) \cdot \vec{\varepsilon}(v) = \sigma(u) : \varepsilon(v)$$

gilt dann insgesamt:

$$\begin{aligned}
a(u, v) &= \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) \, dx \\
&= \int_{\Omega} \lambda \operatorname{tr} \varepsilon(u) \operatorname{tr} \varepsilon(v) + 2\mu \varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, dx \\
&= \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div} u \operatorname{div} v \, dx + 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon(u) : \varepsilon(v) \, dx \\
&= \int_{\Omega} M \tilde{D}u \cdot \tilde{D}v \, dx.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Ist die Lösung  $u$  des schwach formulierten Randwertproblems genügend glatt, so folgt aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, dass  $u$  klassische Lösung des RWP (3.9), (3.10), (3.11) ist. Die Regularität der schwachen Lösung wird beeinflusst von der Glattheit des Randes  $\partial\Omega$  und der Kraftdichten  $f$  und  $g$ . So gilt im zweidimensionalen Fall [16]:

**SATZ 3.9.** *Seien  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  und  $u$  die Lösung des schwach formulierten Randwertproblems (3.12). Dann gilt:*

- (1)  $u \in H^2(\Omega)$ , falls reine Dirichlet oder Neumann Randbedingungen vorliegen und  $\partial\Omega$  glatt ist,
- (2)  $u \in H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega)$ , falls gemischten Randbedingungen vorliegen und  $\partial\Omega$  glatt ist,
- (3)  $u \in H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega)$ , falls reine Dirichlet oder Neumann Randbedingungen vorliegen und  $\partial\Omega$  polygonal ist,
- (4)  $u \in H^{\frac{5}{4}-\varepsilon}(\Omega)$ , falls gemischte Randbedingungen vorliegen und  $\partial\Omega$  polygonal ist.

### 3. Lösbarkeit des schwach formulierten Randwertproblems

In diesem Kapitel formulieren wir einen Lösbarkeitssatz zum schwach formulierten Randwertproblem und beweisen ihn. Dazu brauchen wir die sogenannte Kornsche Ungleichung, die wir jetzt für verschwindende Dirichletdaten beweisen.

**SATZ 3.10** (Kornsche Ungleichung in  $H_0^1(\Omega)$ ).  
*Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein Lipschitzgebiet,  $u \in (H_0^1(\Omega))^3$ . Dann gilt:*

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx \geq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} (\partial_j u_i)^2 \, dx. \tag{3.14}$$

**BEWEIS.** Wir betrachten zunächst  $u \in (C_0^\infty(\Omega))^3$ . Es gilt für  $1 \leq i, j \leq 3$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \partial_j u_i \partial_i u_j \, dx &\stackrel{(1)}{=} - \int_{\Omega} (\partial_i \partial_j u_i) u_j \, dx + \int_{\partial\Omega} \partial_j u_i u_j n_i \, da_x \\
&= - \int_{\Omega} (\partial_i \partial_j u_i) u_j \, dx \stackrel{(2)}{=} - \int_{\Omega} (\partial_j \partial_i u_i) u_j \, dx \\
&= - \int_{\Omega} (\partial_j \partial_i u_i) u_j \, dx + \int_{\partial\Omega} \partial_i u_i u_j n_j \, da_x \\
&\stackrel{(1)}{=} \int_{\Omega} \partial_j u_j \partial_i u_i \, dx,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

wobei wir an der Stelle (1) den Satz von Gauß und an der Stelle (2) die Schwarzsche Vertauschungsregel verwendet haben. Somit folgt mit dieser Vorüberlegung

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{i,j}^2(u) \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{4} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2 \, dx \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2 \, dx \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} ((\partial_i u_j)^2 + 2\partial_i u_j \partial_j u_i + (\partial_j u_i)^2) \, dx \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} (\partial_i u_j)^2 \, dx + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} (\partial_j u_i)^2 \, dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \partial_i u_j \partial_j u_i \, dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} (\partial_i u_j)^2 \, dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \partial_i u_j \partial_j u_i \, dx \\
&\stackrel{(3.15)}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} (\partial_i u_j)^2 \, dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \partial_i u_i \partial_j u_j \, dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} (\partial_i u_j)^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^3 \partial_i u_i \right) \left( \sum_{j=1}^3 \partial_j u_j \right) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} (\partial_i u_j)^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^3 \partial_i u_i \right)^2 \, dx \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} (\partial_i u_j)^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Dichtheit von  $C_0^\infty(\Omega)$  in  $H_0^1(\Omega)$  folgt die Behauptung.  $\square$

Ferner brauchen wir für den Beweis des Lösbarkeitssatzes folgende Erkenntnisse aus der Funktionalanalysis bzw. Vektoranalysis:

- (1) Einbettungssatz von Rellich-Kondraschov (siehe [1, S.144]): Für ein Lipschitz-Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist die Einbettung  $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  kompakt, d.h. jede beschränkte Folge in  $H^1(\Omega)$  hat eine in  $L^2(\Omega)$  konvergente Teilfolge.
- (2) Kornsche Ungleichung in  $H^1(\Omega)$  (siehe [7]): Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  eine Referenzkonfiguration. Dann gibt es eine Konstante  $c > 0$  so, dass für alle  $u \in (H^1(\Omega))^3$  gilt

$$\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (3.16)$$

- (3)  $V \cap \ker \varepsilon = \{0\}$ .

Wir formulieren und beweisen jetzt folgenden Satz:

**SATZ 3.11.** *Das schwach formulierte Randwertproblem (3.12) besitzt eine eindeutige Lösung  $u \in V$ , falls  $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$  und die Elastizitätsmatrix  $M$  positiv definit ist.*

BEWEIS. Wir beweisen die Behauptung, indem wir die Gültigkeit der Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram zeigen.

**1. Schritt:** Die Linearität von  $F$  folgt trivialerweise aus der Linearität des Integrals. Die Stetigkeit von  $F$  ergibt sich aus der Relation (wobei wir voraussetzen, dass die entsprechenden Normen endlich sind):

$$|F(v)| = |\langle f, v \rangle_\Omega + \langle g, v \rangle_{\Gamma_1}| \leq |\langle f, v \rangle_\Omega| + |\langle g, v \rangle_{\Gamma_1}|.$$

Mit der Definition der Dualnorm folgt nun

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leq \|f\|_{V'} \|v\|_V + \|g\|_{[\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)]'} \|v\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\ &\leq [\|f\|_{V'} + \tilde{c} \|g\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}] \|v\|_V, \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{c}$  die Stetigkeitskonstante des Spuoperators  $\text{tr} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  ist.

**2. Schritt:** Die Stetigkeit von  $a(\cdot, \cdot)$  ergibt sich aus folgender Ungleichung, wobei wir an dieser Stelle die Integraldarstellung von  $a(\cdot, \cdot)$  benutzen:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_\Omega M \tilde{D}u \cdot \tilde{D}v \, dx \right| = \left| \int_\Omega \sum_{i=1}^6 (M \tilde{D}u)_i (\tilde{D}v)_i \, dx \right| \\ &= \left| \int_\Omega \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^6 M_{ik} \tilde{D}u_k \tilde{D}v_i \, dx \right| \leq \sum_{i,k=1}^6 \left| \langle M_{ik} \tilde{D}u_k, \tilde{D}v_i \rangle_\Omega \right|. \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt nun

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \sum_{i,k=1}^6 \left\| M_{ik} \tilde{D}u_k \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \tilde{D}v_i \right\|_{L^2(\Omega)} = \sum_{i,k=1}^6 |M_{ik}| \left\| \tilde{D}u_k \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \tilde{D}v_i \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \max_{i,k=1}^6 |M_{ik}| \sum_{i,k=1}^6 \left\| (\tilde{\varepsilon}(u))_k \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| (\tilde{\varepsilon}(v))_i \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c \sum_{k=1}^6 \left\| (\tilde{\varepsilon}(u))_k \right\|_{L^2(\Omega)} \sum_{i=1}^6 \left\| (\tilde{\varepsilon}(v))_i \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c \sum_{i,j=1}^3 \left\| \partial_j u_i \right\|_{L^2(\Omega)} \sum_{i,j=1}^3 \left\| \partial_j v_i \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c \|u\|_V \|v\|_V. \end{aligned}$$

**3. Schritt:** Um die  $V$ -Elliptizität von  $a(\cdot, \cdot)$  zu zeigen, stellen wir zunächst fest, dass folgende Relation gilt:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_\Omega M \tilde{D}u \cdot \tilde{D}u \, dx \\ &= \int_\Omega M \tilde{\varepsilon}(u) \cdot \tilde{\varepsilon}(u) \, dx \\ &= \int_\Omega \tilde{\varepsilon}(u)^T M \tilde{\varepsilon}(u) \, dx. \end{aligned}$$

Da  $M$  symmetrisch und positiv definit ist, gilt

$$a(u, u) \geq \min\{\text{Eigenwerte von } M\} \int_{\Omega} \vec{\varepsilon}(u)^T \vec{\varepsilon}(u) \, dx.$$

Somit hätten wir die Behauptung bewiesen, wenn wir zeigen, dass  $\int_{\Omega} \vec{\varepsilon}(u)^T \vec{\varepsilon}(u) \, dx$  elliptisch in  $V$  ist. Im Falle eines reinen Dirichletproblems folgt aus der Ungleichung von Poincaré-Friedrichs, dass durch

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} := \left( \sum_{j,i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_j v_i(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

eine zu  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  äquivalente Norm auf  $H_0^1(\Omega)$  definiert wird. Die Kornsche Ungleichung in  $H_0^1(\Omega)$  liefert daher die  $(H_0^1(\Omega))^3$ -Elliptizität der Bilinearform  $\int_{\Omega} \vec{\varepsilon}(u)^T \vec{\varepsilon}(u) \, dx = \|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}^2$ . Hierdurch wird aber nur die Randbedingung  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$  erfasst. Wir wenden uns jetzt den gemischten Randbedingungen (3.2),(3.3) zu und zeigen durch einen Widerspruchsbeweis, dass

$$\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

gilt.

Für den Nachweis der Elliptizität nehmen wir an, dass die Bilinearform  $\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}^2$  nicht  $V$ -elliptisch sei. Dann gibt es zu jedem  $c > 0$  ein  $u \in V$  mit  $\|\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 < c \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$ . Es gibt also eine Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$  mit

$$\|u_n\|_{H^1(\Omega)} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varepsilon(u_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0.$$

Da die Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(H^1(\Omega))^3$  beschränkt ist und  $(H^1(\Omega))^3$  in  $(L^2(\Omega))^3$  kompakt eingebettet ist, gibt es eine in  $(L^2(\Omega))^3$  konvergente Teilfolge. Für diese Teilfolge  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = u \text{ in } (L^2(\Omega))^3, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varepsilon(u_{n_k})\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0.$$

Aus (3.16) folgt, dass durch

$$\|v\|_{\varepsilon} := \|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

eine zu  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  äquivalente Norm auf  $(H^1(\Omega))^3$  definiert wird. Da sowohl  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , als auch  $(\varepsilon(u_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folgen sind (bzgl. der  $L^2$ -Norm), ist  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge bzgl. der  $\|\cdot\|_{\varepsilon}$ -Norm. Somit ist  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge bzgl. der  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ -Norm, besitzt also einen Grenzwert in  $(H^1(\Omega))^3$ , den wir mit  $u$  bezeichnen. Da  $V$  abgeschlossen in  $(H^1(\Omega))^3$  ist, folgt  $u \in V$ . Ferner gilt aufgrund der Stetigkeit von  $\varepsilon$ , dass  $\varepsilon(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(u_{n_k}) = 0$  in der  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  Norm ist. Somit ist  $u \in V \cap \ker \varepsilon$ , d.h.  $u = 0$ . Dies steht im Widerspruch zu

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} \right\|_{H^1(\Omega)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{n_k}\|_{H^1(\Omega)} = 1.$$

Somit war unsere Annahme falsch. Daraus folgt die  $V$ -Elliptizität von  $a(\cdot, \cdot)$  und die Behauptung des Satzes 3.11.  $\square$

#### 4. Minimierungsproblem

Wenn wir über den physikalischen Hintergrund dieses Problems nachdenken, kommen wir zu einem anderen Ansatz. Es ist aus der Physik bekannt, dass ein beliebiges System bestrebt ist, seine Energie zu minimieren. D.h. wir können evtl. das Problem lösen, indem wir das Minimum des Funktionals bestimmen, welches der Energie entspricht. Dies motiviert den folgenden Satz.

SATZ 3.12. *Seien folgende Voraussetzungen erfüllt:*

- (1)  $X_0$  ist ein abgeschlossener linearer Teilraum des reellen Hilbert-Raumes  $X$ ;
- (2) Die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  ist symmetrisch, stetig und  $X_0$ -elliptisch;
- (3) Die Linearform  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und linear.

Ferner ist ein  $u_0 \in X$  gegeben. Dann hat das Problem:

Finde ein  $u \in u_0 + X_0$ , so dass

$$\frac{1}{2}a(u, u) - f(u) = \min\{\frac{1}{2}a(v, v) - f(v) \mid v \in u_0 + X_0\} \quad (3.17)$$

gilt, eine eindeutige Lösung.

Ferner ist dieses Minimierungsproblem zu dem folgenden Variationsproblem äquivalent:

Finde ein  $u \in u_0 + X_0$ , so dass gilt:

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in X_0. \quad (3.18)$$

BEMERKUNG 3.13. In dieser Formulierung spielt  $u_0$  die Rolle einer inhomogenen Dirichlet-Randbedingung.

BEWEIS. Wir beginnen mit einer Hilfsüberlegung: Seien  $x, y \in X$ , dann gilt die Parallelogramm-Identität:

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

**1. Schritt:** Wir zeigen, dass (3.17) und (3.18) äquivalent sind.

Wir definieren für  $u \in X$  ein sogenanntes Energiefunktional

$$F(u) := \frac{1}{2}a(u, u) - f(u),$$

ferner für festes  $u \in X$  und festes  $v \in X_0 \setminus \{0\}$

$$\phi(t) := F(u + tv), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \phi_v(t) &= F(u + tv) = \frac{1}{2}a(u + tv, u + tv) - f(u + tv) \\ &= \frac{1}{2}t^2a(v, v) + t(a(u, v) - f(v)) + \frac{1}{2}a(u, u) - f(u). \end{aligned}$$

Da  $a(v, v) > 0$  für alle  $v \in X \setminus \{0\}$  erfüllt ist, ist  $\{t, \phi_v(t)\} \subset \mathbb{R}^2$  eine nach oben geöffnete Parabel. Aufgrund von  $\phi_v(0) = F(u)$  ist

$$F(u) = \min\{F(w) \mid w \in u_0 + X_0\} \quad (3.19)$$

äquivalent zu

$$\phi_v(0) = \min\{\phi_v(t) \mid t \in \mathbb{R}, v \in X_0\}.$$

D.h. (3.19) hat genau eine Lösung, wenn  $\phi_v$  ein Minimum in  $t = 0$  hat, oder, wenn für alle  $v \in X_0$  gilt

$$\phi'_v(0) = 0 \Leftrightarrow a(u, v) - f(v) = 0.$$

**2. Schritt:** Wir zeigen die Eindeutigkeit.

Seien  $u$  und  $\hat{u}$  Lösungen von (3.17). Nach dem ersten Schritt gilt für alle  $v \in X_0$

$$\begin{aligned} a(u, v) &= f(v), \\ a(\hat{u}, v) &= f(v). \end{aligned}$$

Aus  $u \in u_0 + X_0, \hat{u} \in u_0 + X_0$  folgt, dass  $v := u - \hat{u} \in X_0$  ist. Somit gilt

$$\begin{aligned} a(u, u - \hat{u}) &= f(u - \hat{u}), \\ a(\hat{u}, u - \hat{u}) &= f(u - \hat{u}), \end{aligned}$$

woraus  $a(u - \hat{u}, u - \hat{u}) = 0$  folgt. Da  $a(\cdot, \cdot)$   $X_0$ -elliptisch ist, ist  $u = \hat{u}$ .

**3. Schritt:** Wir führen den Energieraum ein.

Wir definieren für  $u, v \in X_0$

$$\langle u, v \rangle_E = a(u, v), \quad \|u\|_E = \langle u, u \rangle_E^{\frac{1}{2}}.$$

Aufgrund der Stetigkeit bzw.  $X_0$ -Elliptizität von  $a(\cdot, \cdot)$  gilt:

$$c_0 \|u\|^2 \leq \|u\|_E^2 \leq c_1 \|u\|^2.$$

Definieren wir den Energieraum mit  $(X_0, \|\cdot\|_E)$ , so folgt aus der Tatsache, dass  $(X_0, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbert-Raum ist, dass  $(X_0, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$  wiederum ein Hilbert-Raum ist.

**4. Schritt:** Existenz der Lösung des Minimierungsproblems (3.17).

Definieren wir

$$\begin{aligned} G(w) &:= \frac{1}{2} \langle w, w \rangle_E - f_1(w) = \frac{1}{2} \|w\|_E^2 - f_1(w) \\ &:= \frac{1}{2} \|w\|_E^2 - f(w) + a(u_0, w) = \frac{1}{2} a(w, w) - f(w) + a(u_0, w) \\ &= \frac{1}{2} a(w + 2u_0, w) - f(w), \end{aligned}$$

so gilt für das feste  $u_0$  und  $w := u - u_0$ :

$$\begin{aligned} G(u - u_0) &= \frac{1}{2} a(u + u_0, u - u_0) - f(u - u_0) \\ &= \frac{1}{2} a(u, u) - f(u) - \left( \frac{1}{2} a(u_0, u_0) - f(u_0) \right) \\ &= F(u) - \left( \frac{1}{2} a(u_0, u_0) - f(u_0) \right). \end{aligned}$$

Somit ist (3.17) äquivalent zu: Finde ein  $w \in X_0$ , so dass gilt

$$G(w) = \min\{G(\tilde{w}) \mid \tilde{w} \in X_0\}. \quad (3.20)$$

Ferner gilt für  $f_1$ :

$$\begin{aligned} |f_1(w)| &= |f(w) - a(u_0, w)| \leq |f(w)| + |a(u_0, w)| \\ &\leq \|f\|_{X'} \|w\|_X + c_1 \|u_0\|_X \|w\|_X \leq \|w\|_X (\|f\|_{X'} + |c_1| \|u_0\|_X) \\ &\leq B \|w\|_E \end{aligned}$$

mit einer Konstanten  $B > 0$ .

Sei  $\tilde{w} = \inf\{G(w) \mid w \in X_0\}$ , dann gibt es eine Folge  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $G(w_n) \rightarrow \tilde{w}$  für  $n \rightarrow \infty$ . Für alle  $w \in X_0$  gilt mit  $f_1(w) \leq |f_1(w)|$

$$G(w) = \frac{1}{2}\|w\|_E^2 - f_1(w) \geq \frac{1}{2}\|w\|_E^2 - B\|w\|_E.$$

Dies bedeutet, dass  $G(w) \rightarrow \infty$  für  $\|w\|_E \rightarrow \infty$ , d.h.  $\tilde{w} > -\infty$ , da  $G$  stetig ist. Aus der Parallelogramm-Identität

$$\frac{1}{2}\|w_n\|_E^2 + \frac{1}{2}\|w_m\|_E^2 = \frac{1}{4}\|w_n - w_m\|_E^2 + \frac{1}{4}\|w_n + w_m\|_E^2$$

erhalten wir, indem wir auf beiden Seiten  $-f_1(w_n) - f_1(w_m)$  addieren,

$$\begin{aligned} G(w_n) + G(w_m) &= \frac{1}{4}\|w_n - w_m\|_E^2 + \frac{1}{4}\|w_n + w_m\|_E^2 - f_1(w_n + w_m) \\ &= \frac{1}{4}\|w_n - w_m\|_E^2 + \left\|\frac{1}{2}(w_n + w_m)\right\|_E^2 - 2f_1\left(\frac{1}{2}(w_n + w_m)\right) \\ &= \frac{1}{4}\|w_n - w_m\|_E^2 + 2G\left(\frac{1}{2}(w_n + w_m)\right) \geq \frac{1}{4}\|w_n - w_m\|_E^2 + 2\tilde{w}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$0 \leq \frac{1}{4}\|w_n - w_m\|_E^2 \leq G(w_n) + G(w_m) - 2\tilde{w} \rightarrow 0 \text{ für } n, m \rightarrow \infty.$$

D.h.  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge in  $(X_0, \|\cdot\|_E)$ . Somit existiert ein Grenzwert  $w_0 \in X_0$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $G$  gilt

$$G(w_0) = G\left(\lim_{n \rightarrow \infty} w_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(w_n) = \tilde{w},$$

und  $w_0$  ist die Lösung von (3.20). □

# Einführung in die Theorie der monotonen Operatoren

MARKUS DAUB

In diesem Beitrag führen wir nun nichtlineare monotone Operatoren ein. Hierzu sind zunächst einige wichtige Definitionen notwendig, denen der erste Abschnitt gewidmet ist. Anschließend werden Zusammenhänge zwischen diesen Definitionen in einem Satz aufgestellt und bewiesen. An diesem Satz können wir dann erkennen, welche Monotonie die stärkste ist. Im letzten Kapitel befassen wir uns mit Beispielen monotoner Operatoren. Insbesondere wird der  $p$ -Laplace-Operator betrachtet, der eine Verallgemeinerung des Laplace-Operators  $\Delta u$  darstellt. Diesem Vortrag haben die Werke [28],[22],[20] und [18] als Quellen gedient.

## 1. Grundlegende Definitionen für nichtlineare Operatoren

Im Folgenden sei  $A$  ein nichtlinearer Operator, der den Banachraum  $V$  in den Dualraum  $V'$  abbildet. Die duale Paarung  $\langle Au, u \rangle$  ist dabei folgendermaßen zu verstehen:  $A$  bildet  $u \in V$  in den Dualraum ab, und  $Au \in V'$  ist ein lineares Funktional, welches wiederum auf ein Element  $u \in V$  angewendet wird.

DEFINITION 4.1.  $A$  ist *monoton* genau dann, wenn

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0 \text{ für alle } u, v \in V.$$

DEFINITION 4.2.  $A$  ist *streng monoton* genau dann, wenn

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0 \text{ für alle } u, v \in V, u \neq v.$$

DEFINITION 4.3.  $A$  ist *gleichmäßig monoton* genau dann, wenn

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq b(\|u - v\|)\|u - v\|.$$

Dabei sei  $b$  eine streng monoton wachsende, stetige Funktion, die zusätzlich folgende Eigenschaften erfüllt:

$$b : (0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

$$b(0) = 0 \text{ und } b(t) \rightarrow \infty \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

DEFINITION 4.4.  $A$  ist *stark monoton* genau dann, wenn ein  $c > 0$  existiert, so dass

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq c\|u - v\|^2 \text{ für alle } u, v \in V.$$

DEFINITION 4.5.  $A$  ist *koerzitiv* genau dann, wenn

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} \rightarrow \infty \text{ für } \|u\| \rightarrow \infty.$$

## 2. Satz über Monotonie

Wir überlegen, wie die verschiedenen Monotoniebegriffe zusammenhängen.

SATZ 4.6.

1<sup>0</sup> Aus der starken Monotonie folgt die gleichmäßige Monotonie.

2<sup>0</sup> Aus der gleichmäßigen Monotonie folgt die strenge Monotonie.

3<sup>0</sup> Aus der strengen Monotonie folgt die Monotonie.

4<sup>0</sup> Aus der gleichmäßigen Monotonie folgt die Koerzitivität.

**Kurz:**

Stark monoton  $\Rightarrow$  gleichmäßig monoton  $\Rightarrow$  streng monoton  $\Rightarrow$  monoton.

Gleichmäßig monoton  $\Rightarrow$  koerzitiv.

BEWEIS.

**Zu 1<sup>0</sup>:** Da  $A$  stark monoton ist, existiert ein  $c > 0$ , so dass  $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq c\|u - v\|^2$ . Wir definieren eine Funktion  $b$  als  $b(\|u - v\|) = c\|u - v\|$  und überprüfen die Bedingungen an  $b$ , unter welchen der Operator  $A$  gleichmäßig monoton ist:  $b$  ist streng monoton wachsend, da  $b'(\|u - v\|) = c > 0$ . Außerdem ist  $b$  stetig, da  $b$  mit einer linearen Funktion identifiziert werden kann: Mit der Substitution  $t = \|u - v\|$  folgt  $b(t) = ct$ . Das Argument der Funktion  $b$  ist stets größer gleich Null, also gilt:  $b : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Die beiden Bedingungen

$$b(0) = 0 \text{ und } b(t) \rightarrow \infty \text{ für } t \rightarrow \infty$$

sind trivialerweise erfüllt.

**Zu 2<sup>0</sup>:** Sei  $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq b(\|u - v\|)\|u - v\|$  für alle  $u, v \in V$ . Da  $b$  streng monoton wachsend ist und  $b$ , an der Stelle Null ausgewertet, Null ist, folgt, dass  $b$  strikt größer Null ist für  $u \neq v$ , also:

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq b(\|u - v\|)\|u - v\| > 0 \forall u, v \in V, u \neq v.$$

**Zu 3<sup>0</sup>:** Diese Implikation ist trivial:

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0 \forall u, v \in V, u \neq v \Rightarrow \langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0 \forall u, v \in V.$$

**Zu 4<sup>0</sup>:** Es ist

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle &= \langle Au - A(0) + A(0), u - 0 \rangle \\ &= \langle Au - A(0), u - 0 \rangle + \langle A(0), u - 0 \rangle \\ &\geq b(\|u\|)\|u\| + \langle A(0), u \rangle \\ &\geq b(\|u\|)\|u\| - \|A(0)\|\|u\|. \end{aligned}$$

Da  $|\langle A(0), u \rangle| \leq \|A(0)\|\|u\|$  ist, folgt aus  $\langle A(0), u \rangle \geq 0$ , dass  $\langle A(0), u \rangle \geq -\|A(0)\|\|u\|$  ist. Andererseits gilt: Ist  $\langle A(0), u \rangle < 0$ , dann ist  $\langle A(0), u \rangle = -|\langle A(0), u \rangle| \geq -\|A(0)\|\|u\|$ . Somit bekommen wir insgesamt die Abschätzung:

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} \geq b(\|u\|) - \|A(0)\| \text{ für } u \neq 0$$

und mit der Bedingung  $b(\|u\|) \rightarrow \infty$  für  $\|u\| \rightarrow \infty$  folgt die Koerzitivität.  $\square$

Also ist die starke Monotonie die stärkste Eigenschaft.

### 3. Beispiele für monotone Operatoren

**Beispiel I.** Sei  $A$  der in (4.1) beschriebene nichtlineare Operator, der den Banachraum  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  abbildet und sei  $1 < p < \infty$  (siehe auch Abbildung 1):

$$A(u) := \begin{cases} |u|^{p-2} u & \text{für } u \neq 0 \\ 0 & \text{für } u = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

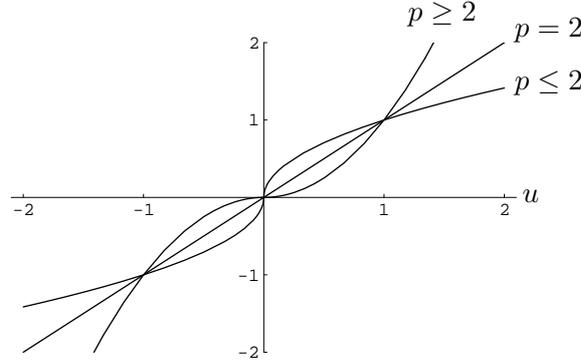


ABBILDUNG 1. Funktion (4.1)

Im Folgenden wollen wir den in (4.1) definierten Operator  $A$  auf Monotonie untersuchen, und dabei betrachten wir verschiedene Werte von  $p$ .

Als erstes betrachten wir den Fall  $p = 2$ . Wir erhalten:

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = (|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v)(u - v) = (u - v)^2 \geq c|u - v|^2$$

mit  $c = 1$ .

Also ist für  $p = 2$  der Operator  $A$  stark monoton. Bei der weiteren Untersuchung müssen wir für die Werte von  $u$  und  $v$  zwei Fälle unterscheiden:

**1.Fall:** Es sei  $0 \leq v \leq u$ .

Wir betrachten ein  $p > 2$ : Dann gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} u^{p-1} - v^{p-1} &= [(t+v)^{p-1}]_0^{u-v} = \int_0^{u-v} (p-1)(t+v)^{p-2} dt \\ &\geq \int_0^{u-v} (p-1)t^{p-2} dt = [t^{p-1}]_0^{u-v} = |u - v|^{p-1}. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = (u^{p-1} - v^{p-1})(u - v) \geq |u - v|^{p-1} |u - v|.$$

Somit haben wir eine Funktion  $b(|u - v|) = |u - v|^{p-1}$  gefunden, welche die Voraussetzungen der gleichmäßigen Monotonie erfüllt. Also erhalten wir für  $p > 2$  und  $0 \leq v \leq u$  gleichmäßige Monotonie.

Für  $p > 1$  gilt:  $(u^{p-1} - v^{p-1})(u - v) > 0$ . In diesem Fall ist der Operator  $A$  also streng monoton.

**2.Fall:** Für den Fall  $v \leq 0 \leq u$  brauchen wir folgende Ungleichung für  $a_i \geq 0$ , [15]:

$$\sum_{i=1}^n (a_i)^\alpha \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^\alpha \leq n^{\alpha-1} \sum_{i=1}^n (a_i)^\alpha, \text{ falls } \alpha \geq 1 \text{ ist.} \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i)^\alpha \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^\alpha \geq n^{\alpha-1} \sum_{i=1}^n (a_i)^\alpha, \text{ falls } 0 < \alpha < 1 \text{ ist.} \quad (4.3)$$

Es sei  $v \leq 0 \leq u$  und  $p > 2$ : Wir erhalten

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= (u^{p-1} - |v|^{p-2}v)(u - v) = (u^{p-1} + |v|^{p-1})(u - v) \\ &\stackrel{(4.2)}{\geq} (c(u + |v|)^{p-1}) |u - v| = c |u - v|^{p-1} |u - v|. \end{aligned}$$

Also ist  $A$  gleichmäßig monoton, wobei sich die Funktion  $b$  ergibt als  $b(|u - v|) = c |u - v|^{p-1}$ . Für  $v \leq 0 \leq u$  und  $p > 1$  ergibt sich wie oben

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = (u^{p-2}u - |v|^{p-2}v)(u - v) = (u^{p-1} + |v|^{p-1})(u + |v|) > 0.$$

Folglich ist der Operator streng monoton für  $p > 1$  und für  $v \leq 0 \leq u$ . Zusammen mit dem Ergebnis im ersten Fall für  $p > 1$  folgt, dass die strenge Monotonie für alle  $u$  und  $v$  gilt.

**Beispiel II.** Nun definieren wir einen stückweise linearen Operator  $A$ , der  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  abbildet und folgendermaßen definiert ist (siehe Abbildung 2):

$$A(u) := \begin{cases} u + 1 & \text{für } u \leq 0, \\ 1 - u & \text{für } u \geq 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $u \geq v$ . Bilden wir die Differenz  $Au - Av$ , so ergibt

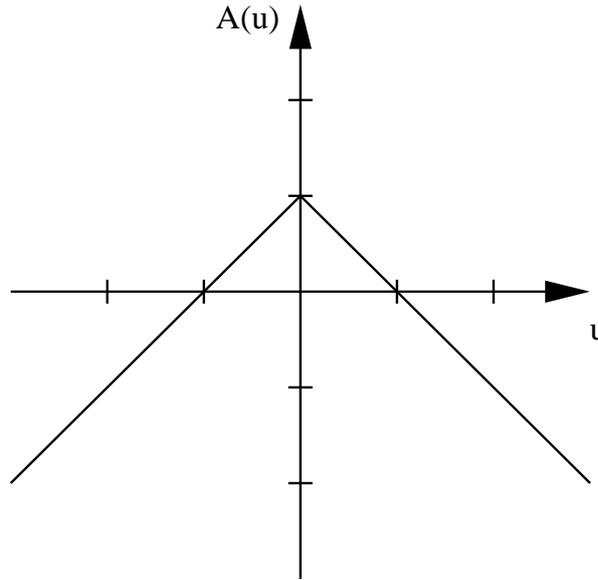


ABBILDUNG 2. Der Graph von  $A$ , definiert in (4.4).

sich:

$$\begin{aligned} Au - Av &= \begin{cases} (u + 1) - (v + 1) & \text{für } u, v \leq 0 \\ (1 - u) - (1 - v) & \text{für } u, v \geq 0 \\ (-u + 1) - (v + 1) & \text{für } v \leq 0 \leq u \end{cases} \\ &= \begin{cases} u - v & \text{für } u, v \leq 0 \\ v - u & \text{für } u, v \geq 0 \\ -(u + v) & \text{für } v \leq 0 \leq u. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Im Folgenden benötigen wir wieder eine Fallunterscheidung für  $u$  und  $v$ , wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $u \geq v$  annehmen.

Seien zunächst  $u$  und  $v$  jeweils als negativ vorausgesetzt. Dann ergibt sich die duale Paarung  $\langle Au - Av, u - v \rangle = (u - v)(u - v) = |u - v|^2$ . Für  $u, v \leq 0$  ist der Operator  $A$  stark monoton. Im zweiten Fall seien  $u, v$  beide positive reelle Zahlen. Wir erhalten nun  $\langle Au - Av, u - v \rangle = (v - u)(u - v) = -(u - v)(u - v) = -|u - v|^2 < 0$ . Also ist der Operator  $A$  nicht monoton für  $u, v > 0$ .

Der Vollständigkeit halber betrachten wir noch den Fall, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $v \leq 0 \leq u$ . Wir erhalten  $\langle Au - Av, u - v \rangle = -(u + v)(u - v) = -(u^2 - v^2) = v^2 - u^2$ . Dieses Ergebnis führt auf eine weitere Fallunterscheidung:

Ist  $|u| = |v|$ , so ist  $\langle Au - Av, u - v \rangle = v^2 - u^2 = 0$  und somit  $A$  monoton.

Für den Fall  $|u| > |v|$  erhalten wir  $\langle Au - Av, u - v \rangle = v^2 - u^2 = |v|^2 - |u|^2 < 0$ . Somit ist der Operator  $A$  nicht monoton.

Abschließend untersuchen wir den Fall  $|v| > |u|$ , woraus  $\langle Au - Av, u - v \rangle = v^2 - u^2 > 0$  und daraus die strenge Monotonie des Operators  $A$  folgt. In Anbetracht dessen, dass der Operator  $A$  auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist, ist  $A$  nicht monoton.

### Beispiel III: Der $p$ -Laplace-Operator.

In diesem Abschnitt untersuchen wir eine quasilineare elliptische partielle Differentialgleichung, in der der  $p$ -Laplace Operator  $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$  auftritt:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + su &= f && \text{auf } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (4.6)$$

mit  $1 < p < \infty, s \geq 0$ . Hierbei sei  $\Omega$  beschränkt und der Rand  $\partial\Omega$  sei Lipschitz-stetig. Zunächst seien noch die Begriffe "partielle Differentialgleichung" und "quasilinear" erklärt:

DEFINITION 4.7. Es sei  $k \geq 1$  eine ganze Zahl. Eine Gleichung der Form

$$F(\nabla^k u(x), \nabla^{k-1} u(x), \dots, \nabla u(x), u(x), x) = 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (4.7)$$

wird partielle Differentialgleichung der Ordnung  $k$  genannt. Hierbei ist

$$\nabla^k u(x) := \{D^\alpha u(x), |\alpha| = k\}, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ ein Multiindex} \quad (4.8)$$

und  $\alpha_i \geq 0$  sind ganze Zahlen,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n} u(x). \quad (4.9)$$

Die Funktion

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist gegeben und

$$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist die Unbekannte.

DEFINITION 4.8. Die Gleichung (4.7) ist quasilinear, falls sie durch

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\nabla^{k-1} u, \dots, \nabla u, u, x) D^\alpha u + a_0(\nabla^{k-1} u, \dots, \nabla u, u, x) = 0 \quad (4.10)$$

beschrieben wird.

Die Quasilinearität der partiellen Differentialgleichung (4.6) ergibt sich aus folgender Überlegung:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + su &= -|\nabla u|^{p-2} \operatorname{div}(\nabla u) + \nabla(|\nabla u|^{p-2}) \cdot \nabla u + su \\ &= -|\nabla u|^{p-2} \Delta u + \nabla(|\nabla u|^{p-2}) \cdot \nabla u + su. \end{aligned}$$

Im ersten Term tritt der lineare Laplace-Operator  $\Delta u$  auf und der Vorfaktor  $-|\nabla u|^{p-2}$  hängt nur von partiellen Ableitungen erster Ordnung ab. Im zweiten Term treten die zweiten Ableitungen ebenfalls nur linear auf, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \nabla(|\nabla u|^{p-2}) &= \nabla((\partial_{x_1} u)^2 + \cdots + (\partial_{x_n} u)^2)^{\frac{p-2}{2}} \\ &= \frac{p-2}{2} ((\partial_{x_1} u)^2 + \cdots + (\partial_{x_n} u)^2)^{\frac{p-4}{2}} \nabla \left( \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} u)^2 \right), \end{aligned}$$

wobei in dem Faktor  $\nabla(\sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} u)^2)$  nach Anwendung der Kettenregel die zweiten Ableitungen nur linear auftauchen. Folglich ist die partielle Differentialgleichung (4.6) quasilinear. Im Folgenden leiten wir zu dem Randwertproblem (4.6) die schwache Formulierung her. Dazu multiplizieren wir die Gleichung (4.6) mit der Testfunktion  $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , und so ergibt sich mit der Umformung

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \phi = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \phi) + |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi$$

und nach Anwendung des Divergenzsatzes folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \phi dx &= \int_{\Omega} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \phi) + |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi dx \quad (4.11) \\ &= \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \phi \cdot n d\sigma + \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi dx, \end{aligned}$$

da  $\phi$  auf dem Rand  $\partial\Omega$  verschwindet. Folglich erhalten wir die **schwache Formulierung** zu dem Randwertproblem (4.6):

Finde ein  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , so dass

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi + su \phi) dx = \int_{\Omega} f \phi dx \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (4.12)$$

ist.

Für die folgenden Untersuchungen definieren wir den Operator  $A$  durch

$$\langle Au, \phi \rangle = \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi + su \phi) dx \quad (4.13)$$

und das Funktional  $b \in (W_0^{1,p}(\Omega))'$  durch

$$\langle b, \phi \rangle = \int_{\Omega} f \phi dx \quad (4.14)$$

mit  $f \in L^{p'}(\Omega)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Es gilt folgendes Lemma:

LEMMA 4.9. Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet des  $\mathbb{R}^n$  mit Lipschitz-stetigem Rand  $\partial\Omega$ . Ferner sei  $f \in L^{p'}(\Omega)$ ,  $p' = \frac{p}{p-1}$ ,  $p > 1$  und  $s \geq 0$ . Für  $p \geq \frac{2n}{n+2}$  bildet der Operator  $A$ , definiert in (4.13) den Raum  $X = W_0^{1,p}(\Omega)$  in seinen Dualraum ab, d.h.  $A : X \rightarrow X'$ , und das Funktional  $b$ , definiert in (4.14), gehört zu  $X'$ . Ferner ist die schwache Formulierung (4.12) äquivalent zur Operatorgleichung in  $X'$

$$Au = b.$$

BEWEIS. Beweis siehe [18, S. 60 - 61] □

Im folgenden Abschnitt werden wir den Operator  $A$  auf Monotonie und Koerzitivität untersuchen. Bei der Überprüfung auf Monotonie führen wir zunächst eine Funktion  $g$  ein, die folgendermaßen definiert ist:

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : \vec{\zeta} \rightarrow \left| \vec{\zeta} \right|^{p-2} \vec{\zeta} \quad (4.15)$$

LEMMA 4.10. Es gilt die Abschätzung für  $p > 1$ :

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial \zeta_j}(\vec{\zeta}) \eta_i \eta_j \geq \min(1, p-1) \left| \vec{\zeta} \right|^{p-2} |\vec{\eta}|^2 \quad \forall \vec{\eta} \in \mathbb{R}^n.$$

BEWEIS. Wir leiten die Komponenten der Funktion  $g$ , definiert in (4.15), nach den Komponenten von  $\vec{\zeta}$  ab

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_i}{\partial \zeta_j} &= \left| \vec{\zeta} \right|^{p-2} \delta_{ij} + (p-2) \left| \vec{\zeta} \right|^{p-3} 2\zeta_j \frac{1}{2 \left| \vec{\zeta} \right|} \zeta_i \\ &= \left| \vec{\zeta} \right|^{p-2} \delta_{ij} + (p-2) \left| \vec{\zeta} \right|^{p-4} \zeta_i \zeta_j. \end{aligned}$$

Sei  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$ . Ziel der folgenden Rechnung ist nun, eine geeignete Abschätzung für die Funktion  $\vec{g}$  zu bekommen.

$$\frac{\partial g_i}{\partial \zeta_j}(\vec{\zeta}) \eta_i \eta_j = \left| \vec{\zeta} \right|^{p-2} \delta_{ij} \eta_i \eta_j + (p-2) \left| \vec{\zeta} \right|^{p-4} \zeta_i \zeta_j \eta_i \eta_j$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial \zeta_j}(\vec{\zeta}) \eta_i \eta_j &= \sum_{i,j=1}^n \left( \left| \vec{\zeta} \right|^{p-2} \delta_{ij} \eta_i \eta_j + (p-2) \left| \vec{\zeta} \right|^{p-4} \zeta_i \zeta_j \eta_i \eta_j \right) \\ &= \left| \vec{\zeta} \right|^{p-2} |\vec{\eta}|^2 + (p-2) \left| \vec{\zeta} \right|^{p-4} (\vec{\zeta} \cdot \vec{\eta})(\vec{\zeta} \cdot \vec{\eta}) \\ &= \left| \vec{\zeta} \right|^{p-2} |\vec{\eta}|^2 \left( 1 + (p-2) \frac{(\vec{\zeta} \cdot \vec{\eta})^2}{|\vec{\eta}|^2 |\vec{\zeta}|^2} \right) \geq \min(1, p-1) \left| \vec{\zeta} \right|^{p-2} |\vec{\eta}|^2. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung bekommen wir aus folgender Überlegung: zunächst schätzen wir den Quotienten  $\frac{(\vec{\zeta} \cdot \vec{\eta})^2}{|\vec{\eta}|^2 |\vec{\zeta}|^2}$  durch 1 nach oben ab, denn es gilt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\left( \sum_{i=1}^n \zeta_i \eta_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 \sum_{i=1}^n \eta_i^2 = \left| \vec{\zeta} \right|^2 |\vec{\eta}|^2$$

Um das Minimum über alle  $p$  in der Abschätzung zu erhalten, müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

- i)  $p \geq 2$ . Dann ist  $1 + (p-2) \frac{(\vec{\zeta} \cdot \vec{\eta})^2}{|\vec{\eta}|^2 |\vec{\zeta}|^2} \geq 1$ , da der Summand  $(p-2) \frac{(\vec{\zeta} \cdot \vec{\eta})^2}{|\vec{\eta}|^2 |\vec{\zeta}|^2}$  größer Null ist.
- ii)  $1 < p < 2$ . Wir erhalten  $-(2-p) \frac{(\vec{\zeta} \cdot \vec{\eta})^2}{|\vec{\eta}|^2 |\vec{\zeta}|^2} \geq -(2-p)$  und damit

$$1 + (p-2) \frac{(\vec{\zeta} \cdot \vec{\eta})^2}{|\vec{\eta}|^2 |\vec{\zeta}|^2} = 1 - (2-p) \frac{(\vec{\zeta} \cdot \vec{\eta})^2}{|\vec{\eta}|^2 |\vec{\zeta}|^2} \geq 1 - (2-p) = p-1.$$

□

SATZ 4.11. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.9 ist der Operator  $A$  streng monoton und koerzitiv auf  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .*

BEWEIS. Wir untersuchen zunächst die strenge Monotonie des Operators  $A$ , wobei Lemma 4.10 die entscheidende Abschätzung liefern wird.

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla(u - v) + su(u - v) dx - \int_{\Omega} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla(u - v) + sv(u - v) dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u (\nabla u - \nabla v) - |\nabla v|^{p-2} \nabla v (\nabla u - \nabla v) + su(u - v) - sv(u - v) dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u - \nabla v) (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) dx + s \int_{\Omega} |u - v|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (\partial_i u - \partial_i v) (g_i(\nabla u) - g_i(\nabla v)) dx + s \int_{\Omega} |u - v|^2 dx. \end{aligned}$$

Mit der Umformung  $g_i(\nabla u) - g_i(\nabla v) = \int_0^1 \frac{d}{d\tau} g_i(\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)) d\tau$  folgt

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (\partial_i u - \partial_i v) \int_0^1 \frac{d}{d\tau} (g_i(\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v))) d\tau dx + s \int_{\Omega} |u - v|^2 dx. \end{aligned}$$

Vertauschung der Summation und Integration liefert

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= \\ &= \int_{\Omega} \int_0^1 \sum_i^n (\partial_i u - \partial_i v) \frac{d}{d\tau} (g_i(\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v))) d\tau dx + s \int_{\Omega} |u - v|^2 dx. \end{aligned}$$

Mit der Kettenregel  $\frac{dg_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial \zeta_j} \frac{\partial \zeta_j}{\partial \tau}$  folgt weiter

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= \\ &= \int_{\Omega} \int_0^1 \sum_{i,j} \frac{\partial g_i}{\partial \zeta_j} (\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)) \frac{\partial \zeta_j}{\partial \tau} (\partial_i u - \partial_i v) d\tau dx + s \int_{\Omega} |u - v|^2 dx. \end{aligned}$$

Da  $\zeta_j = \partial_j v + \tau(\partial_j u - \partial_j v)$  ist, erhalten wir mit  $\frac{\partial \zeta_j}{\partial \tau} = \partial_j u - \partial_j v$

$$\begin{aligned} & \langle Au - Av, u - v \rangle \\ &= \int_{\Omega} \int_0^1 \sum_{i,j} \frac{\partial g_i}{\partial \zeta_j} (\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)) (\partial_j u - \partial_j v) (\partial_i u - \partial_i v) d\tau dx + s \int_{\Omega} |u - v|^2 dx. \end{aligned}$$

Mit der Abschätzung  $\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial \zeta_j}(\vec{\zeta}) \eta_i \eta_j \geq \min(1, p-1) |\vec{\zeta}|^{p-2} |\vec{\eta}|^2$  mit den Argumenten  $\vec{\zeta} = \nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)$ ,  $\eta_i = \partial_i u - \partial_i v$  und  $\eta_j = \partial_j u - \partial_j v$  folgt weiter

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &\geq c \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^2 \int_0^1 |\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2} d\tau dx + s \int_{\Omega} |u - v|^2 dx \\ &> 0 \text{ für } u \neq v, s \geq 0, \end{aligned}$$

also ist der Operator  $A$  streng monoton. Besonderer Beachtung ist noch dem Fall  $s = 0$  zu schenken. Ist nun  $s = 0$ , so entfällt der Summand  $s \int_{\Omega} |u - v|^2 dx$ , welcher für  $u \neq v$  strikt größer Null ist. Der Summand  $\int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^2 \int_0^1 |\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2} d\tau dx$  ist genau dann Null, wenn sich die Funktionen  $u$  und  $v$  nur durch eine Konstante unterscheiden. Dies ist jedoch im Sobolevraum  $W_0^{1,p}$  nicht möglich. Ferner wollen wir für den Operator  $A$  die Koerzitivität nachweisen.

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle &= \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u + suu) dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^p + s \int_{\Omega} u^2 dx \\ &= \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}^p + s \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Also

$$\langle Au, u \rangle \geq \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}^p. \quad (4.16)$$

Da wir den Sobolevraum  $X = W_0^{1,p}$  zu Grunde gelegt haben und wegen der Ungleichung von Pioncaré-Friedrichs die Normen  $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$  und  $\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}$  äquivalent sind, d.h.

$$\|u\|_X \sim \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} \text{ bzw. } c_1 \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u\|_X \leq c_2 \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)},$$

ergibt sich:

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_X} \stackrel{(4.16)}{\geq} \frac{\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}^p}{c_2 \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}} = \frac{1}{c_2} \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}^{p-1} \xrightarrow{\|u\|_X \rightarrow \infty} \infty, \text{ falls } p > 1.$$

Somit ist die Koerzitivität des Operators  $A$  nachgewiesen.  $\square$

**Beispiel IV: Verallgemeinerung von Beispiel III.** Zum Schluss betrachten wir nun noch ein Beispiel, welches eine Verallgemeinerung zum vorhergehenden Beispiel III darstellt. Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + g(u) &= f \quad \text{auf } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (4.17)$$

mit  $1 < p < \infty$ .

Analog zum Beispiel III leiten wir die schwache Formulierung zu (4.17) her und definieren folgende Operatoren:

$$\langle A_1 u, \phi \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi dx, \quad (4.18)$$

$$\langle A_2 u, \phi \rangle = \int_{\Omega} g(u) \phi dx, \quad (4.19)$$

$$\langle b, \phi \rangle = \int_{\Omega} f \phi dx. \quad (4.20)$$

Zunächst beweisen wir folgendes Lemma, um zu zeigen, welche Forderungen an die Funktion  $g$  gestellt werden müssen.

LEMMA 4.12. *Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet des  $\mathbb{R}^n$  mit Lipschitz-stetigem Rand  $\partial\Omega$ . An die stetige Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stellen wir folgende Wachstumsbedingung:*

$$|g(s)| \leq c(1 + |s|^{r-1}), \quad (4.21)$$

wobei  $1 \leq r \leq \infty$  ist. Für  $1 < p \leq n$  und  $r \leq \frac{np}{n-p}$  bildet der Operator  $A_2$  den Raum  $X = W_0^{1,p}(\Omega)$  in seinen Dualraum  $X'$  ab und ist beschränkt.

BEWEIS. Der Operator  $A_2$  wurde definiert durch

$$\langle A_2 u, \phi \rangle = \int_{\Omega} g(u) \phi dx \quad (4.22)$$

Nun leiten wir eine geeignete Abschätzung für den Operator  $A_2$  her, so dass wir direkt die Beschränktheit des Operators  $A_2$  ablesen können und eine Aussage darüber treffen können, dass der Operator  $A_2$  in den zu dem Raum  $X$  zugehörigen Dualraum  $X'$  abbildet. Es ist

$$\begin{aligned} \langle A_2 u, \phi \rangle &= \left| \int_{\Omega} g(u) \phi dx \right| \leq \int_{\Omega} |g(u) \phi| dx \leq \int_{\Omega} |g(u)| |\phi| dx \\ &\leq \int_{\Omega} c(1 + |u|^{r-1}) |\phi| dx \end{aligned}$$

aufgrund der Wachstumsbedingung (4.21). Mit der Hölder-Ungleichung und mit  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$  und  $q = \frac{np}{n-p}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} |\langle A_2 u, \phi \rangle| &\leq c \left( \int_{\Omega} (1 + |u|^{r-1})^{q'} dx \right)^{\frac{1}{q'}} \left( \int_{\Omega} |\phi|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c \left\| 1 + |u|^{r-1} \right\|_{L^{q'}} \|\phi\|_{L^q}. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|\langle A_2 u, \phi \rangle| \leq c(1 + \|u\|_{L^{q'(r-1)}}^{r-1}) \|\phi\|_{L^q}. \quad (4.23)$$

Wir bemerken, dass der Sobolevraum  $X = W_0^{1,p}$  stetig in  $L^q$  eingebettet ist und  $L^q$  stetig in  $L^{(r-1)q'}$  eingebettet ist, falls  $q \geq (r-1)q'$  ist (siehe [18, S. 61]). Die Ungleichung  $q \geq (r-1)q'$  formen wir um, und erhalten

$$\begin{aligned} q \geq (r-1)q' &\Leftrightarrow (r-1) \frac{1}{q} \leq \frac{1}{q'} \Leftrightarrow (r-1) \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{n} \Leftrightarrow r \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow r \leq \frac{np}{n-p}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für  $r \leq \frac{np}{n-p}$  aus (4.23) die Ungleichung

$$|\langle A_2 u, \phi \rangle| \leq c(1 + \|u\|_X^{r-1}) \|\phi\|_X. \quad (4.24)$$

Die Operatornorm ist definiert als

$$\|A_2u\|_{X'} := \sup_{\substack{\phi \in X \\ \|\phi\|_X \leq 1}} |\langle A_2u, \phi \rangle|.$$

Aus (4.24) folgt  $\|A_2u\|_{X'} \leq c(1 + \|u\|_X^{r-1})$ . Folglich bildet der Operator  $A_2$  den Sobolevraum  $X$  in seinen Dualraum  $X'$  ab, da die Norm existiert und aus der Abschätzung folgern wir, dass der Operator  $A_2$  beschränkt ist.  $\square$

LEMMA 4.13. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Lemma 4.12 erfülle  $g$  die Koerzitivitätsbedingung  $\inf_{s \in \mathbb{R}} g(s)s > -\infty$  und es sei  $p > 1$ . Dann ist der Operator  $A = A_1 + A_2 : X \rightarrow X'$  koerzitiv.*

BEWEIS. In Beispiel III haben wir gezeigt, dass  $\langle A_1u, u \rangle \geq \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}^p$  (siehe (4.16)). Außerdem folgt aus der Koerzitivitätsbedingung für die Funktion  $g$  die Abschätzung

$$\langle A_2u, u \rangle = \int_{\Omega} g(u)u dx > -c_0, c_0 \in \mathbb{R}^+.$$

Nun wollen wir zeigen, dass  $A = A_1 + A_2$  koerzitiv ist. Dabei nutzen wir aus, dass in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  die Norm  $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$  äquivalent zur Halbnorm  $\|\nabla u\|_{L_p}$  ist.

$$\begin{aligned} \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_X} &= \frac{\langle A_1u, u \rangle}{\|u\|_X} + \frac{\langle A_2u, u \rangle}{\|u\|_X} \geq \frac{\langle A_1u, u \rangle}{c\|\nabla u\|_{L_p}} + \frac{\langle A_2u, u \rangle}{c\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}} \\ &> \frac{\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}^p}{c\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}} - \frac{c_0}{c\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}} = \frac{1}{c}\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}^{p-1} - \frac{c_0}{c\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}} \xrightarrow{\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} \rightarrow \infty} \infty \text{ für } p > 1. \end{aligned}$$

Also ist der Operator  $A$  koerzitiv.  $\square$



# Hauptsatz über monotone Operatoren, I

ANIKA REIMANN

Nach der Einführung monotoner Operatoren im vierten Vortrag, wollen wir uns im Folgenden Gedanken darüber machen, wie man den Satz von Lax-Milgram aus dem zweiten Vortrag auf monotone Operatoren verallgemeinern kann. Dies geschieht im Hauptsatz über nichtlineare monotone Operatoren. Um diesen einführen zu können, müssen wir aber zunächst noch einige Definitionen und Sätze betrachten. Sämtliche in diesem Vortrag auftretende Vektorräume sind  $\mathbb{R}$ -Vektorräume.

## 1. Vorbereitende Sätze und Definitionen

DEFINITION 5.1. Vollständige normierte Räume nennt man **Banachräume**.

Als nächstes definieren wir die Dichtheit und mithilfe der Dichtheit einen separablen Raum.

DEFINITION 5.2. Sei  $V$  ein metrischer Raum mit Metrik  $d$ . Dann ist  $M \subset V$  **dicht** in  $V$  genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall v \in V \quad \exists m \in M : d(v, m) < \varepsilon.$$

Dies ist äquivalent zu der Aussage  $\overline{M} = V$ , d.h. jeder Punkt  $v \in V$  ist Grenzwert einer Folge aus  $M$ .

BEISPIEL 5.3.  $\mathbb{Q}$  liegt dicht in  $\mathbb{R}$ .

DEFINITION 5.4. Ein metrischer Raum heißt **separabel** genau dann, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

Wir wollen uns diese Definition mithilfe von Beispielen verdeutlichen.

BEISPIEL 5.5. Die Sobolevräume  $W^{k,p}(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $1 \leq p < \infty$  sind separabel. Dies wird in [2, Seite 54ff.] gezeigt.

BEISPIEL 5.6. Die Räume  $l^p$  sind separabel für  $1 \leq p < \infty$  mit

$$l^p := \left\{ \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} : t_n \in \mathbb{R}; \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p < \infty \right\}.$$

Sie tragen die Norm

$$\|v\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Einen Beweis dafür findet man in [22, Satz 8.6].

SATZ 5.7. *Ein normierter Raum  $V$  ist separabel genau dann, wenn es eine abzählbare Teilmenge  $A$  gibt, mit  $V = \overline{\text{span}A}$ .*

BEWEIS. Sei  $V$  separabel. Aus  $V = \overline{A}$  erhalten wir sofort  $V = \overline{\text{span}A}$ . Sei andererseits  $A$  abzählbar und  $V = \overline{\text{span}A}$ . Wir definieren die Menge

$$\mathcal{B} := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{Q}, v_i \in A \right\}.$$

$\mathcal{B}$  ist abzählbar, da  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}$  und  $A$  abzählbar sind.

Falls folgendes gilt:

$$\forall v \in V \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in \mathcal{B} : \|v - y\| < \varepsilon,$$

ist  $\mathcal{B}$  eine abzählbare dichte Teilmenge von  $V$ . Sei nun  $v \in V = \overline{\text{span}A}$  und wähle  $y_0 \in \text{span}A$ , so dass  $\|v - y_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Da  $y_0 \in \text{span}A$  ist, existieren  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  und  $v_i \in A$ , so dass  $y_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ .

Wähle  $\lambda'_i \in \mathbb{Q}$  mit  $|\lambda_i - \lambda'_i| \leq \frac{\varepsilon}{2 \sum_{i=1}^n \|v_i\|}$ . Dann ist  $y = \sum_{i=1}^n \lambda'_i v_i$  ein Element aus  $\mathcal{B}$  und es gilt

$$\|v - y\| \leq \|v - y_0\| + \|y_0 - y\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \max_i |\lambda_i - \lambda'_i| \sum_{i=1}^n \|v_i\| \leq \varepsilon.$$

□

Wir brauchen nun noch die Definition eines reflexiven Raumes. Dazu müssen wir uns aber zunächst klar machen, wie Dualraum und Bidualraum eines normierten Raumes aussehen.

DEFINITION 5.8. Der Raum  $L(V, \mathbb{R})$  der stetigen linearen Funktionale auf einem normierten Raum  $V$  heißt der **Dualraum** von  $V$  und wird mit  $V'$  bezeichnet.

BEMERKUNG 5.9. Ist der Raum  $V$  normiert, dann definiert folgender Ausdruck eine Norm im Dualraum  $V'$  von  $V$ :

$$\forall v' \in V' : \quad \|v'\| = \sup_{\|v\| \leq 1} |v'(v)|.$$

SATZ 5.10. *Bei Hilberträumen  $H$  kann der Dualraum mit  $H$  identifiziert werden.*

Der Satz folgt aus dem Rieszschen Darstellungssatz, der bereits als Satz 2.9 formuliert wurde und jetzt bewiesen wird.

SATZ 5.11 (Rieszscher Darstellungssatz).

*Sei  $V = H$  ein Hilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dann wird für jedes feste  $z \in H$  durch  $f(v) = \langle v, z \rangle$  eine stetige Linearform auf  $H$  definiert. Umgekehrt gibt es zu jeder stetigen Linearform  $f$  auf  $H$  genau ein  $z \in H$ , so dass*

$$f(v) = \langle v, z \rangle \quad \forall v \in H \tag{5.1}$$

*gilt. Es ist  $\|f\| = \|z\|$ .*

BEWEIS. Wir zeigen, dass die Abbildung

$$g : H \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mit } g(x) := \langle x, z \rangle \text{ für festes } z \in H$$

eine stetige Linearform ist.

**Linearität:** Seien  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  und  $v, w \in H$ , dann gilt

$$\begin{aligned} g(\lambda v + \mu w) &= \langle \lambda v + \mu w, z \rangle \\ &= \langle \lambda v, z \rangle + \langle \mu w, z \rangle \\ &= \lambda \langle v, z \rangle + \mu \langle w, z \rangle \\ &= \lambda g(v) + \mu g(w). \end{aligned}$$

**Stetigkeit:** Die Beschränktheit kann man folgendermaßen zeigen

$$|g(v)| = |\langle v, z \rangle| \leq \|v\| \|z\|.$$

Da  $z$  fest ist, folgt die Beschränktheit und somit die Stetigkeit aus

$$|g(v)| \leq c(z) \|v\|.$$

Sei nun umgekehrt  $f \in H'$  gegeben. Wir zeigen, dass  $f$  auf eindeutige Art wie in (5.1) dargestellt werden kann.

**1. Schritt:** Wir wollen die Eindeutigkeit mithilfe eines Widerspruchsbeweises zeigen.

Wir nehmen an, es existieren  $z, w \in H$ , mit  $z \neq w$ , für die  $f(v) = \langle z, v \rangle = \langle w, v \rangle$  gilt. Gilt aber  $\langle v, z \rangle = \langle v, w \rangle$  für alle  $v \in H$ , so folgt

$$\langle v, z - w \rangle = 0 \quad \forall v \in H.$$

Das heißt, es gilt  $z - w = 0$  und damit  $z = w$ , was im Widerspruch zur Annahme steht. Die Eindeutigkeit ist also erfüllt.

**2. Schritt:** Nun gilt es, die Existenz zu zeigen, d.h. zu jeder stetigen Linearform  $f \in H'$  existiert ein  $z \in H$  mit  $f(v) = \langle z, v \rangle \quad \forall v \in H$ .

Im Spezialfall  $f = 0$  muss offensichtlich  $z = 0$  gewählt werden.

Vorüberlegungen: Wir bezeichnen im folgenden das orthogonale Komplement zu  $\ker f$  mit  $\ker f^\perp$ . Sei  $f \neq 0$ . Dann lässt sich  $H$  darstellen als

$$H = \ker f \oplus \ker f^\perp \quad \text{mit } \ker f^\perp \neq \{0\}.$$

Das heißt, für jedes  $v \in H$  existieren eindeutig bestimmte Elemente  $v_1 \in \ker f$  und  $v_2 \in \ker f^\perp$  mit  $v = v_1 + v_2$ . Da  $f|_{\ker f^\perp}$  ein Isomorphismus von  $\ker f^\perp$  in  $\mathbb{R}$  ist, ist  $\ker f^\perp$  eindimensional. Somit gilt für jedes  $0 \neq v_0 \in \ker f^\perp$ :  $\text{span } v_0 = \ker f^\perp$ . Das heißt, für alle  $v \in H$  existiert ein  $\alpha \in \mathbb{R}$  und ein  $y \in \ker f$ , so dass  $v = \alpha v_0 + y$ . Wir erhalten also

$$f(v) = f(\alpha v_0 + y) = \alpha f(v_0) + f(y) = \alpha f(v_0).$$

Wir wollen nun zeigen, dass es ein  $z \in H$  gibt, für das  $\langle v, z \rangle = f(v)$  gilt. Für  $z := \frac{f(v_0)}{\langle v_0, v_0 \rangle} v_0$  mit  $v_0 \in \ker f^\perp$  erhalten wir

$$\langle v, z \rangle = \langle \alpha v_0 + y, z \rangle = \alpha \langle v_0, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

Da nach Voraussetzung  $y \in \ker f$  und  $z \in \ker f^\perp$  sind, gilt  $\langle y, z \rangle = 0$ . Es folgt damit

$$\begin{aligned}\langle v, z \rangle &= \alpha \left\langle v_0, \frac{f(v_0)}{\langle v_0, v_0 \rangle} v_0 \right\rangle \\ &= \alpha f(v_0) \frac{1}{\langle v_0, v_0 \rangle} \langle v_0, v_0 \rangle \\ &= \alpha f(v_0) \\ &= f(v).\end{aligned}$$

Es existiert also tatsächlich für jedes  $f$  ein  $z$ , so dass  $\langle v, z \rangle = f(v)$  gilt.

**3. Schritt:** Wir müssen nun noch zeigen, dass  $\|f\| = \|z\|$  gilt.

$\|f\| \leq \|z\|$  :

$$\|f\| = \sup_{\|v\|=1} |f(v)| = \sup_{\|v\|=1} |\langle v, z \rangle| \leq \sup_{\|v\|=1} \|v\| \|z\| = \|z\|.$$

$\|f\| \geq \|z\|$  :

$$\|f\| = \sup_{\|v\|=1} |f(v)| = \sup_{\|v\|=1} |\langle v, z \rangle|$$

Wähle  $v = \frac{z}{\|z\|}$ . Dann folgt

$$\|f\| \geq \left| \left\langle \frac{z}{\|z\|}, z \right\rangle \right| = \left| \frac{1}{\|z\|} (z, z) \right| = \left| \frac{1}{\|z\|} \|z\|^2 \right| = \|z\|.$$

□

**SCHLUSSFOLGERUNG 5.12.** Es folgt also aus dem Rieszischen Darstellungssatz, dass der Dualraum eines Hilbertraums aus stetigen linearen Funktionalen besteht, für die gilt  $\|f\| = \|z\|$ . Der Dualraum ist also isomorph zum Hilbertraum.

**BEISPIEL 5.13.** Wir betrachten den Raum  $l^2$ . Der Raum  $l^2$  hat die Norm

$$\|v\|_2 = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Das dazugehörige Skalarprodukt ist

$$\langle v, w \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cdot w_n.$$

$l^2$  ist ein Hilbertraum und es gilt der Rieszische Darstellungssatz.

**DEFINITION 5.14.**  $V$  sei ein normierter Raum,  $V'$  sein Dualraum und  $V'' := (V')'$  der Dualraum des Dualraums  $V'$ . Wir bezeichnen  $V''$  als **Bidualraum**. Für  $v \in V$  ist durch

$$i(v) : V' \rightarrow \mathbb{R}, \quad (i(v))(v') := v'(v)$$

ein Element aus  $V''$  definiert. Die Abbildung  $i : V \rightarrow V''$  wird als **kanonische Einbettung** bezeichnet.

**SATZ 5.15.** Die kanonische Abbildung  $i$  ist ein injektiver Homomorphismus auf  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen.

**BEWEIS. 1. Schritt:** Wir zeigen, dass  $i$  linear und stetig ist. Zunächst die Linearität. Seien  $v, \bar{v} \in V$ ,  $v' \in V'$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} (i(\lambda v + \mu \bar{v}))(v') &= v'(\lambda v + \mu \bar{v}) \\ &= \lambda v'(v) + \mu v'(\bar{v}) \\ &= (\lambda i(v))(v') + (\mu i(\bar{v}))(v') \\ &= (\lambda i(v) + \mu i(\bar{v}))(v'). \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$i(\lambda v + \mu \bar{v}) = \lambda i(v) + \mu i(\bar{v}).$$

Daher ist  $i$  eine lineare Abbildung. Wir zeigen nun die Stetigkeit. Dazu zeigen wir die Beschränktheit der Operatornorm von  $i$ .

$$\begin{aligned} \|i\|_{V''} &= \sup_{v \neq 0} \frac{\|i(v)\|_{V''}}{\|v\|_V} \\ &= \sup_{v \neq 0} \sup_{v' \neq 0} \frac{|i(v)(v')|}{\|v\|_V \|v'\|_{V'}} \\ &= \sup_{v \neq 0} \sup_{v' \neq 0} \frac{|v'(v)|}{\|v\|_V \|v'\|_{V'}} \\ &\leq \sup_{v \neq 0} \sup_{v' \neq 0} \frac{\|v\|_V \|v'\|_{V'}}{\|v\|_V \|v'\|_{V'}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Die Operatornorm von  $i$  ist also beschränkt und somit ist  $i$  stetig.

**2. Schritt:** Es ist nun zu zeigen, dass gilt:  $\ker i = \{0\}$  in  $V$ .

Wir nehmen an, es existiert ein  $0 \neq v \in V$  mit  $i(v) = 0 \in V''$ . Es folgt

$$(i(v))(v') = v'(v) = 0 \quad \forall v' \in V'.$$

Nach einer Folgerung [3, 4.4 Folgerung] des Satzes von Hahn – Banach [3, 4.2 Satz] gilt aber

$$\forall w \in V \text{ mit } w \neq 0 \quad \exists w' \in V' \text{ mit } w'(w) = 1.$$

Daher muss  $v = 0$  erfüllt sein, was im Widerspruch steht zu der Annahme  $v \neq 0$  und daher ist  $\ker i = \{0\}$ .  $\square$

**DEFINITION 5.16.** Ein Banachraum  $V$  heißt **reflexiv**, wenn die kanonische Einbettung  $i$  surjektiv ist.

**SCHLUSSFOLGERUNG 5.17.** Da in einem reflexiven Raum  $V \cong V''$  ist und  $V''$  ein Banachraum ist, müssen reflexive Räume Banachräume sein.

**SATZ 5.18.** *Jeder Hilbertraum ist reflexiv.*

**BEWEIS.** Um zeigen zu können, dass alle Hilberträume reflexive Räume sind, müssen wir zweimal den Rieszschen Darstellungssatz, Satz 5.11, verwenden. Zunächst gilt mit dem Rieszschen Darstellungssatz, dass jedes  $f \in H'$  durch genau ein  $z_f \in H$  erzeugt wird. Wir können also ein Skalarprodukt in  $H'$  durch  $\langle f, g \rangle_{H'} = \langle z_f, z_g \rangle_H$  definieren. Dieses Skalarprodukt erfüllt die Eigenschaft

$$\sqrt{\langle f, f \rangle_{H'}} = \sqrt{\langle z_f, z_f \rangle_H} = \|z_f\|_H = \|f\|_{H'}.$$

$H'$  ist also ein Hilbertraum.

Mit dem Riesz'schen Darstellungssatz erhalten wir wieder, dass jedes  $F \in H''$  erzeugt wird durch genau ein  $g_F \in H'$ , d.h. es gilt  $F(f) = \langle f, g_F \rangle_{H'}$ . Sei  $i : H \rightarrow H''$  die kanonische Abbildung. Dann gilt

$$F(f) = \langle f, g_F \rangle_{H'} = \langle z_f, z_{g_F} \rangle_H = f(z_{g_F}) = (i(z_{g_F}))(f) \quad \forall f \in H'.$$

D.h. für jedes  $F \in H''$  existiert ein  $z \in H$ , so dass  $i(z) = F$ . Also ist  $H'' = i(H)$ . Damit ist die Surjektivität der kanonischen Abbildung  $i$  gezeigt, also ist  $H$  reflexiv.  $\square$

**SATZ 5.19.**  *$V$  sei ein reflexiver Banachraum. Dann ist  $V$  genau dann separabel, wenn  $V'$  separabel ist.*

**BEWEIS.**

**1. Schritt:**  $V'$  sei separabel. Damit ist auch  $S_{V'} = \{v' \in V' : \|v'\| = 1\}$  separabel. Sei  $\{v'_1, v'_2, \dots\}$  dicht in  $S_{V'}$ . Für jedes  $i$  wähle  $v_i \in S_V$  mit  $|v'_i(v_i)| \geq \frac{1}{2}$ . Wir definieren  $U := \text{span}\{v_1, v_2, \dots\}$ . Es ist nun zu zeigen, dass  $U$  dicht liegt in  $V$ . Dazu zeigen wir: Ist  $v' \in V'$  mit  $v'|_U = 0$ , so folgt  $v' = 0$ . Hieraus folgt wegen [25, Korollar 3.1.9], dass  $U$  dicht in  $V$  liegt. Sei also  $v' \in V'$  mit  $v'|_U = 0$  und  $v' \neq 0$ . Ohne Einschränkung sei  $\|v'\| = 1$ . Wir wählen ein  $v'_{i_0} \in S_{V'}$  mit  $\|v' - v'_{i_0}\| \leq \frac{1}{4}$  und erhalten folgende Ungleichung (beachte, dass  $v'(v_{i_0}) = 0$ , da  $v_{i_0} \in S_V \subset U$  und  $v'|_U = 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq |v'_{i_0}(v_{i_0})| \\ &= |v'_{i_0}(v_{i_0}) - v'(v_{i_0})| \\ &\leq \|v'_{i_0} - v'\| \|v_{i_0}\| \\ &\leq \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

was einen Widerspruch erzeugt. Es muss also  $v' = 0$  gelten.

**2. Schritt:** Sei  $V$  separabel. Wegen der Reflexivität von  $V$  gilt  $V \cong V''$  und damit ist  $V''$  ebenfalls separabel. Es folgt aus dem ersten Schritt, dass  $V'$  separabel ist.  $\square$

## 2. Die Galerkingleichungen

Galerkingleichungen ermöglichen das näherungsweise Lösen der Operatorgleichung

$$Au = f, \text{ mit } A : V \rightarrow V',$$

wobei  $V$  unendlich-dimensional ist und  $A$  nichtlinear sein kann. Da  $Au$  und  $f$  Elemente aus dem Dualraum  $V'$  sind, kann man die Gleichung auch folgendermaßen ausdrücken

$$\text{Gesucht ist } u \in V, \text{ so dass: } \langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V,$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die duale Paarung zwischen Elementen aus  $V$  und  $V'$  bezeichnet. Die grundlegende Idee ist, die Operatorgleichung zunächst nur auf endlichdimensionalen Teilräumen  $V_n \subset V$  mit

$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = V$  zu betrachten und auf  $V_n$  Galerkingleichungen zu formulieren. Durch  $\{w_1, \dots, w_n\}$  sei eine Basis von  $V_n$  gegeben. Untersucht wird also das Problem:

$$\text{Gesucht ist } u_n \in V_n, \text{ so dass: } \langle Au_n, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_n.$$

Wir können nun  $v \in V_n$  durch eine Linearkombination von Basisvektoren

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$$

darstellen. Unser Problem lautet jetzt

$$\text{Gesucht ist } u_n \in V_n, \text{ so dass: } \left\langle Au_n, \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \right\rangle = \left\langle f, \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \right\rangle$$

für alle  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Dies ist äquivalent zu

$$\text{Gesucht ist } u_n \in V_n, \text{ so dass: } \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle Au_n, w_i \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle f, w_i \rangle \quad (5.2)$$

für alle  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Diese Gleichungen müssen insbesondere für  $\lambda_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  mit 1 an der  $j$ -ten Stelle erfüllt sein, was zu den folgenden  $n$  Gleichungen führt:

$$\text{Gesucht ist } u_n \in V_n, \text{ so dass: } \langle Au_n, w_i \rangle = \langle f, w_i \rangle \quad \text{für } i = 1 \dots n. \quad (5.3)$$

Falls andererseits  $u_n$  eine Lösung von (5.3) ist, so folgt durch Multiplikation der Gleichungen (5.3) mit den  $\lambda_i$  und anschließendes Aufaddieren, dass  $u_n$  auch eine Lösung von (5.2) ist. Die Formulierungen (5.2) und (5.3) sind also äquivalent. Die Gleichungen (5.3) werden **Galerkingleichungen** genannt.

Wir können die Galerkingleichungen mit der sogenannten Galerkin – Methode lösen. Bei der Galerkin – Methode stellen wir  $u_n$  mit Hilfe der Basis von  $V_n$  dar, also

$$u_n = \sum_{k=1}^n c_{kn} w_k.$$

Die Galerkingleichungen lauten dann

$$\text{Gesucht ist } (c_{1n}, \dots, c_{nn}) \in \mathbb{R}^n, \text{ so dass: } \left\langle A \left( \sum_{k=1}^n c_{kn} w_k \right), w_i \right\rangle = \langle f, w_i \rangle \quad (5.4)$$

für  $i = 1 \dots n$ .

**Linearer Fall:** Ist  $A$  linear, dann ist (5.4) äquivalent zu

$$\text{Gesucht ist } (c_{1n}, \dots, c_{nn}) \in \mathbb{R}^n, \text{ so dass: } \sum_{k=1}^n c_{kn} \langle Aw_k, w_i \rangle = \langle f, w_i \rangle \quad \text{für } i = 1 \dots n.$$

Wir haben also für die  $n$  Koeffizienten  $c_{kn}$  ( $k = 1 \dots n$ )  $n$  Gleichungen. Die Operatorgleichung wurde also auf ein lineares Gleichungssystem mit  $n$  Gleichungen für die  $n$  Koeffizienten  $c_{kn}$  zurückgeführt. Wir können dann, die  $u_n$  aus den  $c_{kn}$  berechnen. Die Matrix  $\langle Aw_k, w_i \rangle_{k,i=1 \dots n}$  wird als Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Das Lemma von Céa sagt uns, dass die  $u_n$  in ihrem jeweiligen Raum  $V_n$  die beste Annäherung an  $u$  sind und aus  $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = V$  folgt, dass die Folge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  gegen die Lösung  $u$  aus der Ausgangsgleichung konvergiert.

SATZ 5.20 (Lemma von Céa). [19] *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram,  $V$  sei ein Hilbertraum. Dann existiert für ein gegebenes  $f \in V'$  eine eindeutige Lösung  $u \in V$ , so dass*

$$\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V.$$

*Ferner existiert eine eindeutig bestimmte Galerkinlösung  $u_n \in V_n$ , mit*

$$\langle Au_n, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_n.$$

*Es gilt folgende Abschätzung*

$$\|u - u_n\|_V \leq \frac{c_1}{c_2} \inf_{w \in V_n} \|u - w\|_V,$$

*wobei  $c_1$  und  $c_2$  Konstanten aus den Ungleichungen des Satzes von Lax-Milgram sind.*

**Nichtlinearer Fall:** Ist  $A$  nichtlinear, dann lautet das Problem

$$\text{Gesucht ist } (c_{1n}, \dots, c_{nn}) \in \mathbb{R}^n, \text{ so dass: } \left\langle A \left( \sum_{k=1}^n c_{kn} w_k \right), w_i \right\rangle = \langle f, w_i \rangle$$

$$\text{für } i = 1 \dots n.$$

Man stellt das nichtlineare Gleichungssystem für die Koeffizienten  $c_{kn}$  auf, und löst es. Dadurch erhält man eine Lösung  $u_n$  des endlich-dimensionalen Problems auf  $V_n$  und für verschiedene  $n \in \mathbb{N}$  eine Folge von Funktionen  $u_n$ , die jeweils das endlich-dimensionale Problem auf  $V_n$  lösen. Im linearen Fall folgt aus Céas Lemma, dass die Folge der  $u_n$  gegen eine Lösung der Ausgangsgleichung konvergiert. Die Existenz einer Lösung ist im linearen Fall durch den Satz von Lax-Milgram gesichert. Im nichtlinearen Fall wird die Argumentation umgekehrt. Unter geeigneten Voraussetzungen an den Operator  $A$  (siehe Satz 5.25) kann gezeigt werden, dass die aus den Galerkingleichungen gewonnene Folge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge besitzt, die gegen ein Element  $u \in V$  konvergiert, von dem schließlich gezeigt werden kann, dass es Lösung der ursprünglichen Operatorgleichung ist. Für diese Vorgehensweise muss allerdings der Konvergenzbegriff in  $V$  abgeschwächt werden.

### 3. Schwache Konvergenz

DEFINITION 5.21. Eine Folge  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in einem normierten Raum  $V$  heißt **schwach konvergent** gegen  $v \in V$ , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v'(v_n) = v'(v) \quad \forall v' \in V'.$$

Man schreibt dann auch  $v_n \rightharpoonup v$  in  $V$ .

SATZ 5.22. *Im Allgemeinen folgt aus schwacher Konvergenz nicht Konvergenz.*

BEWEIS. Diesen Beweis können wir mithilfe eines Gegenbeispiels im Raum  $l^2$  führen. Wir zeigen dazu zunächst, dass die lineare Hülle der Einheitsvektoren

$$\mathcal{E} = \{(1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), \dots\}$$

dicht liegt in der Menge  $l^2$ . Wir zeigen dann, dass die Folge der Einheitsvektoren schwach gegen 0 konvergiert, aber nicht stark.

**1. Schritt:** Wir zeigen, dass  $\overline{\text{span } \mathcal{E}} = l^2$ .

Sei  $t = \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$ . Es gilt zu zeigen, dass eine Folge

$$\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{span}\{(1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), \dots\}$$

existiert mit  $v_n \rightarrow t$ . Setze

$$\begin{aligned} v_1 &:= t_1(1, 0, 0, \dots) \\ v_2 &:= t_1(1, 0, 0, \dots) + t_2(0, 1, 0, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\|v_n - t\|_{l^2}^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |t_k|^2,$$

woraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - t\|_{l^2}^2 = 0$$

folgt. Die lineare Hülle der Einheitsvektoren  $\mathcal{E}$  liegt also dicht in der Menge  $l^2$ .

**2. Schritt:** Wir zeigen die schwache Konvergenz der Folge  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  mit 1 an der  $n$ -ten Stelle gegen 0.

Wie wir aus dem Beispiel 5.13 wissen, ist  $l^2$  ein Hilbertraum und es gilt der Rieszsche Darstellungssatz, d.h.

$$\forall v' \in (l^2)' \quad \exists z \in l^2, \text{ so dass } v'(v) = \langle v, z \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cdot z_n \quad \forall v \in l^2.$$

Es folgt daher

$$v'(e_j) = \sum_{n=1}^{\infty} e_{j_n} \cdot z_n = z_j.$$

Da aber  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty$  ist, folgt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} v'(e_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} z_j = 0 = v'(0).$$

Die Folge der Einheitsvektoren ist daher schwach konvergent, gegen  $0 \in l^2$ . Aber wegen

$$\|e_j - 0\| = 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

liegt keine starke Konvergenz vor. □

**SATZ 5.23.** *Aus Konvergenz folgt schwache Konvergenz.*

**BEWEIS.** Da  $v' \in V' = L(V, \mathbb{R})$  ist, ist  $v'$  stetig und daher folgt aus  $v_n \rightarrow v$  auch  $v'(v_n) \rightarrow v'(v)$ . □

Der folgende Satz ist fundamental für den Beweis des Hauptsatzes über monotone Operatoren. Mithilfe dieses Satzes kann aus der Folge der Galerkinlösungen eine schwach konvergente Teilfolge extrahiert werden, von deren Grenzwert gezeigt werden kann, dass er die ursprüngliche Operatorgleichung löst. Der Satz kann auch für nichtseparable Räume gezeigt werden, (siehe [25, Theorem 3.3.7]) wir wollen uns aber auf den separablen Fall beschränken, weil wir ihn auch nur in diesem Zusammenhang für den Beweis des Hauptsatzes (Satz 5.25) benötigen.

**SATZ 5.24.** *In einem separablen, reflexiven Raum besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

**BEWEIS.** Da  $V$  reflexiv und separabel ist, ist nach Satz 5.19 auch  $V'$  separabel mit  $V' = \{v'_1, v'_2, \dots\}$ .

**1. Schritt:** Wir konstruieren uns eine Folge, die konvergent ist bezüglich der Menge  $\{v'_1, v'_2, \dots\}$ .  $\{v_{n_1}\}_{n_1 \in \mathbb{N}}$  sei beschränkte Folge in  $V$ . Dann ist auch  $\{v'_1(v_{n_1})\}_{n_1 \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  wegen der Stetigkeit von  $v'_1$ . Wegen des Satzes von Bolzano – Weierstrass [13, Satz 23.2 Seite 156] enthält sie eine in  $\mathbb{R}$  konvergente Teilfolge  $\{v'_1(v_{n_2})\}_{n_2 \in \mathbb{N}}$ .  $\{v_{n_2}\}_{n_2 \in \mathbb{N}}$  ist aber auch eine beschränkte Folge, da sie ja Teilfolge von  $\{v_{n_1}\}_{n_1 \in \mathbb{N}}$  ist. Wiederum wegen der Stetigkeit, ist  $\{v'_2(v_{n_2})\}_{n_2 \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$ . Es existiert daher eine konvergente Teilfolge  $\{v'_2(v_{n_3})\}_{n_3 \in \mathbb{N}}$  usw.. Man konstruiert nun eine Teilfolge von  $\{v_1, v_2, \dots\}$ , indem man das erste Glied der ersten Teilfolge  $\{v_{n_1}\}_{n_1 \in \mathbb{N}}$  nimmt, das zweite der zweiten Teilfolge  $\{v_{n_2}\}_{n_2 \in \mathbb{N}}$  etc. und erhält so eine Teilfolge  $\{v_{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{N}}$ , für die  $v'_i(v_{n_k})$  konvergent ist bezüglich  $n_k$  für alle  $i$ . Die so ausgewählte Teilfolge bezeichnen wir im folgenden mit  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**2. Schritt:** Wir zeigen, dass  $\{v'(v_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge ist für alle  $v' \in V'$ . Sei  $\varepsilon > 0$  und  $v' \in V'$ . Wähle  $i \in \mathbb{N}$  mit  $\|v'_i - v'\| < \varepsilon$  und setze  $M := \sup_n \|v_n\|$ . Dann gilt, folgende Ungleichung, falls  $m$  und  $n$  hinreichend groß sind, d.h.  $|v'_i(v_n) - v'_i(v_m)| < \varepsilon$ :

$$\begin{aligned} |v'(v_n) - v'(v_m)| &\leq |v'(v_n) - v'_i(v_n)| + |v'_i(v_n) - v'_i(v_m)| + |v'_i(v_m) - v'(v_m)| \\ &< |(v' - v'_i)(v_n)| + \varepsilon + |(v'_i - v')(v_m)| \\ &\leq \|v' - v'_i\| \|v_n\| + \varepsilon + \|v'_i - v'\| \|v_m\| \\ &\leq 2M \|v' - v'_i\| + \varepsilon \\ &< 2M\varepsilon + \varepsilon \\ &= (2M + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

$\{v'(v_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist folglich Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$ . Wir haben damit allerdings noch nicht gezeigt, dass  $v_n$  schwach gegen ein  $v$  konvergiert.

**3. Schritt:** Um zeigen zu können, dass  $v_n$  schwach gegen ein  $v$  konvergiert, müssen wir erst noch den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} v'(v_n)$  untersuchen.

Wir betrachten dazu die Abbildung

$$l : v' \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} v'(v_n),$$

und zeigen, dass  $l$  eine lineare und stetige Abbildung von  $V' \rightarrow \mathbb{R}$ , also ein Element aus  $V''$ , ist.  $l$  ist wegen des 2. Schrittes wohldefiniert und, da die Limesbildung und  $v'$  linear sind, ist auch  $l$  linear. Zu überprüfen ist also nur noch die Stetigkeit, die äquivalent zur Beschränktheit ist.

$$|l(v')| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} v'(v_n) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |v'(v_n)| \leq \|v'\| M$$

Da also auch Stetigkeit vorliegt, ist  $l \in V''$ . Da  $V$  reflexiv ist, existiert ein  $v \in V$  mit  $l = i(v)$ . Es gilt also

$$l(v') = (i(v))(v') = v'(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} v'(v_n) \quad \forall v' \in V'.$$

Daher gilt  $v_n \rightharpoonup v$ . □

#### 4. Hauptsatz über monotone Operatoren

Nach den vorbereitenden Abschnitten sind wir jetzt in der Lage, den Hauptsatz über monotone Operatoren zu formulieren.

SATZ 5.25 (Hauptsatz über monotone Operatoren). (von Browder, Minty 1963, [28])

Es sei  $A$  ein monotoner, koerzitiver und stetiger Operator, der den reellen, separablen, reflexiven Banachraum  $V$  in seinen Dualraum  $V'$  abbildet.  $\{w_1, w_2, \dots\}$  sei eine Basis in  $V$ . Für die Operatorgleichung

$$Au = f \quad (5.5)$$

und die Galerkingleichungen

$$a(u_n, w_k) = \langle Au_n, w_k \rangle = \langle f, w_k \rangle \quad k = 1, \dots, n; \quad u_n \in V_n \quad (5.6)$$

gelten folgende Aussagen:

(1) **Lösungsmenge von (5.5):**

Für jedes  $f \in V'$  besitzt die Gleichung (5.5) eine Lösung. Die Lösungsmenge ist beschränkt, konvex und abgeschlossen.

(2) **Galerkin – Methode:** Falls  $\dim V = \infty$ , dann besitzen die Galerkingleichungen (5.6) für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Lösung  $u_n \in V_n$  und die Folge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  hat eine schwach konvergente Teilfolge  $u_{n'}$ , mit

$$u_{n'} \rightharpoonup u \in V \quad \text{für } n' \rightarrow \infty,$$

wobei  $u$  eine Lösung von (5.5) ist.

(3) **Eindeutigkeit:**

Ist  $A$  streng monoton, dann sind die Gleichungen (5.5) und (5.6) eindeutig lösbar in  $V$  bzw.  $V_n$ .

(4) **Inverser Operator:**

Falls  $A$  streng monoton ist, dann existiert  $A^{-1} : V' \rightarrow V$ .  $A^{-1}$  ist streng monoton, stetig und beschränkt.

Falls  $A$  gleichmäßig monoton ist, dann ist  $A^{-1}$  stetig.

Falls  $A$  stark monoton ist, dann ist  $A^{-1}$  Lipschitz–stetig.

(5) **Starke Konvergenz der Galerkin Methode:**

Es sei  $\dim V = \infty$ . Ist  $A$  streng monoton, dann konvergiert die Folge von Galerkin Lösungen  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  von (5.6) schwach in  $V$  zur eindeutig bestimmten Lösung  $u$  von (5.5).

Ist  $A$  gleichmäßig monoton, dann konvergiert  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  stark in  $V$  zu der eindeutig bestimmten Lösung  $u$  von (5.5).

(6) **Nichtseparable Räume:**

Ist  $V$  nicht separabel, dann gelten (1), (3) und (4).

Der Beweis des Satzes folgt in Vortrag 6.

BEMERKUNG 5.26. Der Hauptsatz ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Lax-Milgram. Dass dies tatsächlich so ist, zeigen wir im Folgenden dadurch, dass wir überprüfen, ob ein Operator, der die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram erfüllt auch die des Hauptsatzes erfüllt. Es gilt also die Monotonie und die Koerzitivität nachzuprüfen.

**Monotonie:** Nach Voraussetzung ist unser Operator  $V$  – elliptisch, d.h. es gilt

$$\langle Au, u \rangle \geq c \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V$$

und somit

$$\langle A(u - v), u - v \rangle \geq c \|u - v\|_V^2, \quad \forall u, v \in V, \text{ da } u - v \in V,$$

woraus die starke Monotonie von  $A$  folgt.

**Koerzitivität:** Es folgt wieder aus der  $V$ -Elliptizität

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_V} \geq c \|u\|_V.$$

Also ist  $A$  koerzitiv.

Nach dem Hauptsatz über monotone Operatoren folgt also für die lineare Operatorgleichung  $Au = f$ :

- Sie und die zugehörigen Galerkingleichungen besitzen eine eindeutige Lösung  $u \in V$  bzw.  $u_n \in V_n$ .
- Die Folge der Galerkinlösungen konvergiert stark in  $V$  gegen die Lösung  $u$ .
- $A^{-1}$  existiert und ist Lipschitz-stetig.

## Hauptsatz über monotone Operatoren, II

MARITA THOMAS

### 1. Motivation

In der linearen Theorie liefert der Satz von Lax-Milgram eine Aussage über die Lösbarkeit der Operatorgleichung  $Au = f$  für den linearen,  $V$ -elliptischen Operator  $A$ . In Vortrag 4 wurde die Klasse der monotonen Operatoren eingeführt, die als Spezialfall die linearen,  $V$ -elliptischen Operatoren enthält. Der Hauptsatz über monotone Operatoren, der in Vortrag 5 vorgestellt wurde, liefert für die Klasse der monotonen Operatoren Aussagen über die Lösbarkeit der Operatorgleichung  $Au = f$ , sowie über die Konvergenz von Näherungslösungen, die mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens ermittelt werden können. Da er sowohl für lineare als auch für nicht-lineare Operatoren gültig ist, bildet er eine Verallgemeinerung des Satzes von Lax-Milgram. In diesem Vortrag wird der Hauptsatz über monotone Operatoren bewiesen.

### 2. Der Hauptsatz über monotone Operatoren

Wir wiederholen den in Vortrag 5 formulierten Hauptsatz:

SATZ 6.1 (Hauptsatz über monotone Operatoren). [28, S. 557]

*Es sei  $A : V \rightarrow V'$  ein monotoner, koerzitiver, stetiger Operator,  $V$  ein reeller, separabler, reflexiver Banachraum mit Basis  $\{w_1, w_2, \dots\}$  und  $V'$  sei der Dualraum von  $V$ .*

*Für die Operatorgleichung*

$$Au = f \tag{6.1}$$

*und die Galerkin-Gleichungen*

$$a(u_n, w_k) = \langle Au_n, w_k \rangle = \langle f, w_k \rangle \quad k = 1 \dots n, \quad u_n \in V_n = \text{span}\{w_1 \dots w_n\} \tag{6.2}$$

*gelten die folgenden Aussagen:*

**II. Lösungsmenge  $S = \{u \in V \mid Au = f\}$  von (6.1):**

*Für jedes  $f \in V'$  hat (6.1) eine Lösung.  $S$  ist beschränkt, konvex und abgeschlossen.*

**I. Galerkin-Methode:**

*Falls  $\dim V = \infty$ , dann hat (6.2) eine Lösung  $u_n \in V_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt eine schwach konvergente Teilfolge  $\{u_{n'}\}_{n' \in \mathbb{N}}$ , sodass  $u_{n'} \rightarrow u$  in  $V$  für  $n' \rightarrow \infty$  und  $u$  ist Lösung von (6.1).*

**III. Eindeutigkeit:**

*Ist  $A$  streng monoton, so sind (6.1), (6.2) eindeutig lösbar in  $V$  bzw.  $V_n$ .*

**IV. Inverser Operator:**

*Ist  $A$  streng monoton, so existiert  $A^{-1} : V' \rightarrow V$ .*

$A^{-1}$  ist streng monoton und beschränkt.

Ist  $A$  gleichmäßig monoton, dann ist  $A^{-1}$  stetig.

Ist  $A$  stark monoton, so ist  $A^{-1}$  Lipschitz-stetig.

### V. Starke Konvergenz der Galerkin-Methode:

Sei  $\dim V = \infty$ .

Ist  $A$  streng monoton, so konvergiert die Folge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  der Galerkin-Lösungen schwach in  $V$  zur eindeutig bestimmten Lösung  $u$  von (6.1).

Ist  $A$  gleichmäßig monoton, so konvergiert  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  stark in  $V$  zu der eindeutig bestimmten Lösung  $u$  von (6.1).

### VI. Nichtseparable Räume:

Ist  $V$  nicht separabel, dann gelten II., III., IV.

## 3. Beweis des Hauptsatzes

Die Vorgehensweise, aus den Galerkin-Gleichungen Näherungen für die Lösung der Operatorgleichung zu bestimmen, spiegelt sich auch in der Beweisführung wider. So werden zunächst die Aussagen zur Galerkin-Methode gezeigt, indem die Existenz von Galerkin-Lösungen auf jedem endlichdimensionalen Unterraum  $V_n$  bewiesen wird. Da es möglich ist, die Beschränktheit dieser Lösungsfolge nachzuweisen, folgt aus Satz 5.24 die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge. Schließlich ist zu zeigen, dass der Grenzwert dieser Teilfolge eine Lösung von (6.1) darstellt. Damit lassen sich die Beweise der übrigen Punkte durchführen.

Der hier geführte Beweis folgt der Argumentation in [28, S. 557 ff].

### Beweis von I. Galerkin-Methode.

Der Beweis von I gliedert sich in drei Schritte. Wir beschreiben zunächst die Beweisidee.

#### 1. Schritt:

Um die Existenz einer Lösung von (6.2) zu zeigen, soll der folgende Hilfssatz, welcher eine Aussage über die Existenz einer Lösung für ein homogenes Gleichungssystem im  $\mathbb{R}^n$  macht, auf die Galerkin-Gleichungen angewandt werden.

SATZ 6.2. [29, S. 53] Gegeben ist das Gleichungssystem

$$g_k(x) = 0, \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.3)$$

Sei  $\bar{U}(0, R^*) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R^*\}$ ,  $R^* > 0$  fest, und sei  $\|\cdot\|$  Norm auf  $\mathbb{R}^n$ .

Seien  $g_k : \bar{U}(0, R^*) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig für  $k = 1, \dots, n$ . Ist zudem

$$\sum_{k=1}^n g_k(x) \xi_k \geq 0 \quad (6.4)$$

für alle  $x$  mit  $\|x\| = R^*$  erfüllt, so haben die Gleichungen (6.3) eine Lösung  $x$  mit  $\|x\| \leq R^*$ .

Somit muss die Lösungssuche in  $V_n$  auf ein äquivalentes Problem in  $\mathbb{R}^n$  übertragen werden. Dabei werden für  $u_n = \sum_{k=1}^n \xi_{kn} w_k \in V_n$  die Koeffizienten  $\xi_{kn} \in \mathbb{R}$  dieser Linearkombination gesucht. Um den Hilfssatz anwenden zu können, müssen seine Voraussetzungen überprüft werden.

- (1) Es werden zunächst Gleichungen (6.3) aus den Gleichungen (6.1), bzw. (6.2) formuliert.

(2) Die Stetigkeit der  $g_k$  bezüglich  $x \in \overline{U}(0, R^*)$  kann mit Hilfe der Stetigkeit von  $A$  nachgewiesen werden.

(3) Zur Überprüfung der Ungleichung (6.4) wird die Koerzitivität von  $A$  ausgenutzt.

## 2. Schritt:

Es ergeben sich a-priori-Abschätzungen

$$\|u_n\| < R \text{ und } \|u\| < R$$

für die Lösungen  $u_n$  von (6.2) und  $u$  von (6.1) als direkte Folgerungen. Daher ist die Folge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt. Aufgrund der Reflexivität von  $V$  folgt die Existenz einer Teilfolge  $\{u_{n'}\}_{n' \in \mathbb{N}}$ , die schwach gegen ein Element  $u \in V$  konvergiert:  $u_{n'} \rightharpoonup u$  für  $n' \rightarrow \infty$ . Nun muss gezeigt werden, dass  $u$  eine Lösung von (6.1) ist. Dies geschieht im dritten Schritt.

## 3. Schritt:

Hier wird gezeigt, dass das Grenzelement der Teilfolge  $\{u_{n'}\}_{n' \in \mathbb{N}}$  eine Lösung der Operatorgleichung  $Au = f$  ist.

(1) Die Monotonie von  $A$  ergibt das Kriterium

$$0 \leq \langle Av - f, v - u \rangle \text{ für alle } v \in V_N. \quad (6.5)$$

Mit der Dichtheit von  $\bigcup_{N=1}^{\infty} V_N$  in  $V$  und der Stetigkeit von  $A$  kann begründet werden, dass (6.5) für alle  $v \in V$  gilt.

(2) Nun muss die Gültigkeit von

$$\langle Au - f, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in V$$

gezeigt werden. Dies geschieht durch Betrachtung von Elementen  $(u + \lambda v) \in V$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  in Gleichung (6.5) und der Stetigkeit von  $A$  bezüglich  $\lambda$ .

Es folgt der ausführliche Beweis der Aussage I.

**1. Schritt:** Existenz einer Lösung von (6.2):

o.B.d.A. seien die Basiselemente  $w_k \in V_n$ ,  $k = 1, \dots, n$  normierte Funktionen. Aus (6.1) bzw. (6.2) werden die Funktionen

$$g(u) = \langle Au - f, u \rangle, \quad g_k(u) = \langle Au - f, w_k \rangle$$

definiert. Damit lauten die Galerkin-Gleichungen nun:

Gesucht ist  $u_n = \sum_{k=1}^n c_{kn} w_k \in V_n$ , sodass

$$g_k(u_n) = 0 \text{ für } k = 1, \dots, n. \quad (6.6)$$

Beziehungsweise in  $\mathbb{R}^n$ : Gesucht ist  $\mathbf{x} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ , sodass

$$g_{kn}(\mathbf{x}) = 0 \text{ für } 1 \leq k \leq n, \quad (6.7)$$

wobei  $g_{kn}(\mathbf{x}) = g_k(\sum_{l=1}^n \xi_l w_l) = \left\langle A\left(\sum_{l=1}^n \xi_l w_l\right) - f, w_k \right\rangle$  ist.

Aus der Stetigkeit von  $A$  und da  $(Au_n - f) \in V'$  ist, folgt die Stetigkeit der Funktionen  $g_k : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \mapsto g_k(u)$ ,  $k = 1, \dots, n$  auf  $V$  und insbesondere auf  $V_n$ . Da eine Folge  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V_n$  mit  $v_n = \sum_{l=1}^n \xi_l w_l$  genau dann in  $V_n$  konvergiert, wenn die Folge der Koeffizienten  $\{\mathbf{x}_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}^n$  konvergiert, folgt daraus insbesondere auch die Stetigkeit der Funktionen  $g_{kn} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  für  $1 \leq k \leq n$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{g(u)}{\|u\|} &= \frac{1}{\|u\|} \langle Au - f, u \rangle = \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} - \frac{\langle f, u \rangle}{\|u\|} \geq \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} - \left| \frac{\langle f, u \rangle}{\|u\|} \right| \\ &\geq \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} - \|f\|_{V'}. \end{aligned}$$

Somit folgt aus der Koerzitivität von  $A$

$$\frac{g(u)}{\|u\|} \geq \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} - \|f\|_{V'} \rightarrow \infty \text{ falls } \|u\| \rightarrow \infty.$$

Daher existiert eine reelle Zahl  $R > 0$ , sodass

$$g(u) > 0 \text{ für alle } u \in V \text{ mit } \|u\| \geq R. \quad (6.8)$$

Hieraus folgt nun für alle  $v \in V_n$  mit  $\|v\| = R$  und  $v = \sum_{l=1}^n \xi_l w_l$ ,  $\mathbf{x} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ :

$$\begin{aligned} 0 < g(v) &= \langle Av - f, v \rangle = \left\langle Av - f, \sum_{k=1}^n \xi_k w_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n g_k(v) \xi_k \\ &= \sum_{k=1}^n g_{kn}(\mathbf{x}) \xi_k. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Die Abbildung  $V_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\sum_{k=1}^n \xi_k w_k \mapsto \mathbf{x} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  ist ein Isomorphismus zwischen  $V_n$  und  $\mathbb{R}^n$ . Es existieren also Konstanten  $0 < c_n \leq C_n$ , die von  $n$  abhängen können, mit

$$c_n \|v\| \leq \|\mathbf{x}\| \leq C_n \|v\| \text{ für alle } v \in V_n. \quad (6.10)$$

Mit (6.9) und (6.10) gilt nun

$$\sum_{k=1}^n g_{kn}(\mathbf{x}) \xi_k \geq 0$$

für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|\mathbf{x}\| \geq C_n R$ .

Damit ist der Hilfssatz 6.2 auf die Gleichungen (6.7) anwendbar und somit existiert für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Lösung  $\mathbf{x} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  von (6.7). Dies läßt sich auf die Räume  $V_n$  übertragen, sodass zu Gleichung (6.6) für alle  $n \in \mathbb{N}$  eine Lösung  $u_n$  existiert mit der Gestalt  $u_n = \sum_{k=1}^n \xi_{kn} w_k$ .

## 2. Schritt: A-priori-Abschätzungen:

Ist  $u_n$  eine Lösung der Galerkin-Gleichungen (6.2), so ist  $g(u_n) = 0$ . Nach Ungleichung (6.8) muss daher  $\|u_n\| \leq R$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  sein. Da Gleichung (6.1) äquivalent ist zu  $g(u) = \langle Au - f, u \rangle = \langle 0, u \rangle = 0$ , folgt ebenfalls aus (6.8), dass für jede Lösung  $u$  der Operatorgleichung (6.1) gilt:  $\|u\| \leq R$ .

Aus der Beschränktheit der Folge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  und der Reflexivität von  $V$  folgt mit Satz 5.24, dass ein  $u \in V$  und eine Teilfolge  $\{u_{n'}\}_{n' \in \mathbb{N}}$  von  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  existiert, die schwach gegen  $u$  konvergiert:  $u_{n'} \rightharpoonup u$  für  $n' \rightarrow \infty$ . Es muss nun gezeigt werden, dass  $u$  die Operatorgleichung löst.

**3. Schritt:**

Wir zeigen, dass  $u$  aus Schritt 2 eine Lösung von (6.1) ist. Der folgende Beweis orientiert sich an den Ausführungen in [19, S. 47].

Aus der Monotonie von  $A$  folgt für  $v \in V_N$  und  $u_m \in \{u_{n'}\}_{n' \in \mathbb{N}}$  mit  $m \geq N$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle Av - Au_m, v - u_m \rangle \\ &= \langle Av - f + f - Au_m, v - u_m \rangle \\ &= \langle Av - f, v - u_m \rangle - \underbrace{\langle Au_m - f, v - u_m \rangle}_{B=0} \\ &= \langle Av - f, v - u_m \rangle. \end{aligned}$$

Der Ausdruck  $B$  ist null, da  $(v - u_m) \in V_N \subset V_m$  und  $u_m$  Lösung der Galerkin-Gleichungen auf  $V_m$  ist, d.h.  $\langle Au_m - f, w \rangle = 0$  für alle  $w \in V_m$ . Durch die schwache Konvergenz ergibt sich für  $m \rightarrow \infty$  aus dieser Abschätzung das Kriterium (6.5)

$$0 \leq \langle Av - f, v - u \rangle \quad \forall v \in V_N.$$

Mit der Dichtheit von  $\bigcup_{N=1}^{\infty} V_N$  in  $V$  und der Stetigkeit von  $A$  kann die Gültigkeit von (6.5) für alle  $v \in V$  wie folgt begründet werden: Sei  $v \in V$  und  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} V_N$  mit  $v = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k$ .

Weiter sei  $h(x) = \langle Ax - f, x - u \rangle$ . Wegen der Stetigkeit von  $A$  und da  $(Ax - f) \in V'$  ist, bildet  $h$  eine bezüglich  $x$  stetige Funktion. Daher gilt

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} h(v_k) = h(\lim_{k \rightarrow \infty} v_k) = h(v).$$

Folglich gilt

$$0 \leq \langle Av - f, v - u \rangle \quad \forall v \in V. \quad (6.11)$$

Nun muss die Gültigkeit von

$$\langle Au - f, v \rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in V$$

gezeigt werden. Dazu werden Elemente  $(u + \lambda v) \in V$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  in Gleichung (6.11) eingesetzt.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle A(u + \lambda v) - f, (u + \lambda v) - u \rangle = \langle A(u + \lambda v) - f, \lambda v \rangle \\ &= \lambda \langle A(u + \lambda v) - f, v \rangle. \end{aligned}$$

Falls  $\lambda > 0$  ist, so ist auch  $\langle A(u + \lambda v) - f, v \rangle \geq 0$ . Aus der Stetigkeit von  $A$  folgt damit für  $\lambda \rightarrow 0_+$ , dass auch  $\langle Au - f, v \rangle \geq 0$  ist. Im Fall  $\lambda \leq 0$  muss aufgrund obiger Ungleichung  $\langle A(u + \lambda v) - f, v \rangle \leq 0$  sein. Wegen der Stetigkeit von  $A$  ist daher für  $\lambda \rightarrow 0_-$  die Bedingung  $\langle Au - f, v \rangle \leq 0$  gültig. Daher ist  $\langle Au - f, v \rangle = 0$  für alle  $v \in V$ . Dies ist äquivalent zu  $Au = f$  und die Folge  $\{u_{n'}\}_{n' \in \mathbb{N}}$  konvergiert somit schwach gegen eine Lösung  $u$  von (6.1). Da  $f$  beliebig ist, ist (6.1) erfüllt für alle  $f \in V'$ . Wir fassen die Überlegungen zu (6.11) zusammen:

**SCHLUSSFOLGERUNG 6.3. Maximale Monotonie**

Ist  $A : V \rightarrow V'$  ein monotoner und stetiger Operator auf dem reellen, reflexiven Banachraum  $V$ , so ist  $A$  maximal monoton, d.h. aus

$$\langle Av - f, v - u \rangle \geq 0 \text{ für alle } v \in V$$

folgt bei festem  $u \in V$  und  $f \in V'$  die Beziehung  $Au = f$ .

**Beweis von II. Lösungsmenge  $S$  von (6.1).**

- (1) Existenz der Lösung für alle  $f \in V'$ :  
Nach dem dritten Schritt im Beweis von I ist die Lösungsmenge  $S$  für ein beliebiges, fest gewähltes  $f \in V'$  nicht leer, da  $u$  mit  $u_{n'} \rightarrow u$  eine Lösung ist. Daher existiert für jedes  $f \in V'$  ein Element  $u \in V$  mit  $Au = f$ .
- (2) Beschränktheit von  $S$ :  
Wegen  $\|u\| < R$  für alle Lösungen  $u$  von (6.1) ist  $S$  beschränkt.
- (3) Abgeschlossenheit von  $S$ :  
Es ist  $S = \{u \in V \mid Au = f, f \text{ fest}\}$ . Daher ist  $A(S) = f$  und  $\{f\}$  ist als einelementige Menge abgeschlossen. Die Abgeschlossenheit ihres Urbildes  $S$  ergibt sich nun aus dem folgenden Satz:

**SATZ 6.4.** *Unter einer stetigen Abbildung ist das Urbild einer abgeschlossenen Menge ebenfalls abgeschlossen.*

- (4) Konvexität von  $S$ :  
Seien  $u_1, u_2 \in S$ , d.h.  $Au_i = f$ ,  $i = 1, 2$ . Dann folgt für

$$u = t_1 u_1 + t_2 u_2 \quad \text{mit } 0 \leq t_1, t_2 \leq 1, \quad t_1 + t_2 = 1$$

die Ungleichung

$$\langle f - Av, u - v \rangle = \sum_{i=1}^2 t_i \langle Au_i - Av, u_i - v \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } v \in V$$

aus der Monotonie des Operators. Durch Ausnutzung der maximalen Monotonie von  $A$ , siehe Schlussfolgerung 6.3, folgt damit wiederum  $Au = f$ , also  $u \in S$ .

**Beweis von III. Eindeutigkeit.**

Es wird angenommen, dass zwei Lösungen  $u, v$  mit  $u \neq v$  und  $Au = Av = f$  existieren. Die Berücksichtigung der strengen Monotonie ergibt

$$0 < \langle Au - Av, u - v \rangle = \langle 0', u - v \rangle = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch! Folglich existiert eine eindeutige Lösung.

**Beweis von IV. Inverser Operator.**

- (1) (a) Existenz des inversen Operators:  
Da der ganze Raum  $V'$  das Bild von  $A$  bildet, ist  $A$  surjektiv. Aufgrund der strengen Monotonie ist  $A$  auch injektiv. Folglich ist  $A$  bijektiv und  $A^{-1}$  existiert.
- (b) Strenge Monotonie des inversen Operators:  
Wegen der strengen Monotonie und der Bijektivität von  $A$  gilt

$$\langle f_1 - f_2, A^{-1}f_1 - A^{-1}f_2 \rangle = \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle > 0.$$

(c) Beschränktheit des inversen Operators:

$A$  ist koerzitiv. Deshalb gilt für den inversen Operator

$$\frac{\langle f, A^{-1}f \rangle}{\|A^{-1}f\|} \leq \|f\|_{V'} \rightarrow \infty \quad \text{falls } \|A^{-1}f\| = \|u\| \rightarrow \infty.$$

Wenn  $\|f\|_{V'} < C$  ist, dann ist auch  $\|A^{-1}f\| < C^* < \infty$ , denn sonst erhält man einen Widerspruch zur Koerzitivität von  $A$ . Folglich ist  $A^{-1}$  beschränkt, da eine beliebige beschränkte Menge aus  $V'$  auf eine beschränkte Menge in  $V$  abgebildet wird.

(2) Stetigkeit von  $A^{-1}$  bei gleichmäßiger Monotonie von  $A$ :

Der Operator  $A$  ist gleichmäßig monoton, d.h.

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq b(\|u - v\|) \|u - v\| \quad \text{für alle } u, v \in V. \quad (6.12)$$

Die linke Seite dieser Ungleichung kann für  $Au = f$ ,  $Av = g$  nach oben abgeschätzt werden durch

$$|\langle Au - Av, u - v \rangle| = |\langle f - g, u - v \rangle| \leq \|f - g\|_{V'} \|u - v\|. \quad (6.13)$$

Dadurch ergibt sich aus (6.12) und (6.13)

$$\begin{aligned} b(\|u - v\|) \|u - v\| &\leq \|f - g\|_{V'} \|u - v\| \\ b(\|u - v\|) &\leq \|f - g\|_{V'}. \end{aligned}$$

Da die Funktion  $b$  streng monoton ist, existiert die Umkehrfunktion  $b^{-1}$  und es folgt

$$\|u - v\| = \|A^{-1}f - A^{-1}g\| \leq b^{-1}(\|f - g\|_{V'}).$$

Die Funktion  $b^{-1}$  ist eine monotone und stetige Funktion mit  $b^{-1}(0) = 0$ . Daraus ergibt sich die Stetigkeit von  $A^{-1}$ .

(3) Lipschitz-Stetigkeit von  $A^{-1}$  bei starker Monotonie von  $A$ :

Nach Voraussetzung ist  $A$  stark monoton, d.h. es existiert eine Konstante  $c > 0$ , sodass

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq c \|u - v\|^2 \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Durch die Abschätzung (6.13) für  $Au = f$ ,  $Av = g$  ergibt sich

$$c \|u - v\|^2 \leq \|f - g\|_{V'} \|u - v\|.$$

Dann folgt die Lipschitz-Stetigkeit von  $A^{-1}$  aus der Ungleichung

$$\|u - v\| = \|A^{-1}f - A^{-1}g\| \leq \frac{1}{c} (\|f - g\|_{V'}).$$

### Beweis von V. Starke Konvergenz der Galerkin-Methode.

Wir geben zunächst die Beweisidee an.

Die Eindeutigkeit der Lösung  $u$  von (6.1) folgt aus **III**.

(1) Es ist die schwache Konvergenz der Folge der Galerkin-Lösungen  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  zu zeigen. Dazu wird Satz 5.24 ausgenutzt und ein Widerspruch zur schwachen Konvergenz einer Teilfolge erzeugt.

- (2) Es ist zu zeigen, dass aus der gleichmäßigen Monotonie und der Stetigkeit von  $A$  die starke Konvergenz der Folge der Galerkin-Lösungen gegen die eindeutige Lösung  $u$  von (6.1) folgt, also

$$u_n \rightarrow u \quad \text{stark in } V.$$

Dazu soll aus der Bedingung der gleichmäßigen Monotonie Normkonvergenz gefolgert werden. Hierbei ist es von besonderer Wichtigkeit, nachzuweisen, dass die Folge  $\{Au_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $V'$  beschränkt ist.

Dies erfolgt, indem zunächst im **1. Schritt** die lokale Beschränktheit des Operators  $A$  mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises gezeigt wird.

**DEFINITION 6.5.** Lokale Beschränktheit

Der Operator  $A$  ist lokal beschränkt, wenn für alle  $w \in V$  eine Umgebung  $\mathcal{U}(w) \subset V$  existiert, sodass  $A(\mathcal{U}(w))$  beschränkt ist.

Damit kann im **2. Schritt** die Beschränktheit der Menge  $\{A(u_n), n \in \mathbb{N}\}$  nachgewiesen werden.

Es folgt der ausführliche Beweis.

### Schwache Konvergenz:

Nach I. und III. hat die Folge der Galerkin-Lösungen eine Teilfolge  $\{u_{n'}\}_{n' \in \mathbb{N}}$ , die schwach zur eindeutigen Lösung  $u$  von (6.1) konvergiert. Aufgrund der Beschränktheit von  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , ist auch jede ihrer Teilfolgen  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  beschränkt. Daher hat jede dieser Teilfolgen eine schwach konvergente Teilfolge  $\{u_{m'}\}_{m' \in \mathbb{N}}$  mit

$$u_{m'} \rightharpoonup u^* \quad \text{für } m' \rightarrow \infty.$$

Da die Lösung  $u$  eindeutig ist, gilt  $u^* = u$ .

Nun wird angenommen, dass die Gesamtfolge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  nicht schwach gegen  $u$  konvergiert. Daher gibt es ein  $f \in V'$ , sodass

$$\langle f, u_n \rangle \not\rightarrow \langle f, u \rangle \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Das heißt, es gibt eine Teilfolge  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ , sodass für  $\varepsilon_0 > 0$  gilt

$$|\langle f, u_m \rangle - \langle f, u \rangle| \geq \varepsilon_0 \quad \text{für alle } u_m.$$

Da  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  aber eine schwach konvergente Teilfolge  $\{u_{m'}\}_{m' \in \mathbb{N}}$  besitzt mit

$$u_{m'} \rightharpoonup u \quad \text{für } m' \rightarrow \infty,$$

ist dies ein Widerspruch. Also konvergiert die gesamte Folge der Galerkin-Lösungen schwach gegen die Lösung  $u$  von (6.1).

### Starke Konvergenz:

Aufgrund der gleichmäßigen Monotonie ist

$$\begin{aligned} b(\|u - u_n\|) \|u - u_n\| &\leq \langle Au - Au_n, u - u_n \rangle \\ &= \langle Au, u \rangle - \langle Au, u_n \rangle - \langle Au_n, u \rangle + \langle Au_n, u_n \rangle \\ &= \langle f, u \rangle - \langle f, u_n \rangle - \langle Au_n, u \rangle + \langle f, u_n \rangle \\ &= \langle f - Au_n, u \rangle, \end{aligned} \tag{6.14}$$

denn es gilt, dass  $\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle$  für alle  $v \in V$  und  $\langle Au_n, v_n \rangle = \langle f, v_n \rangle$  für alle  $v_n \in V_n$  ist. Da  $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  nach Voraussetzung eine Schauderbasis von  $V$  ist, existieren für  $u \in V$  eindeutige

Koeffizienten  $\xi_k \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , sodass  $u = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k w_k$ . Für  $\hat{u}_l = \sum_{k=1}^l \xi_k w_k \in V_l \subseteq V$  gilt folglich  $\|u - \hat{u}_l\| \rightarrow 0$  für  $l \rightarrow \infty$ . Außerdem gilt für alle  $n \geq l$  wegen  $\hat{u}_l \in V_l \subseteq V_n$  die Beziehung  $\langle Au_n, \hat{u}_l \rangle = \langle f, \hat{u}_l \rangle$ . Damit läßt sich der letzte Ausdruck aus (6.14) im Falle  $l = n$  wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \langle f - Au_n, u \rangle &= \langle f - Au_n, u \rangle - \underbrace{\langle f - Au_n, \hat{u}_n \rangle}_{=0} \\ &= \langle f - Au_n, u - \hat{u}_n \rangle \end{aligned}$$

und somit

$$|\langle f - Au_n, u \rangle| \leq \|f - Au_n\|_{V'} \|u - \hat{u}_n\|, \quad \text{wobei } \|u - \hat{u}_n\| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Falls gezeigt werden kann, dass  $\{Au_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $V'$  beschränkt ist, so folgt:

$$\begin{aligned} |\langle f - Au_n, u \rangle| &\leq (\|f\|_{V'} + \|Au_n\|_{V'}) \|u - \hat{u}_n\| \\ &\leq c \|u - \hat{u}_n\| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{6.15}$$

**Behauptung:**  $\{Au_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine beschränkte Menge in  $V'$ .

Wir beweisen die Behauptung in zwei Schritten.

### 1. Schritt:

Zunächst wird durch einen Widerspruchsbeweis gezeigt, dass der Operator  $A$  lokal beschränkt ist. Dazu wird angenommen, es existiere ein Element  $w_0 \in V$  und eine Folge  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in V$  mit  $v_n \rightarrow w_0$  in  $V$  und  $\|Av_n\|_{V'} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Aufgrund der Stetigkeit von  $A$  folgt aber aus  $v_n \rightarrow w_0$  in  $V$  auch die Konvergenz  $Av_n \rightarrow Aw_0$  in  $V'$ , weshalb  $\{Av_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist. Dies ist ein Widerspruch, also ist  $A$  lokal beschränkt. Es folgt daher für  $w_0 = 0$  die Existenz von reellen Zahlen  $r, \delta > 0$ , sodass mit  $\|v\| \leq r$  auch  $\|Av\|_{V'} \leq \delta$  erfüllt ist.

### 2. Schritt: Beschränktheit von $\{Au_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $V'$ .

Nach der Definition der Norm in  $V'$  ist

$$\|Au_n\|_{V'} = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=r}} \frac{1}{r} \langle Au_n, v \rangle.$$

Aufgrund der Monotonie von  $A$  gilt

$$\|Au_n\|_{V'} = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=r}} \frac{1}{r} \langle Au_n, v \rangle \leq \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=r}} \frac{1}{r} (\langle Au_n, u_n \rangle + \langle Av, v \rangle - \langle Av, u_n \rangle),$$

da  $\langle Au_n - Av, u_n - v \rangle \geq 0$ . Durch Ausnutzung der Galerkin-Gleichungen und der lokalen Beschränktheit von  $A$  kann dieser Ausdruck weiter abgeschätzt werden:

$$\sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=r}} \frac{1}{r} (\langle Au_n, u_n \rangle + \langle Av, v \rangle - \langle Av, u_n \rangle) \leq \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=r}} \frac{1}{r} (\langle f, u_n \rangle + \delta r + \delta \|u_n\|).$$

Da die Folge der Galerkin-Lösungen nach **Schritt 2** unter **I.** beschränkt ist mit  $\|u_n\| \leq R$ , gilt:

$$\|Au_n\|_{V'} \leq \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=r}} \frac{1}{r} (\|f\|_{V'} R + \delta r + \delta R) < c.$$

Dabei ist die Konstante  $c$  unabhängig vom Index  $n$  und die Behauptung ist bewiesen.

Es folgt, dass  $\{Au_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt in  $V'$  ist und es gilt Ungleichung (6.15). Also ergibt sich Normkonvergenz aus

$$0 \leq |b(\|u - u_n\|)| \|u - u_n\| \leq |\langle f - Au_n, u \rangle| \leq c \|u - \hat{u}_n\| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

## Der $p$ -Laplace-Operator

ALEXANDER WEISS

### 1. Einleitung

In diesem Vortrag behandeln wir den  $p$ -Laplace-Operator als Prototyp eines nichtlinearen monotonen Operators. Wir werden uns zunächst mit dem Fall homogener Dirichlet-Randbedingungen befassen und die Monotonie, Koerzitivität und Stetigkeit des zugehörigen Operators der Variationsformulierung zeigen. Anders als in Vortrag 4 sind die dabei verwendeten Techniken nicht für den  $p$ -Laplace-Operator spezifisch, sondern lassen sich auf eine große Klasse von nichtlinearen Problemen übertragen. Der Hauptsatz der Monotonen Operatoren liefert dann die eindeutige Lösbarkeit der Variationsformulierung.

Im zweiten Teil werden wir uns mit dem Fall inhomogener Randbedingungen befassen und schließlich sehen, dass die beiden Fälle typische Beispiele für quasilineare Differentialgleichungen vom Grad 2 sind, für die ein allgemeiner Lösungssatz angegeben werden kann.

Der Vortrag und die Vorgehensweise lehnt sich an [28] und [18] an.

**DEFINITION 7.1** ( $p$ -Laplace-Operator). Sei  $p \in \mathbb{R}, p > 1$ . Der  $p$ -Laplace-Operator  $L$  ist definiert durch

$$Lu := -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u). \quad (7.1)$$

Wir definieren die vektorwertige Funktion  $g$ :

**DEFINITION 7.2.** Für festes  $p > 1$  ist die Funktion  $g$  definiert als:

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \vec{\zeta} \mapsto |\vec{\zeta}|^{p-2} \vec{\zeta}.$$

**BEMERKUNG 7.3.** Für  $p < 2$  und  $\vec{\zeta} = \vec{0}$  ist  $g(\vec{\zeta})$  offenbar nicht definiert, jedoch existiert der Grenzwert  $\left| |\vec{\zeta}|^{p-2} \vec{\zeta} \right| = |\vec{\zeta}|^{p-1} \rightarrow 0$  für  $\vec{\zeta} \rightarrow \vec{0}$ .

Mit dieser Definition von  $g$  ist  $Lu = -\operatorname{div}(g(\nabla u))$ .

**1.1. Verwendete Räume.** Wir werden die Funktionenräume  $L^p(\Omega)$  und  $W_0^{1,p}(\Omega)$  bzw.  $W^{1,p}(\Omega)$  verwenden. Sei  $q$  durch  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  definiert. Durch Nachrechnen erhält man:

**LEMMA 7.4.** Es gilt:  $p = (p-1)q$ .

**LEMMA 7.5.** Sei  $\vec{\zeta} \in L^p(\Omega)$ . Dann ist  $g(\vec{\zeta}) = \left( |\vec{\zeta}|^{p-2} \vec{\zeta} \right) \in L^q(\Omega)$  und es gilt:

$$\|g(\vec{\zeta})\|_{L^q(\Omega)} = \|\vec{\zeta}\|_{L^p(\Omega)}^{p/q}. \quad (7.2)$$

BEWEIS. Es ist

$$\left\| |\zeta|^{p-2} \zeta \right\|_{L^q(\Omega)}^q = \int_{\Omega} \left| |\zeta|^{p-2} \zeta \right|^q dx = \int_{\Omega} |\zeta|^{(p-1)q} dx = \left\| \zeta \right\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

□

## 2. Homogene Dirichlet-Randbedingungen

Für  $p > 1$  und für ein beschränktes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  mit Lipschitz-Rand ist die Lösung des folgenden Problems gesucht:

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei  $L$  wie in (7.1) gegeben ist.

Durch Multiplikation mit einer Testfunktion  $v$ , Integration über  $\Omega$  und Anwendung des Satzes von Gauss (wobei das Randintegral verschwindet, da  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$  ist) erhält man folgende Variationsformulierung:

Suche  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , so dass

$$\int_{\Omega} g(\nabla u) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

DEFINITION 7.6. Der Operator  $A : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow (W_0^{1,p}(\Omega))'$ ,  $u \mapsto Au$  ist definiert durch

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} g(\nabla u) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

LEMMA 7.7. Der Operator  $A$  aus Definition 7.6 bildet von  $W_0^{1,p}(\Omega)$  nach  $(W_0^{1,p}(\Omega))'$  ab.

BEWEIS. Linearität und Stetigkeit von  $\langle Au, v \rangle$  bezüglich  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$  ergeben sich aus der Linearität und Stetigkeit des Integrals. Noch zu zeigen ist, dass das Integral existiert. Seien also  $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Mit der Hölder-Ungleichung und Lemma 7.5 gilt dann:

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle &\leq \left( \int_{\Omega} |g(\nabla u)|^q dx \right)^{1/q} \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \|g(\nabla u)\|_{L^q(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \\ &\stackrel{(7.2)}{=} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{p/q} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} < \infty. \end{aligned}$$

□

Wir können also die Variationsformulierung schreiben als:

$$\text{Suche } u \in W_0^{1,p}(\Omega), \text{ so dass } Au = F \text{ mit } F \in (W_0^{1,p}(\Omega))'.$$

Man kann z.B.  $F(v) = \int_{\Omega} f v dx$  wählen, wobei  $f \in L^q(\Omega)$  ist.

### 2.1. Koerzitivität.

SATZ 7.8 (Poincaré-Friedrichs-Ungleichung). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Weiter sei  $V \subset W^{1,p}(\Omega)$  ein abgeschlossener Unterraum mit der Eigenschaft

$$\forall v \in V : \nabla v = 0 \implies v = 0.$$

Dann gibt es eine Konstante  $c_{PF} > 0$ , so dass gilt:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c_{PF} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Einen Beweis für  $p = 2$  findet man z.B. in [26, S. 121]. Dieser Beweis lässt sich direkt auf den Fall  $p \in (1, \infty)$  übertragen.

KOROLLAR 7.9 (Normäquivalenz in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ). Für  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  gilt:

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

BEWEIS. Trivialerweise gilt:

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p.$$

Offenbar gilt für  $v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \nabla v = 0 \implies v = 0$ . Also ist Satz 7.8 anwendbar und damit ist

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p = \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \leq (c_{PF}^p + 1) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Also folgt die behauptete Normäquivalenz.  $\square$

Mit Hilfe der Normäquivalenz 7.9 lässt sich die Koerzitivität des  $p$ -Laplace-Operators auf  $W_0^{1,p}(\Omega)$  leicht zeigen:

SATZ 7.10 (Koerzitivität des  $p$ -Laplace-Operators). Der Operator  $A$  aus Definition 7.6 ist koerzitiv auf  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

BEWEIS. Es ist

$$\langle Au, u \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \geq c^p \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p.$$

Da  $p > 1$ , also  $p - 1 > 0$ , folgt damit

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}} \geq c^p \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \rightarrow \infty \quad \text{für } \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow \infty.$$

Also ist  $A$  koerzitiv.  $\square$

BEMERKUNG 7.11. Wie wir sehen werden, folgt im Fall  $p \geq 2$  die Koerzitivität auch direkt aus der gleichmäßigen Monotonie.

**2.2. Monotonie.** Zunächst benötigen wir eine wichtig Hilfsungleichung:

LEMMA 7.12. Es existiert ein  $c > 0$ , so dass für  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$(g(\vec{a}) - g(\vec{b})) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \geq c(|\vec{a}| + |\vec{b}|)^{p-2} |\vec{a} - \vec{b}|^2. \quad (7.3)$$

BEMERKUNG 7.13. Man kann eine entsprechende Ungleichung für viele Funktionen  $g$  herleiten, tatsächlich wird nur benötigt, dass die im folgenden Beweis definierte Hilfsfunktion  $w$  eine Art Konvexitätsbedingung erfüllt für  $\vec{b} \in \mathbb{R}^d$ :

$$\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j = (D^2 w)(\vec{x})[\vec{b}, \vec{b}] \geq c |\vec{x}|^{p-2} |\vec{b}|^2$$

Diese Eigenschaft wurde für  $g$  bereits in Vortrag 4 gezeigt.

BEWEIS. Es wird hier nur der Beweis für  $p \in (1, 2]$  geführt. Für  $p > 2$  ist er etwas aufwendiger und kann in [14] nachgelesen werden.

Wir betrachten die Hilfsfunktion  $w(\vec{x}) = \frac{1}{p} |\vec{x}|^p$ . Man berechnet als Ableitungen:

$$\begin{aligned} (Dw)(\vec{x}) &= |\vec{x}|^{p-2} \vec{x} = g(\vec{x}), \\ (D^2 w)(\vec{x}) &= (p-2) |\vec{x}|^{p-4} \vec{x} \vec{x}^T + |\vec{x}|^{p-2} I. \end{aligned}$$

Setzt man nun für  $t \in [0, 1]$ :  $f(t) := w(\vec{b} + t(\vec{a} - \vec{b}))$ , so gilt:

$$\begin{aligned} w(\vec{a}) - w(\vec{b}) &= f(1) - f(0) \\ &= f'(0) + \int_0^1 (1-t) f''(t) dt \\ &= (Dw)(\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) + \int_0^1 (1-t) (D^2 w)(\vec{b} + t(\vec{a} - \vec{b})) [\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}] dt \\ &\geq g(\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) + \int_0^1 (1-t) c |\vec{b} + t(\vec{a} - \vec{b})|^{p-2} |\vec{a} - \vec{b}|^2 dt \\ &\geq g(\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) + \frac{c}{2} \left( |\vec{a}| + |\vec{b}| \right)^{p-2} |\vec{a} - \vec{b}|^2. \end{aligned}$$

Für den letzten Schritt wurden  $p \leq 2$  und die Dreiecksungleichung verwendet. Entsprechend erhält man

$$w(\vec{b}) - w(\vec{a}) \geq g(\vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + c \left( |\vec{a}| + |\vec{b}| \right)^{p-2} |\vec{a} - \vec{b}|^2.$$

Durch Addition ergibt sich die gesuchte Ungleichung (7.3).  $\square$

SATZ 7.14 (Monotonie des  $p$ -Laplace-Operators). *Der Operator  $A$  aus Definition 7.6 ist streng monoton, für  $p > 2$  gleichmäßig monoton und für  $p = 2$  sogar stark monoton auf  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .*

BEWEIS. Seien  $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Mit Lemma 7.12 gilt:

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \cdot (\nabla u - \nabla v) dx \\ &= \int_{\Omega} (g(\nabla u) - g(\nabla v)) \cdot (\nabla u - \nabla v) dx \\ &\geq c \int_{\Omega} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2} |\nabla u - \nabla v|^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

Aus  $\langle Au - Av, u - v \rangle = 0$  folgt  $\nabla u - \nabla v = 0$  und mit der Normäquivalenz aus Korollar 7.9  $\|u - v\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u - \nabla v\|_{L^p(\Omega)} = 0$ , also  $u = v$ .

Somit ist  $A$  streng monoton. Weiter gilt für  $p \geq 2$  mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2} \geq |\nabla u - \nabla v|^{p-2}$$

und es folgt wieder mit Korollar 7.9

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &\geq c \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^p dx \\ &= c \|\nabla u - \nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p \\ &\geq \tilde{c} \|u - v\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p = b(\|u - v\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \|u - v\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

mit  $b(t) = \tilde{c}t^{p-1}$ ,  $p \geq 2$ .

Also ist  $A$  für  $p = 2$  stark monoton und gleichmäßig monoton für  $p > 2$ .  $\square$

### 2.3. Stetigkeit.

Ein Hilfsmittel, um die Stetigkeit des Operators  $A$  aus Definition 7.6 zu zeigen, ist folgendes Lemma über Nemyckii-Operatoren.

LEMMA 7.15 (Nemyckii-Operator). *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  eine messbare Menge,  $\vec{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \in L^p(\Omega)$ , d.h.  $u_i \in L^p(\Omega)$  für  $1 \leq i \leq n$ . Die Funktion  $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  erfülle folgende Eigenschaften:*

- (1) *Carathéodory-Bedingung:*  
 $f(\cdot, \vec{\eta}) : x \rightarrow f(x, \vec{\eta})$  ist messbar auf  $\Omega$  für alle  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$ ,  
 $f(x, \cdot) : \vec{\eta} \rightarrow f(x, \vec{\eta})$  ist stetig auf  $\mathbb{R}^n$  für fast alle  $x \in \Omega$ .
- (2) *Wachstums-Bedingung:* für alle  $(x, \vec{\eta}) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$  gilt:

$$|f(x, \vec{\eta})| \leq |a(x)| + b \sum_{i=1}^n |\eta_i|^{p/q} \quad (7.4)$$

mit  $b > 0$  und  $a \in L^q(\Omega)$ .

Dann nennt man

$$(F\vec{u})(x) := f(x, u_1(x), \dots, u_n(x))$$

Nemyckii-Operator und es gilt:

- $F : (L^p(\Omega))^n \rightarrow L^q(\Omega)$ .
- $F$  ist stetig.
- $F$  ist beschränkt mit

$$\|F\vec{u}\|_{L^q(\Omega)} \leq c \left( \|a\|_{L^q(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^p(\Omega)}^{p/q} \right).$$

BEWEIS. (vgl [18], S. 66) Der Beweis wird nur für  $n = 1$  gezeigt, der allgemeine Fall folgt analog. Zunächst bemerkt man, dass aus der Carathéodory-Bedingung sofort die Messbarkeit von  $Fu$  für  $u \in L^p(\Omega)$  folgt. Somit kann man die Beschränktheit von  $F$  wie folgt zeigen:

Sei  $u \in L^p(\Omega)$ . Dann gilt wegen der Wachstumsbedingung und Ungleichung (4.2):

$$\begin{aligned} \|Fu\|_{L^q(\Omega)}^q &= \int_{\Omega} |f(x, u(x))|^q dx \\ &\leq \int_{\Omega} (|a(x)| + b|u(x)|^{p/q})^q dx \\ &\leq c \int_{\Omega} |a(x)|^q + b^q |u(x)|^p dx \\ &= c(\|a\|_{L^q(\Omega)}^q + b^q \|u\|_{L^p(\Omega)}^p). \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort die Beschränktheit von  $Fu$ . Um die Stetigkeit zu zeigen sei  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \subset L^p(\Omega)$  eine Folge mit  $u_n \rightarrow u$  in  $L^p(\Omega)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))|^q &\leq c(|f(x, u_n(x))|^q + |f(x, u(x))|^q) \\ &\leq c(|a(x)|^q + b^q |u_n(x)|^p + |f(x, u(x))|^q) \\ &:= h_n(x) \end{aligned}$$

Nach Integration über  $\Omega$  ergibt sich

$$\|Fu_n - Fu\|_{L^q(\Omega)}^q \leq \int_{\Omega} h_n dx.$$

Definiert man weiter  $h(x) := c(|a(x)|^q + b^q |u(x)|^p + |f(x, u(x))|^q)$ , so gilt wegen  $u_n \rightarrow u$  in  $L^p(\Omega)$

$$\int_{\Omega} h_n(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} h(x) dx.$$

Wir haben also folgende Situation:

$$|Fu_n(x) - Fu(x)|^q \leq h_n(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega$$

und  $h_n \rightarrow h$  in  $L^1(\Omega)$ .

Aus der Folge  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  kann eine Teilfolge  $\{u_{n'}, n' \in \mathbb{N}\}$  ausgewählt werden mit  $u_{n'}(x) \rightarrow u(x)$  für fast alle  $x \in \Omega$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  folgt für diese Teilfolge:

$$Fu_{n'}(x) = f(x, u_{n'}(x)) \rightarrow f(x, u(x)) = Fu(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Die Folgen  $\{|Fu_{n'} - Fu|^q, n' \in \mathbb{N}\}$  und  $\{h_{n'}, n' \in \mathbb{N}\}$  erfüllen somit die Voraussetzungen des verallgemeinerten Satzes über majorisierte Konvergenz (vgl. [18], S. 68) und es folgt

$$\|Fu_{n'} - Fu\|_{L^q(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{für } n' \rightarrow \infty. \quad (7.5)$$

Mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises zeigt man, dass (7.5) sogar für die gesamte Folge  $\{Fu_n, n \in \mathbb{N}\}$  gilt.  $\square$

LEMMA 7.16. *Der Operator  $G$ , der durch*

$$(G\vec{u})(x) := g(\vec{u}(x))$$

*definiert wird, ist ein Nemyckii-Operator von  $L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ .*

BEWEIS. Setzt man  $f(x, \vec{\eta}) := g(\vec{\eta})$ , so ist  $f(\cdot, \vec{\eta})$  trivialerweise messbar und  $f(x, \cdot)$  ist offenbar stetig, also erfüllt  $f$  die Carathéodory-Bedingung. Weiter ist wegen  $p - 1 = p/q$  (Lemma 7.4) und der Normäquivalenz in  $\mathbb{R}^n$

$$|f(x, \vec{\eta})| = |\vec{\eta}|^{p-1} \leq c \sum_{i=1}^n |\eta_i|^{p/q}.$$

Somit erfüllt  $f$  die Wachstumsbedingung mit  $a = 0, b = c$ . Also ist der von  $f$  erzeugte Operator  $G$  ein Nemyckii-Operator.  $\square$

SATZ 7.17 (Stetigkeit des  $p$ -Laplace-Operators). *Der Operator  $A$  aus Definition 7.6 ist stetig.*

BEWEIS. Wir betrachten eine Folge  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$  mit  $u_n \rightarrow u$  in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , also insbesondere  $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$  in  $L^p(\Omega)$ . Da der in Lemma 7.16 definierte Operator  $G$  ein Nemyckii-Operator ist, also stetig von  $L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$  abbildet, folgt  $G(\nabla u_n) \rightarrow G(\nabla u)$  in  $L^q(\Omega)$ . Mit der Hölder-Ungleichung und der Normäquivalenz aus Korollar 7.9 gilt für  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} \langle Au_n - Au, v \rangle &= \int_{\Omega} (G(\nabla u_n) - G(\nabla u)) \cdot \nabla v dx \\ &\leq \|G(\nabla u_n) - G(\nabla u)\|_{L^q(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|G(\nabla u_n) - G(\nabla u)\|_{L^q(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \|Au_n - Au\|_{(W_0^{1,p}(\Omega))'} &= \sup\{\langle Au_n - Au, v \rangle, v \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq 1\} \\ &\leq \|G(\nabla u_n) - G(\nabla u)\|_{L^q(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Also konvergiert  $Au_n \rightarrow Au$  in  $(W_0^{1,p}(\Omega))'$  und  $A : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow (W_0^{1,p}(\Omega))'$  ist stetig.  $\square$

#### 2.4. Zusammenfassung.

Wir haben gezeigt, dass der in 7.6 definierte Operator  $A$  monoton, koerzitiv und stetig ist. Somit folgt mit dem Hauptsatz über monotone Operatoren:

SATZ 7.18. *Sei  $\Omega$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet,  $p > 1$  und  $f \in L^q(\Omega)$ . Das Variationsproblem*

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

*besitzt eine eindeutige Lösung  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .*

- Für  $1 < p < 2$  ist der inverse Operator  $A^{-1}$  streng monoton und beschränkt.
- Für  $p > 2$  ist  $A^{-1}$  zusätzlich stetig.
- Für  $p = 2$  ist  $A^{-1}$  sogar Lipschitz-stetig.

### 3. Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen

Wir betrachten nun den  $p$ -Laplace-Operator mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen. Für  $p > 1$  ist also die Lösung des folgenden Problems gesucht:

$$\begin{aligned} Lu = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die Vorgehensweise zur Lösungsfindung ist ähnlich wie im linearen Fall. Zunächst sucht man eine Funktion  $u_g \in W^{1,p}(\Omega)$  so, dass  $u_g|_{\partial\Omega} = g$ . Dazu wählt man eine Fortsetzung von  $g$ . Aus dem Ansatz  $u = u_0 + u_g$  mit  $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$  erhält man dann im Distributionensinn:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u_0 + \nabla u_g|^{p-2}(\nabla u_0 + \nabla u_g)) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u_0 &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Man erhält also für  $u_0$  zu gegebenem  $u_g$  eine neue Differentialgleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen mit dem geänderten Differential-Operator  $L_{u_g}$ :

$$L_{u_g} u_0 := -\operatorname{div}(|\nabla u_0 + \nabla u_g|^{p-2}(\nabla u_0 + \nabla u_g))$$

Durch Multiplikation mit einer Testfunktion  $v$ , Integration über  $\Omega$  und Anwendung des Satzes von Gauss (wobei das Randintegral wieder verschwindet, da  $u_0 = 0$  auf  $\partial\Omega$ ) erhält man folgende Variationsformulierung:

Suche  $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$  so, dass

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0 + \nabla u_g|^{p-2}(\nabla u_0 + \nabla u_g) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (7.6)$$

DEFINITION 7.19. Für  $u_g \in W^{1,p}(\Omega)$  ist der Operator  $A_{u_g} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow (W_0^{1,p}(\Omega))'$ ,  $u_0 \mapsto A_{u_g} u_0$  definiert durch

$$\langle A_{u_g} u_0, v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u_0 + \nabla u_g|^{p-2}(\nabla u_0 + \nabla u_g) \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Wir wollen zeigen, dass auch das inhomogene Dirichlet-Problem für den  $p$ -Laplace-Operator lösbar ist. Dazu werden wieder die Voraussetzungen des Hauptsatzes über monotone Operatoren nachgerechnet. Hierbei wird mehrfach verwendet, dass  $A_{u_g} u_0 = A(u_0 + u_g)$  ist.

### 3.1. Monotonie.

SATZ 7.20. Der in 7.19 definierte Operator  $A_{u_g}$  ist streng monoton, für  $p > 2$  gleichmäßig monoton und für  $p = 2$  sogar stark monoton auf  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

BEWEIS. Setzt man  $\tilde{u} := u + u_g$ ,  $\tilde{v} := v + u_g$ , so ist  $u - v = \tilde{u} - \tilde{v}$  und es gilt:

$$\begin{aligned} &\langle A_{u_g} u - A_{u_g} v, u - v \rangle \\ &= \int_{\Omega} \left( |\nabla u + \nabla u_g|^{p-2}(\nabla u + \nabla u_g) - |\nabla v + \nabla u_g|^{p-2}(\nabla v + \nabla u_g) \right) \cdot (\nabla u - \nabla v) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \left( |\nabla \tilde{u}|^{p-2}(\nabla \tilde{u}) - |\nabla \tilde{v}|^{p-2}(\nabla \tilde{v}) \right) \cdot (\nabla \tilde{u} - \nabla \tilde{v}) \, dx \\ &= \langle A\tilde{u} - A\tilde{v}, \tilde{u} - \tilde{v} \rangle \end{aligned}$$

Somit folgt die Aussage aus den Monotonie-Eigenschaften von  $A$  (vgl. Satz 7.14).  $\square$

### 3.2. Koerzitivität.

SATZ 7.21. Der in 7.19 definierte Operator  $A_{u_g}$  ist koerzitiv auf  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

BEWEIS. Es ist

$$\begin{aligned} \langle A_{u_g} u, u \rangle &= \int_{\Omega} |\nabla u + \nabla u_g|^{p-2} (\nabla u + \nabla u_g) \nabla u \, dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u + \nabla u_g|^{p-2} (\nabla u + \nabla u_g) (\nabla u + \nabla u_g) \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} |\nabla u + \nabla u_g|^{p-2} (\nabla u + \nabla u_g) \nabla u_g \, dx \end{aligned}$$

Mit  $-\int f \, dx \geq -|\int f \, dx| \geq -\int |f| \, dx$ , der Hölder-Ungleichung und den Dreiecksungleichungen in beide Richtungen erhält man

$$\begin{aligned} \langle A_{u_g} u, u \rangle &\geq \|\nabla u + \nabla u_g\|_{L^p(\Omega)}^p - \int_{\Omega} |\nabla u + \nabla u_g|^{p-1} |\nabla u_g| \, dx \\ &\geq \|\nabla u + \nabla u_g\|_{L^p(\Omega)}^p - \left( \int_{\Omega} |\nabla u + \nabla u_g|^{(p-1)q} \, dx \right)^{1/q} \|\nabla u_g\|_{L^p(\Omega)} \\ &= \|\nabla u + \nabla u_g\|_{L^p(\Omega)}^p - \|\nabla u + \nabla u_g\|_{L^p(\Omega)}^{p/q} \|\nabla u_g\|_{L^p(\Omega)} \\ &\geq \left| \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} - \|\nabla u_g\|_{L^p(\Omega)} \right|^p - \left( \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u_g\|_{L^p(\Omega)} \right)^{p/q} \|\nabla u_g\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Da wir  $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow \infty$  betrachten, und da deshalb wegen  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  und der Normäquivalenz aus Korollar 7.9 auch  $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow \infty$  gilt, genügt es, folgende Abschätzung zu beachten:

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \geq 2\|\nabla u_g\|_{L^p(\Omega)} \Rightarrow \left| \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} - \|\nabla u_g\|_{L^p(\Omega)} \right| \geq 1/2 \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Damit folgt für  $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \geq 2\|\nabla u_g\|_{L^p(\Omega)}$ :

$$\begin{aligned} \langle A_{u_g} u, u \rangle &\geq (1/2)^p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p - \left( \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u_g\|_{L^p(\Omega)} \right)^{p/q} \|\nabla u_g\|_{L^p(\Omega)} \\ &\geq c_1 \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p - c_2 \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} - c_3. \end{aligned}$$

Also folgt mit der Normäquivalenz aus Korollar 7.9

$$\frac{\langle A_{u_g} u, u \rangle}{\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}} \geq \tilde{c}_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{p-1} - \tilde{c}_2 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{p-2} - \frac{c_3}{\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}} \rightarrow \infty \quad \text{für } \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow \infty$$

und somit ist  $A$  koerzitiv auf  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . □

### 3.3. Stetigkeit.

SATZ 7.22. *Der in 7.19 definierte Operator  $A_{u_g}$  ist stetig.*

BEWEIS. Wir betrachten eine Folge  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$  mit  $u_n \rightarrow u$  in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Setzt man

$$\widetilde{u}_n := u_n + u_g, \quad \widetilde{u} := u + u_g$$

so gilt  $A_{u_g} u_n = A\widetilde{u}_n$ ,  $A_{u_g} u = A\widetilde{u}$  und  $\widetilde{u}_n \rightarrow \widetilde{u}$ .

Mit Satz 7.17 folgt  $A\widetilde{u}_n \rightarrow A\widetilde{u}$ , also  $A_{u_g} u_n \rightarrow A_{u_g} u$ . □

### 3.4. Zusammenfassung.

Wir haben gezeigt, dass der in 7.19 definierte Operator  $A_{u_g}$  monoton, koerzitiv und stetig ist. Somit folgt mit dem Hauptsatz über monotone Operatoren:

**SATZ 7.23.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand,  $p > 1$ ,  $u_g \in W^{1,p}(\Omega)$  und  $f \in L^q(\Omega)$ . Das Variationsproblem*

$$\langle A_{u_g} u_0, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

besitzt eine eindeutige Lösung  $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

- Für  $1 < p < 2$  ist der inverse Operator  $(A_{u_g})^{-1}$  streng monoton und beschränkt.
- Für  $p > 2$  ist  $(A_{u_g})^{-1}$  zusätzlich stetig.
- Für  $p = 2$  ist  $(A_{u_g})^{-1}$  sogar Lipschitz-stetig.

## 4. Quasilineare elliptische Differentialgleichungen vom Grad 2

In den Abschnitten 2 und 3 haben wir gesehen, dass im Falle des  $p$ -Laplace-Operators sämtliche für den Hauptsatz über monotone Operatoren nötigen Monotonie-, Stetigkeits- und Koerzitivitätseigenschaften aus den Wachstumseigenschaften der Funktion  $g(\vec{\zeta}) = |\vec{\zeta}|^{p-2} \vec{\zeta}$  hergeleitet werden können. Wir geben nun eine allgemeine Klasse quasilinearer elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung an, für die mit denselben Techniken wie für den  $p$ -Laplace-Operator die Existenz von schwachen Lösungen gezeigt werden kann.

**SATZ 7.24.** *Sei*

$$(Lu)(x) = - \sum_{|\alpha|=1} D^\alpha A_\alpha(x, Du(x)) + A_0(x, Du(x))$$

und die Funktionen  $A_\alpha$  erfülle folgende Eigenschaften:

- Die Carathéodory-Bedingung, vergleiche Lemma 7.15,
- Die Wachstumsbedingung (7.4),
- Die Monotoniebedingung

$$\sum_{|\alpha| \leq 1} (A_\alpha(x, \eta) - A_\alpha(x, \tilde{\eta})) (\eta^\alpha - \tilde{\eta}^\alpha) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \eta, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^d,$$

- Die Koerzitivitäts-Bedingung:  $\exists c > 0, h \in L^1(\Omega)$  :

$$\sum_{|\alpha| \leq 1} A_\alpha(x, \eta) \eta^\alpha \geq c \sum_{|\gamma|=1} |\eta^\gamma|^p - h(x) \quad \forall x \in \Omega, \eta \in \mathbb{R}^d.$$

Dann besitzt  $Lu = f$  eine (schwache) Lösung in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  für jedes  $f \in L^q(\Omega)$ , d.h. zu jeder Funktion  $f \in L^q(\Omega)$  gibt es eine Funktion  $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , so dass

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=1} A_\alpha(x, Du(x)) D^\alpha v(x) dx + \int_{\Omega} A_0(x, Du(x)) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Der Beweis des Satzes ist einfach, denn man kann die Voraussetzungen des Hauptsatzes über monotone Operatoren praktisch ablesen. Dafür sind diese Bedingungen für eine gegeben Differentialgleichung eventuell schwer nachzuweisen, man muss also hier die Arbeit hineinstecken.

BEISPIEL 7.25. Der  $p$ -Laplace-Operator ist eine quasilineare elliptische DGL mit

$$A_\alpha(x, \vec{\eta}) = |\vec{\eta}|^{p-2} \eta_\alpha, \quad A_0 = 0.$$

BEISPIEL 7.26. Den  $p$ -Laplace-Operator mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen kann man formal als Operator

$$L_{u_g} u_0 := -\operatorname{div}(|\nabla u_0 + \nabla u_g|^{p-2} (\nabla u + \nabla u_0)) = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

auffassen mit fester Funktion  $u_g \in W^{1,p}(\Omega)$ . Es ergibt sich somit eine quasilineare elliptische Differentialgleichung mit

$$A_0 = 0 \quad \text{und} \quad A_\alpha(x, \vec{\eta}) = |\vec{\eta} + \nabla u_g(x)|^{p-2} (\eta_\alpha + (\nabla u_g)_\alpha(x)) \quad \text{für } 1 \leq \alpha \leq d.$$

Man sieht, dass hier im Gegensatz zum normalen  $p$ -Laplace-Operator die Funktionen  $A_\alpha$  auch vom Ort abhängen.

Im Vortrag wurden für diese Beispiele die Voraussetzungen des Hauptsatzes über monotone Operatoren direkt gezeigt, die Voraussetzungen von Satz 7.24 lassen sich völlig analog beweisen.



## Ein mathematisches Modell für scherentzähende Fluide

ANITA KETTEMANN

### 1. Mathematisches Modell und klassische Formulierung

Wir werden ein Modell herleiten, mit dem das vektorwertige Geschwindigkeitsfeld  $u(x, t)$  und das skalare Druckfeld  $\pi(x, t)$  eines scherentzähenden Fluids der Dichte  $\rho(x, t)$  beschrieben werden kann. Dazu benötigen wir Erhaltungsgleichungen und konstitutive Gleichungen.

BEDINGUNG 8.1. Massenerhaltung

Sei  $\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot u$  die totale zeitliche Ableitung der skalaren Dichtefunktion  $\rho$ . Dann gilt

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} u = 0. \quad (8.1)$$

BEDINGUNG 8.2. Impulsbilanz

Sei  $f(x, t)$  vektorwertige Volumenkraft und  $S(x, t)$  der Cauchysche Spannungstensor. Dann gilt

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + (\nabla u)u \right) - \operatorname{div} S - \rho f = 0. \quad (8.2)$$

Hierbei ist  $((\nabla u)u)_i = \sum_{j=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j$  für  $1 \leq i \leq d$ . Für den Cauchyschen Spannungstensor  $S$  gilt  $S = -\pi I + T$ . Der symmetrische Tensor der viskosen Spannungen  $T$  beschreibt die innere Reibung.

Um die Bedeutung des Cauchyschen Spannungstensors besser zu verstehen, betrachten wir die Wirkung der einzelnen Komponenten auf ein würfelförmiges Volumenelement. Wir sehen, dass sich der Spannungstensor aus Normalspannungen senkrecht zur Oberfläche und Schubspannungen tangential zur Oberfläche zusammensetzt (siehe Abbildung 1).

DEFINITION 8.3 (Fluid).

Man nennt einen deformierbaren Stoff ein Fluid, wenn noch so kleine auf ihn einwirkende Schubspannungen den Stoff unaufhörlich deformieren und bei unbegrenzter Dauer der Einwirkung unbegrenzt große Verformungen hervorrufen können.

Hieraus ergibt sich, dass ein Fluid im Gegensatz zu einem Festkörper nur dann ruhen kann, wenn es keinen Schubspannungen ausgesetzt ist. Für den Cauchyschen Spannungstensor eines ruhenden Fluids gilt folglich  $S = -\pi I$ .

Wir treffen nun Annahmen um die Gleichungen der Massenerhaltung (8.1) und der Impulsbilanz (8.2) zu vereinfachen:

- Wir betrachten ein stationäres Problem:  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

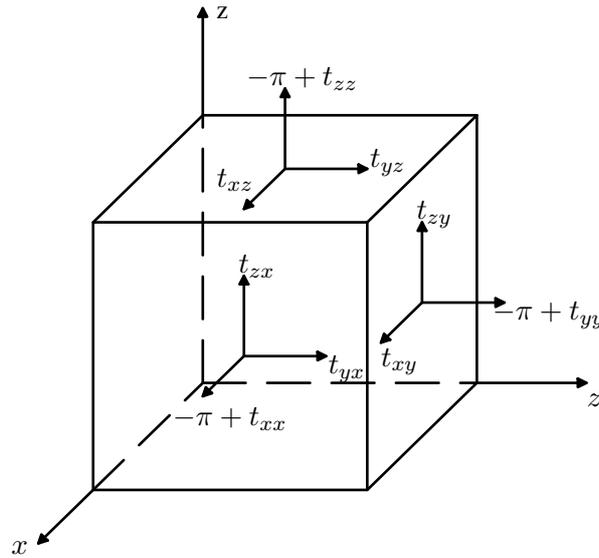


ABBILDUNG 1. Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors

- Linearisierung:  $(\nabla u)u = 0$
- Wir betrachten ein inkompressibles Fluid:  $\rho = \text{const.} = 1$

Mit den ersten beiden Vereinfachungen erhalten wir aus Gleichung (8.2) und der Bedingung  $S = -\pi I + T$

$$\text{div } S + f = 0 \quad \text{bzw.} \quad -\nabla \pi + \text{div } T + f = 0 \quad (8.3)$$

und mit der dritten Annahme aus (8.1)

$$\text{div } u = 0. \quad (8.4)$$

Damit haben wir 4 Gleichungen für die 10 Unbekannten  $\pi, u_1, u_2, u_3, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{22}, T_{23}, T_{33}$ . Um ein vollständiges Gleichungssystem zu bekommen benötigen wir noch ein Materialgesetz. In unserem Fall wird das ein Zusammenhang zwischen der inneren Reibung  $T$  und den Scher- bzw. Verzerrungsgeschwindigkeiten  $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^\top)$  sein.

Betrachten wir den Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten  $\varepsilon(u)$  genauer, so sehen wir, dass die Diagonalelemente Dehngeschwindigkeiten und die Nichtdiagonalelemente Schergeschwindigkeiten entsprechen.

#### BEISPIEL 8.4. Ebene Dehnströmung

Wir betrachten eine Strömung mit dem Geschwindigkeitsfeld

$$\begin{aligned} u_1 &= a(t)x \\ u_2 &= -a(t)y \end{aligned}$$

und den Verzerrungsgeschwindigkeiten

$$\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & -a(t) \end{pmatrix}.$$

Diese beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zur Bestimmung der Bahnkurve  $(x(t), y(t))$  eines Partikels, der sich für  $t = t_0$  in  $(x_0, y_0)$  befindet, lassen sich durch

Separation der Variablen lösen:

$$x = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}$$

$$y = y_0 e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}.$$

Haben zwei Punkte zu Beginn dieselbe  $x$ - bzw.  $y$ -Koordinate, so haben sie dies zu allen Zeiten, d.h. betrachtet man ein rechteckiges Volumenelement, so wird es rechteckig bleiben. Durch die Strömung wird das Volumenelement gedehnt oder gestaucht, die Diagonalelemente von  $\varepsilon(u)$  sind daher die Dehngeschwindigkeiten. Die Fläche des rechteckigen Volumenelements bleibt dabei erhalten, da

$$\begin{aligned} (x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) &= (x_0 - \tilde{x}_0) e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} (y_0 - \tilde{y}_0) e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} \\ &= (x_0 - \tilde{x}_0)(y_0 - \tilde{y}_0) \\ &= \text{const.} \end{aligned}$$

Eine derartige Strömung wird isochore Strömung genannt.

Wir erhalten für die Bahnen, auf denen sich ein Teilchen in der  $x$ - $y$ -Ebene bewegt, die Gleichung

$$y = \frac{x_0 y_0}{x}$$

(siehe Abbildung 2).

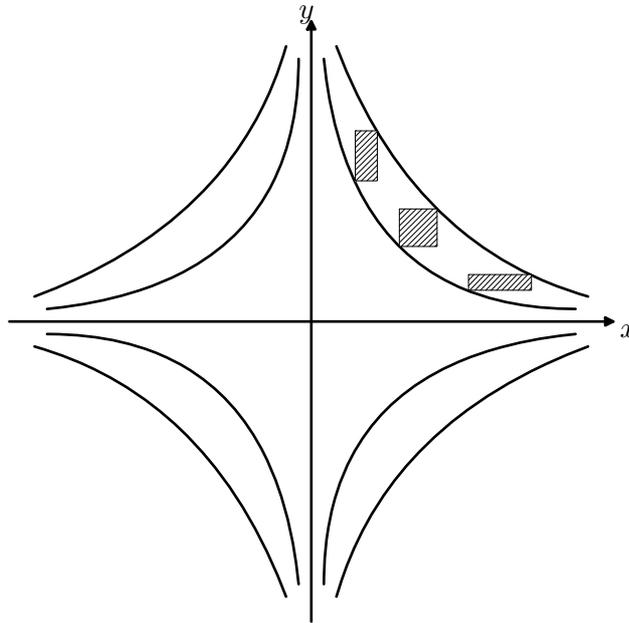


ABBILDUNG 2. Ebene Dehnströmung: Bewegung eines rechteckigen Volumenelements

Bei diesem Geschwindigkeitsfeld ist die Geschwindigkeit im Ursprung immer Null. Man spricht von einer Staupunktströmung.

## BEISPIEL 8.5. Einfache Scherströmung

Wir betrachten eine ebene Schichtströmung mit dem Geschwindigkeitsfeld

$$u_1 = cy$$

$$u_2 = 0$$

und den Verzerrungsgeschwindigkeiten

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

(siehe Abbildung 3).

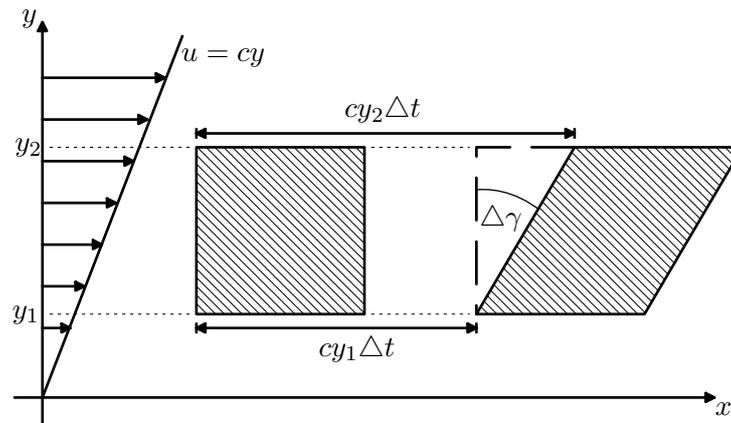


ABBILDUNG 3. Einfache Scherströmung

Betrachten wir nur kleine Zeiten, so gilt für den Winkel  $\Delta\gamma$ :

$$\Delta\gamma \approx \frac{cy_2\Delta t - cy_1\Delta t}{y_2 - y_1} = c\Delta t.$$

Aus dem Grenzübergang für  $t \rightarrow 0$  erhalten wir

$$\dot{\gamma} = \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} = c = 2\varepsilon_{12}.$$

Die Schergeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich der rechte Winkel zwischen zwei zu den Achsen parallelen Linienelementen ändert.

Für weitere Strömungsbeispiele verweisen wir auf [5, S.33-39].

Kehren wir nun zu dem Zusammenhang zwischen dem Tensor der viskosen Spannungen  $T$  und den Verzerrungsgeschwindigkeiten  $\varepsilon(u)$  zurück. Der einfachste Fall ist ein linearer Zusammenhang  $T = \mu\varepsilon(u)$ , wobei die Viskositätszahl  $\mu$  ein Materialparameter ist. Man spricht von einem Newtonschen Fluid. Aus (8.3) und (8.4) erhalten wir

$$\begin{aligned} -\nabla\pi + \mu \operatorname{div} \varepsilon(u) + f &= 0 \\ \operatorname{div} u &= 0 \end{aligned}$$

bzw. das Stokessystem

$$\begin{aligned} -\nabla\pi + \frac{1}{2}\mu\Delta u + f &= 0 \\ \operatorname{div} u &= 0. \end{aligned}$$

Für Lösbarkeitsaussagen zum Stokes-Problem siehe [23, S.223-234].

Im Folgenden betrachten wir das Reibspannungsgesetz von Ostwald-de Waele:

$$T = \alpha |\varepsilon^D(u)|^{q-2} \varepsilon^D(u) = \eta(\varepsilon^D(u)) \varepsilon^D(u) \quad (8.5)$$

mit

$$\varepsilon^D(u) = \varepsilon(u) - \frac{1}{d} \operatorname{tr} \varepsilon(u) I.$$

$\eta$  ist hierbei die scheinbare Viskosität und  $\varepsilon^D(u)$  der deviatorische Anteil des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten. Für  $q = 2$  und  $\alpha = \mu$  erhalten wir wieder das Stokes-System.

Für  $2 < q < \infty$  nimmt die Viskosität mit steigender Schergeschwindigkeit zu. Man spricht von einem scherverzähenden oder dilatanten Fluid. Ein Beispiel hierfür ist nasser Sand. Bei geringer Schergeschwindigkeit füllt das Wasser die Lücken zwischen den Sandkörnern aus und wirkt als Schmiermittel. Bei größerer Schergeschwindigkeit reißt die Wasserumhüllung auf, so dass die Schmierwirkung abnimmt und der Widerstand, d.h. die Reibung zwischen den Schichten, zunimmt.

Wir werden uns mit dem Fall  $1 < q < 2$  beschäftigen. Hier nimmt die Viskosität mit zunehmender Relativgeschwindigkeit zwischen den Schichten ab, siehe Abbildung 7. Man spricht von einem scherentzähenden oder strukturviskosen Fluid. Dieses Materialgesetz tritt bei Lösungen und Schmelzen von Hochpolymeren und anderen makromolekularen Substanzen auf, sowie bei Suspensionen mit länglichen Partikeln. Beispiele sind Kautschuke wie Polyamid oder Polymerlösungen wie Polyacrylamid in Wasser. Im Ruhezustand und bei kleinen Schergeschwindigkeiten sind die Moleküle stark miteinander verkettet und setzen der Scherung großen Widerstand entgegen. Mit zunehmender Schergeschwindigkeit richten sich die Moleküle aus und der Widerstand gegen die Scherung nimmt ab (siehe [4, S.18-19]). Entsprechende Viskositätskurven sind in [5, S.53-55] zu finden.

BEISPIEL 8.6. Ebene stationäre Schichtströmung

Betrachten wir eine Strömung mit dem Geschwindigkeitsfeld

$$u(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u_1(y) \\ 0 \end{pmatrix},$$

dem Druck  $\pi = \text{const.}$  und der Oberflächenkraft

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit  $f_1 = \text{const.} > 0$ . Außerdem sollen die Randbedingungen

$$u(y = 0) = 0$$

$$u(y = L) = 0$$

gelten (siehe Abbildung 4). Wir verwenden das Materialgesetz von Ostwald-de Waele mit

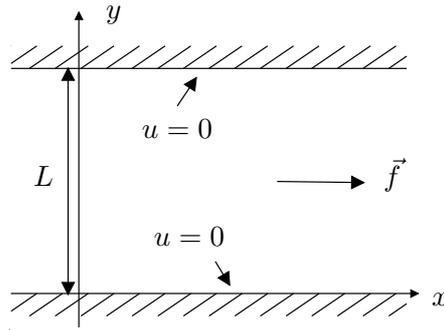


ABBILDUNG 4. Randbedingungen der Strömung in einem Rohr, in dem die Kraft  $f$  wirkt.

$\alpha = \sqrt{2}^{q-2}$ . Das Geschwindigkeitsfeld  $u$  und der Druck  $\pi$  sollen die folgenden Differentialgleichungen lösen:

$$\begin{aligned} -\nabla\pi + \alpha \operatorname{div} |\varepsilon^D(u)|^{q-2} \varepsilon^D(u) + \vec{f} &= 0 \\ \operatorname{div} u &= 0. \end{aligned}$$

Unter obigen Abnahmen erhalten wir folgende gewöhnliche Differentialgleichung für  $u_1$ :

$$\frac{1}{2} \partial_2 \left( |\partial_2 u_1|^{q-2} \partial_2 u_1 \right) = -f_1$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 0, \\ u_1(L) &= 0. \end{aligned}$$

Als Lösung erhalten wir

$$u_1(y) = -\frac{f_1^{p-1} L^p}{2p} \left( \left| \frac{2}{L} y - 1 \right|^p - 1 \right).$$

(siehe Abbildung 5). Aus  $u_1$  können wir nun die folgenden Größen ableiten:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \partial_2 u_1 = -\frac{(f_1 L)^{p-1}}{2} \left| \frac{2}{L} y - 1 \right|^{p-2} \left( \frac{2}{L} y - 1 \right),$$

$$\eta = \alpha |\varepsilon(u)|^{q-2} = (f_1 L)^{\frac{q-2}{q-1}} \left| \frac{2}{L} y - 1 \right|^{\frac{q-2}{q-1}},$$

$$T_{12} = \alpha |\varepsilon(u)|^{q-2} \varepsilon_{12}(u) = f_1 \left( \frac{L}{2} - y \right)$$

Diese Funktionen sind in den Abbildungen 5-6 dargestellt. Man sieht nun, dass für  $y \approx \frac{L}{2}$  gilt: die Schergeschwindigkeit  $\varepsilon_{12}$  ist klein und die "scheinbare Viskosität"  $\eta$  ist groß. In Abbildung 7 wird der Zusammenhang zwischen Schergeschwindigkeit  $\varepsilon_{12}$  und Schubspannung  $T_{12}$  bzw. Viskosität  $\eta$  für verschiedene Parameterwerte  $q$  aufgezeigt.



ABBILDUNG 5. Geschwindigkeitsfeld  $u(y)$  (links) und Schergeschwindigkeit  $\varepsilon_{12}(u)$  (rechts)



ABBILDUNG 6. Schubspannung  $T_{12}(u)$  (links) und "scheinbare Viskosität"  $\eta(u)$  (rechts)

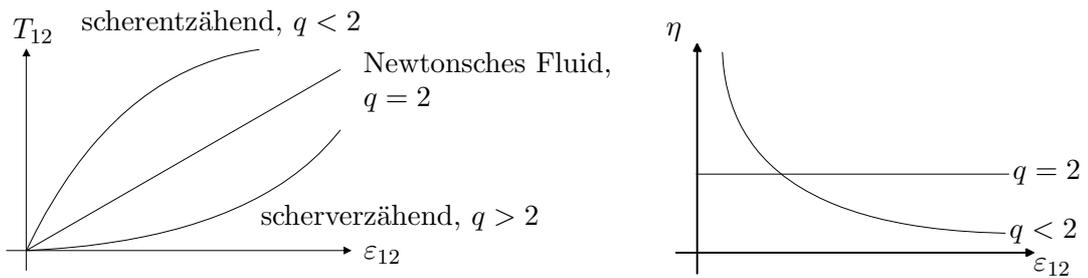


ABBILDUNG 7. Zusammenhang zwischen Schergeschwindigkeit und Schubspannung (links) und Schergeschwindigkeit und Viskosität (rechts)

Aus (8.4), (8.3) und dem Materialgesetz von Ostwald-de Waele (8.5) erhalten wir nun durch Hinzunahme geeigneter Randbedingungen die klassische Formulierung.

Finde ein Geschwindigkeitsfeld  $u$  und ein Druckfeld  $\pi$ , so dass für die gegebenen Volumen- und Oberflächenkräfte  $f$  und  $h$ , für die gegebene Geschwindigkeit  $g$  auf  $\Gamma_D$  und  $1 < q < 2$  gilt:

$$\operatorname{div}(\alpha|\varepsilon^D(u)|^{q-2}\varepsilon^D(u)) - \nabla\pi + f = 0 \quad x \in \Omega, \quad (8.6)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad x \in \Omega, \quad (8.7)$$

$$u = g \quad x \in \Gamma_D, \quad (8.8)$$

$$S\vec{n} = (\alpha|\varepsilon^D(u)|^{q-2}\varepsilon^D(u) - \pi I)\vec{n} = h \quad x \in \Gamma_N. \quad (8.9)$$

Der Vektor  $\vec{n}$  ist der äußere Normalenvektor auf dem Neumannrand  $\Gamma_N$ .

## 2. Schwache Formulierung

Für die schwache Formulierung benötigen wir zunächst noch einige Räume.

DEFINITION 8.7 (Sobolev-Slobodeckij-Raum auf  $\partial\Omega$ ). [11, S. 20]

Sei  $s \in (0, 1)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  beschränktes Lipschitzgebiet mit dem Rand  $\partial\Omega$  und  $\Gamma \subset \partial\Omega$  offen. Dann ist für  $1 < p < \infty$  der Raum  $W^{s,p}(\partial\Omega)$  definiert durch

$$W^{s,p}(\partial\Omega) := \{u \in L^p(\partial\Omega) : \|u\|_{W^{s,p}(\partial\Omega)} < \infty\},$$

wobei die Norm durch

$$\|u\|_{W^{s,p}(\partial\Omega)}^p := \|u\|_{L^p(\partial\Omega)}^p + \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{d-1+ps}} ds_x ds_y$$

gegeben ist. Außerdem definieren wir den Raum

$$W^{s,p}(\Gamma) := \{u \in L^p(\Gamma) : u = \tilde{u}|_{\Gamma}, \tilde{u} \in W^{s,p}(\partial\Omega)\}.$$

SATZ 8.8 (Spursatz). [11, Theorem 1.5.1.3, S.38]

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand,  $\Gamma \subset \partial\Omega$  offen und  $1 < p < \infty$ . Dann hat die lineare und stetige Abbildung

$$\gamma|_{\Gamma} : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) : u \mapsto u|_{\Gamma}$$

eine eindeutige Fortsetzung zu einer linearen und stetigen Abbildung

$$\gamma|_{\Gamma} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma).$$

Die Abbildung  $\gamma|_{\Gamma}$  ist surjektiv.

DEFINITION 8.9. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ ,  $\Gamma_D$  und  $\Gamma_N$  offen und disjunkt, und sei  $1 < p < \infty$ . Für  $g \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma_D)$  definieren wir den affinen Raum

$$V_p(g) := \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u|_{\Gamma_D} = g\}$$

und den Raum

$$\widetilde{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma_N) := \{u : u = \tilde{u}|_{\Gamma_N}, \text{ mit } \tilde{u} \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \text{ und } \operatorname{supp} \tilde{u} \subset \bar{\Gamma}_N\}$$

der mit der Norm  $\|u\|_{\widetilde{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma_N)} := \|\tilde{u}\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)}$  versehen ist.

BEMERKUNG 8.10. [11, S.43, Satz 1.5.2.3] Bei zweidimensionalen Gebieten ist  $\widetilde{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma_N) = W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma_N)$  für  $1 < p < 2$ , da die Spurbildung  $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma_D) \times W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma_N)$  surjektiv ist. Für  $p \geq 2$  und  $\Gamma_N \neq \partial\Omega$  ist  $\widetilde{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma_N) \subsetneq W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma_N)$ .

BEMERKUNG 8.11. Aufgrund der Linearität und Surjektivität des Spuoperators existiert für jedes  $g \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma_D)$  ein Element  $\tilde{g} \in W^{1,p}(\Omega)$  mit  $\tilde{g}|_{\Gamma_D} = g$ . Folglich gilt  $V_p(g) = \tilde{g} + V_p(0)$ .

BEMERKUNG 8.12. Der Raum  $\widetilde{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma_N)$  ist der Raum der auf den Rand  $\Gamma_N$  eingeschränkten Funktionen aus  $V_p(0)$ .

Wir werden nun die schwache Formulierung aus der klassischen Formulierung herleiten. Dazu wird (8.6) mit einer Testfunktion  $v$ , die auf  $\Gamma_D$  Null ist, multipliziert und über  $\Omega$  integriert.

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\alpha |\varepsilon^D(u)|^{q-2} \varepsilon^D(u)) \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \nabla \pi \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx.$$

Mit  $\operatorname{div}(Mv) = \operatorname{div} M \cdot v + M : \nabla v$  für die symmetrische matrixwertige Funktion  $M$  und  $\operatorname{div}(\pi v) = \pi \operatorname{div} v + \nabla \pi \cdot v$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} - \operatorname{div}(\alpha |\varepsilon^D(u)|^{q-2} \varepsilon^D(u)v) + \alpha |\varepsilon^D(u)|^{q-2} \varepsilon^D(u) : \nabla v \, dx \\ + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\pi v) - \pi \operatorname{div} v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx. \end{aligned}$$

Durch Anwenden des Gaußschen Satzes und da  $\varepsilon(v)$  der symmetrische Anteil von  $\nabla v$  ist bekommen wir

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma} \alpha |\varepsilon^D(u)|^{q-2} \varepsilon^D(u)v \cdot \vec{n} \, ds_x + \int_{\Omega} \alpha |\varepsilon^D(u)|^{q-2} \varepsilon^D(u) : \varepsilon(v) \, dx \\ + \int_{\Gamma} \pi v \cdot \vec{n} \, ds_x - \int_{\Omega} \pi \operatorname{div} v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx. \end{aligned}$$

Da

$$\operatorname{tr} \varepsilon^D(u) = \operatorname{tr} \varepsilon(u) - \operatorname{tr} \left( \frac{1}{d} \operatorname{tr} \varepsilon(u) I \right) = 0$$

und

$$\begin{aligned} \varepsilon^D(u) : \varepsilon^D(v) &= \varepsilon^D(u) : \varepsilon(v) - \frac{1}{d} \operatorname{tr} \varepsilon(v) \varepsilon^D(u) : I = \varepsilon^D(u) : \varepsilon(v) - \frac{1}{d} \operatorname{tr} \varepsilon(v) \operatorname{tr} \varepsilon^D(u) \\ &= \varepsilon^D(u) : \varepsilon(v) \end{aligned}$$

gilt, ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_N} (\pi I - \alpha |\varepsilon^D(u)|^{q-2} \varepsilon^D(u))v \cdot \vec{n} \, ds_x + \int_{\Omega} \alpha |\varepsilon^D(u)|^{q-2} \varepsilon^D(u) : \varepsilon^D(v) \, dx \\ - \int_{\Omega} \pi \operatorname{div} v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx. \end{aligned}$$

Mit der Randbedingung (8.9) gilt

$$\int_{\Omega} \alpha |\varepsilon^D(u)|^{q-2} \varepsilon^D(u) : \varepsilon^D(v) \, dx - \int_{\Omega} \pi \operatorname{div} v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_N} h \cdot v \, ds_x.$$

Multiplikation von (8.7) mit einer skalaren Testfunktion  $r$  und Integration über  $\Omega$  liefert

$$\int_{\Omega} r \operatorname{div} u \, dx = 0.$$

DEFINITION 8.13 (Schwache Formulierung).

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ , wobei  $\Gamma_D$  und  $\Gamma_N$  offen und disjunkt sind. Sei weiterhin  $1 < q < 2$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Wir nehmen an, dass  $f \in V'_q(0)$ ,  $g \in W^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma_D)$  und  $h \in (\widetilde{W}^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma_N))'$  ist.

Dann heißt  $(u_0, \pi) \in V_q(g) \times L^p(\Omega)$  schwache Lösung von (8.6)-(8.9), falls für alle  $v \in V_q(0)$  und  $r \in L^p(\Omega)$  gilt:

$$\int_{\Omega} \alpha |\varepsilon^D(u_0)|^{q-2} \varepsilon^D(u_0) : \varepsilon^D(v) \, dx - \int_{\Omega} \pi \operatorname{div} v \, dx = \langle f, v \rangle + \langle h, v \rangle \quad (8.10)$$

$$\int_{\Omega} r \operatorname{div} u_0 \, dx = 0. \quad (8.11)$$

$\langle f, v \rangle$  bezeichnet die duale Paarung von  $V'_q(0)$  und  $V_q(0)$ ,  $\langle h, v \rangle$  diejenige zwischen  $(\widetilde{W}^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma_N))'$  und  $\widetilde{W}^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma_N)$ .

Wir müssen nun noch sicherstellen, dass die Räume, die gewählt wurden auch sinnvoll sind, d.h., dass zumindest die Integrale existieren. Ein wichtiges Hilfsmittel ist die Höldersche Ungleichung.

SATZ 8.14 (Höldersche Ungleichung). [25, S.15]

Sei  $1 < p < \infty$  und  $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ . Für  $f \in L^p(\Omega)$  und  $g \in L^q(\Omega)$  ist  $fg \in L^1(\Omega)$ , und es gilt

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Wir überprüfen nun die Existenz der einzelnen Integrale:

- Die duale Paarung  $\langle h, v \rangle_{((\widetilde{W}^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma_N))', \widetilde{W}^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma_N))}$  ist wohldefiniert, da nach dem Spursatz  $v|_{\Gamma} \in \widetilde{W}^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma_N)$  ist.
- $\operatorname{div} v \in L^q(\Omega)$ , da

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div} v\|_{L^q(\Omega)}^q &= \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^d \partial_i v_i \right|^q dx \stackrel{(4.2)}{\leq} c \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d |\partial_i v_i|^q dx \leq c \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d |\partial_i v_j|^q dx \\ &\stackrel{(4.3)}{\leq} c \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^d |\partial_i v_j|^2 \right)^{\frac{q}{2}} dx = c \int_{\Omega} |\nabla v|^q dx \leq c \|v\|_{W^{1,q}(\Omega)}^q \end{aligned}$$

existiert. Aus der Hölderschen Ungleichung 8.14 folgt nun die Existenz der Integrale  $\int_{\Omega} \pi \operatorname{div} v \, dx$  und  $\int_{\Omega} r \operatorname{div} u_0 \, dx$ .

- $\varepsilon^D(u) \in L^q(\Omega)$ , da

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^D(u)\|_{L^q(\Omega)}^q &= \int_{\Omega} |\varepsilon^D(u)|^q dx = \int_{\Omega} \left| \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^{\top}) - \frac{1}{d} \operatorname{tr} \left( \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^{\top}) \right) I \right|^q dx \\ &\leq \int_{\Omega} (|\nabla u| + \frac{1}{d} |\operatorname{tr} \nabla u| \sqrt{d})^q dx = \int_{\Omega} (|\nabla u| + \frac{1}{\sqrt{d}} |\operatorname{div} u|)^q dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx \\ &\leq c \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)}^q. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir  $|\varepsilon^D(u)|^{q-2} \varepsilon^D(u) \in L^p(\Omega)$ , da

$$\int_{\Omega} \left| |\varepsilon^D(u)|^{q-2} \varepsilon^D(u) \right|^p dx = \int_{\Omega} |\varepsilon^D(u)|^{(q-1)p} dx = \int_{\Omega} |\varepsilon^D(u)|^q dx < \infty.$$

Mit der Hölderschen Ungleichung 8.14 folgt nun auch die Existenz des Integrals

$$\int_{\Omega} |\varepsilon^D(u_0)|^{q-2} \varepsilon^D(u_0) : \varepsilon^D(v) dx.$$

### 3. Sattelpunktproblem

Die schwache Formulierung hat die Form eines nichtlinearen Sattelpunktproblems. Um dies besser zu erkennen definieren wir:

$$a(\cdot, \cdot) : W^{1,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : a(u, v) = \int_{\Omega} \alpha |\varepsilon^D(u)|^{q-2} \varepsilon^D(u) : \varepsilon^D(v) dx,$$

$$b(\cdot, \cdot) : L^p(\Omega) \times V_q(0) \rightarrow \mathbb{R} : b(\pi, v) = - \int_{\Omega} \pi \operatorname{div} v dx.$$

Mit diesen Bezeichnungen haben die Gleichungen (8.10) und (8.11) die Gestalt

$$a(u_0, v) + b(\pi, v) = \langle f, v \rangle + \langle h, v \rangle,$$

$$-b(\pi, u_0) = 0.$$

Wir werden nun einige Eigenschaften von  $a(\cdot, \cdot)$  und  $b(\cdot, \cdot)$  nachprüfen.

LEMMA 8.15. Sei  $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ . Für  $(u, v) \in W^{1,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$  ist der Ausdruck  $a(u, v)$  wohldefiniert und wir erhalten die folgende Ungleichung:

$$|a(u, v)| \leq \alpha \|\varepsilon^D(u)\|_{L^q(\Omega)}^{q-1} \|\varepsilon^D(v)\|_{L^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)}^{q-1} \|v\|_{W^{1,q}(\Omega)}. \quad (8.12)$$

BEWEIS. Mit der Hölderschen Ungleichung 8.14 erhalten wir

$$|a(u, v)| \leq \alpha \left\| |\varepsilon^D(u)|^{q-1} \right\|_{L^p(\Omega)} \|\varepsilon^D(v)\|_{L^q(\Omega)}$$

$$= \alpha \left\{ \int_{\Omega} |\varepsilon^D(u)|^{(q-1)p} dx \right\}^{\frac{1}{p}} \|\varepsilon^D(v)\|_{L^q(\Omega)} \quad \text{und mit} \quad \frac{1}{p} = \frac{q-1}{q}$$

$$= \alpha \|\varepsilon^D(u)\|_{L^q(\Omega)}^{q-1} \|\varepsilon^D(v)\|_{L^q(\Omega)}.$$

□

Für festes  $u$  ist  $a(u, v)$  linear bezüglich  $v$  und aus (8.12) erhalten wir die Stetigkeit von  $a(u, v)$  bezüglich  $v$ . Zu jedem festen  $u \in W^{1,q}(\Omega)$  können wir einen eindeutigen Operator  $\tilde{A}(u) \in (W^{1,q}(\Omega))' = W_0^{-1,p}(\Omega)$  definieren, so dass für alle  $u, v \in W^{1,q}(\Omega)$  gilt:

$$\left\langle \tilde{A}(u), v \right\rangle_{(W_0^{-1,p}(\Omega), W^{1,q}(\Omega))} = a(u, v).$$

LEMMA 8.16. Die Bilinearform  $b(\pi, v)$  ist für  $\pi \in L^p(\Omega)$  und  $v \in V_q(0)$  wohldefiniert und stetig.

BEWEIS. Mit der Hölderschen Ungleichung 8.14 gilt

$$|b(\pi, v)| = \left| - \int_{\Omega} \pi \operatorname{div} v dx \right| \leq \|\pi\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{W^{1,q}(\Omega)}.$$

□

Wir können nun  $b(\cdot, \cdot)$  eindeutig die linearen und stetigen Operatoren

$$B : L^p(\Omega) \rightarrow V'_q(0) : \pi \mapsto B(\pi) = - \int_{\Omega} \pi \operatorname{div}(\cdot) dx, \quad (8.13)$$

$$B^* : V_q(0) \rightarrow L^q(\Omega) : u \mapsto - \operatorname{div} u \quad (8.14)$$

zuordnen.

LEMMA 8.17. *Das lineare Funktional  $F : V_q(0) \rightarrow \mathbb{R} : v \mapsto \langle f, v \rangle + \langle h, v \rangle$  ist stetig.*

BEWEIS.

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leq |\langle f, v \rangle| + |\langle h, v \rangle| \\ &\leq \|f\|_{V'_q(0)} \|v\|_{V_q(0)} + \|h\|_{(\widetilde{W}^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma_N))'} \|v\|_{\widetilde{W}^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma_N)} \end{aligned}$$

Mit dem Spursatz 8.8 erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leq \|f\|_{V'_q(0)} \|v\|_{V_q(0)} + c \|h\|_{(\widetilde{W}^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma_N))'} \|v\|_{V_q(0)} \\ &= (\|f\|_{V'_q(0)} + c \|h\|_{(\widetilde{W}^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma_N))'}) \|v\|_{V_q(0)}. \end{aligned}$$

□

Wir werden nun die Gleichungen der schwachen Formulierung (8.10)-(8.11) mit den Operatoren  $\tilde{A}, B, B^*$  und dem Funktional  $F$  neu formulieren.

Sei  $\Gamma_D \subset \partial\Omega$  offen und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  mit  $1 < q < 2$ . Sei weiter  $f \in V'_q(0), h \in (\widetilde{W}^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma_N))'$  und  $g \in W^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma_D)$ . Aus dem Spursatz 8.8 und Bemerkung 8.11 wissen wir, dass  $V_q(g) = g_0 + V_q(0)$  ist, wobei  $g_0 \in W^{1,q}(\Omega)$  mit  $g_0|_{\Gamma_D} = g$  ist. Wir definieren

$$A : V_q(0) \rightarrow V'_q(0) : u \mapsto A(u) := \tilde{A}(g_0 + u).$$

Mit diesen Bezeichnungen ist die schwache Formulierung äquivalent zum folgenden Sattelpunktproblem:

Finde  $(u, \pi) \in V_q(0) \times L^p(\Omega)$  so, dass

$$A(u) + B\pi = F \quad \text{in } V'_q(0), \quad (8.15)$$

$$B^*u = \operatorname{div} g_0 \quad \text{in } L^q(\Omega). \quad (8.16)$$

$(u_0, \pi)$  ist Lösung von (8.10)-(8.11) genau dann, wenn  $(u, \pi) = (u_0 - g_0, \pi)$  Lösung von (8.15)-(8.16) ist. Die Lösbarkeit des Sattelpunktproblems wird in Vortrag 9 untersucht.

## Analysis für ein Modell scherentzähender Fluide

TOBIAS HÄCKER

### 1. Vorbemerkungen

Im vorangegangenen Kapitel wurde für das nichtlineare Ostwald-de Waele-Modell eines scherentzähenden Fluids das Sattelpunktproblem

$$A(u) + B\pi = F \quad \text{in } V'_q(0), \quad (8.15)$$

$$B^*u = \operatorname{div} g_0 \quad \text{in } L^q(\Omega) \quad (8.16)$$

hergeleitet, doch blieb bislang die Frage nach dessen Lösbarkeit offen, die nun Gegenstand dieses Kapitels sein wird. Wir erinnern zunächst an die Definition der Operatoren  $A, B, B^*$  für  $\alpha > 0$  und  $1 < q < 2$ :

$$A : W^{1,q}(\Omega) \rightarrow (W^{1,q}(\Omega))' : u \mapsto \int_{\Omega} \alpha |\varepsilon^D(u)|^{q-2} \varepsilon^D(u) : \varepsilon^D(\cdot) dx, \quad (9.1)$$

$$B : L^p(\Omega) \rightarrow V'_q(0) : \pi \mapsto B(\pi) = - \int_{\Omega} \pi \operatorname{div}(\cdot) dx \quad (9.2)$$

$$B^* : V_q(0) \rightarrow L^q(\Omega) : u \mapsto - \operatorname{div} u \quad (9.3)$$

und werden als Erstes einen allgemeinen Zusammenhang zwischen den Operatoren  $B$  und  $B^*$  herleiten.

DEFINITION 9.1. Adjungierte Operatoren

Seien  $X, Y$  normierte Räume und  $T : X \rightarrow Y$  ein stetiger, linearer Operator. Dann wird der zu  $T$  adjungierte Operator  $T^* : Y' \rightarrow X'$  definiert durch

$$\langle T^*y', x \rangle = \langle y', Tx \rangle.$$

Der folgende Satz stellt sicher, dass auch der adjungierte Operator stetig und linear ist.

SATZ 9.2. *Es seien  $X, Y$  normierte Räume und  $T : X \rightarrow Y$  ein stetiger, linearer Operator. Dann ist der zu  $T$  adjungierte Operator  $T^* : Y' \rightarrow X'$  ebenfalls stetig und linear.*

BEWEIS.

Wir führen den Beweis in zwei Schritten:

(1) Linearität:

Seien  $y'_1, y'_2 \in Y'$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  beliebig. Es gelten für alle  $x \in X$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} \langle T^*(\lambda_1 y'_1 + \lambda_2 y'_2), x \rangle &= \langle \lambda_1 y'_1 + \lambda_2 y'_2, Tx \rangle \\ &= \lambda_1 \langle y'_1, Tx \rangle + \lambda_2 \langle y'_2, Tx \rangle \\ &= \lambda_1 \langle T^* y'_1, x \rangle + \lambda_2 \langle T^* y'_2, x \rangle \\ &= \langle \lambda_1 T^* y'_1 + \lambda_2 T^* y'_2, x \rangle. \end{aligned}$$

(2) Stetigkeit:

Es gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|T^* y'_1\|_{X'} &= \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\langle T^* y'_1, x \rangle| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\langle y'_1, Tx \rangle| \\ &\leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|y'_1\|_{Y'} \|Tx\|_Y, \end{aligned}$$

woraus aufgrund der Stetigkeit von  $T$  die Ungleichung

$$\|T^* y'_1\|_{X'} \leq \|y'_1\|_{Y'} \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} c \|x\|_X = c \|y'_1\|_{Y'}$$

und somit die Stetigkeit von  $T^*$  folgt. □

BEISPIEL 9.3. Lineare Abbildungen im euklidischen Vektorraum  $\mathbb{R}^n$

Im euklidischen Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  kann aufgrund des Riesz'schen Darstellungssatzes (Satz 5.11 in Vortrag 5) jedem Funktional  $x' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  aus dem Dualraum zu  $\mathbb{R}^n$  ein Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  so zugeordnet werden, dass für alle  $y \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$\langle x', y \rangle = x \cdot y.$$

Da der Raum  $\mathbb{R}^n$  zu seinem Dualraum isomorph ist, ist diese Zuordnung eine Bijektion, d.h.  $x'$  kann mit  $x$  identifiziert werden. Nun gilt nach den Gesetzen der linearen Algebra für eine Matrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :

$$\langle x, My \rangle = x \cdot My = M^\top x \cdot y = \langle M^\top x, y \rangle.$$

Somit ist die transponierte Matrix  $M^\top$  der zu  $M$  adjungierte Operator.

BEISPIEL 9.4. Shiftoperator (Linksshift)

Für  $1 < p < \infty$  betrachten wir den Folgenraum

$$\ell^p := \{(t_n)_{n \in \mathbb{N}} : t_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p < \infty\},$$

dessen Dualraum mit dem Folgenraum  $\ell^q$  identifiziert werden kann, falls die Beziehung  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  erfüllt ist. Für ein beliebiges  $x = (s_1, s_2, \dots) \in \ell^p$  und  $y' = (t_1, t_2, \dots) \in \ell^q$  erfolgt die duale Paarung durch

$$\langle y', x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} t_n s_n.$$

Definieren wir nun den Linksshift  $T : \ell^p \rightarrow \ell^p$  durch

$$Tx := (s_2, s_3, \dots),$$

so erhalten wir

$$\langle y', Tx \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} t_n s_{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} t_{n-1} s_n \stackrel{t_0 := 0}{=} \sum_{n=1}^{\infty} t_{n-1} s_n =: \langle T^* y', x \rangle.$$

Folglich ist der zu  $T$  adjungierte Operator  $T^*$  der Rechtsshift

$$T^* : (t_1, t_2, \dots) \mapsto (0, t_1, t_2, \dots).$$

**BEMERKUNG 9.5.** Sei  $Y$  ein reflexiver Banachraum, d.h. die kanonische Einbettung  $i : Y \rightarrow Y''$  definiert durch  $\langle i(y), y' \rangle = \langle y', y \rangle$  ist ein Isomorphismus. Sei darüberhinaus  $T : X \rightarrow Y'$  ein linearer und stetiger Operator. Dann wird häufig der Operator  $\tilde{T}^* : Y \rightarrow X'$  definiert durch

$$\tilde{T}^* := T^* \circ i$$

mit dem adjungierten Operator  $T^*$  identifiziert. In diesem Fall gilt folglich

$$\begin{aligned} T^* : Y &\rightarrow X', \\ \langle Tx, y \rangle_{(y', y)} &= \langle T^* y, x \rangle_{(x', x)}. \end{aligned}$$

Nun können wir durch einfache Rechnung zeigen, dass auch die in (9.2) und (9.3) definierten Operatoren  $B, B^*$  adjungiert sind. Da  $B^*$  von  $V_q(0)$  in den zu  $L^p(\Omega)$  dualen Raum  $L^q(\Omega)$  abbildet, existiert für jedes Paar  $(v, \pi) \in V_q(0) \times L^p(\Omega)$  die duale Paarung

$$\begin{aligned} \langle B^* v, \pi \rangle &= \int_{\Omega} B^* v \pi \, dx \\ &= \int_{\Omega} -\operatorname{div} v \pi \, dx \\ &= \langle B\pi, v \rangle. \end{aligned}$$

Somit sind  $B, B^*$  adjungiert. Um nun die Frage nach der Lösbarkeit des Sattelpunktproblems (8.15), (8.16) zu beantworten scheint es naheliegend, den bereits beim  $p$ -Laplace-Operator in Vortrag 7 begangenen Weg einzuschlagen und direkt den Hauptsatz über monotone Operatoren (Satz 5.25 in Vortrag 5) anzuwenden. Hierfür definieren wir den Matrix-Operator  $\mathcal{A} : V_q(0) \times L^p(\Omega) \rightarrow V'_q(0) \times L^q(\Omega)$  durch

$$\mathcal{A}(u, \pi) := \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(u) + B\pi \\ B^*u \end{pmatrix}$$

und erhalten die folgende Operator-Gleichung:

$$\mathcal{A}(u, \pi) = \begin{pmatrix} F \\ \operatorname{div} g_0 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen wir nun den Operator  $\mathcal{A}$  auf die für die Anwendung des Hauptsatzes über monotone Operatoren erforderliche Koerzivität, gelangen wir zu der Beziehung

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(u, \pi), (u, \pi) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} A(u) + B\pi \\ B^*u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ \pi \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle A(u), u \rangle + \langle B\pi, u \rangle + \langle B^*u, \pi \rangle \\ &= \langle A(u), u \rangle + 2\langle B\pi, u \rangle. \end{aligned}$$

Wählen wir eine Folge  $(0, \pi_n)$  mit Elementen aus  $V_q(0) \times L^p(\Omega)$ , welche die Eigenschaft

$$\|\pi_n\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty$$

besitzt, so gilt mit der Produktraumnorm  $\|(\cdot, \cdot)\|_{V_q(0) \times L^p(\Omega)} = \|\cdot\|_{V_q(0)} + \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$

$$\frac{\langle \mathcal{A}(0, \pi_n), (0, \pi_n) \rangle}{\|(0, \pi_n)\|_{V_q(0) \times L^p(\Omega)}} = \frac{0}{\|\pi_n\|_{L^p(\Omega)}} = 0 \not\rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

d.h.  $\mathcal{A}$  ist nicht koerziv. Um dennoch Aussagen über die Lösbarkeit des Sattelpunktproblems (8.15), (8.16) machen zu können, benötigen wir einen Lösungssatz für Sattelpunktprobleme.

## 2. Allgemeiner Lösungssatz für nichtlineare Sattelpunktprobleme

Im Umgang mit separablen und reflexiven Banachräumen benötigen wir die beiden folgenden Hilfssätze:

**SATZ 9.6.** *Sei  $V$  separabler Banachraum. Dann ist jeder Unterraum von  $V$  auch separabel.*

**BEWEIS.** Sei  $V_0$  ein Unterraum des separablen Banachraums  $V$  und  $M$  eine abzählbare, dicht liegende Teilmenge von  $V$ . Dann existiert zu jedem  $v \in V_0$  und jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x(v, n) \in M$  mit  $\|v - x(v, n)\|_V < \frac{1}{2n}$ , und die Menge  $X_n := \{x(v, n) : v \in V_0\}$  ist als Teilmenge von  $M$  abzählbar. Daher können wir umgekehrt zu jedem  $x_{n,i} \in X_n, i = 1, 2, \dots$  ein  $y_{n,i} \in V_0$  wählen, sodass  $\|x_{n,i} - y_{n,i}\|_V < \frac{1}{2n}$  ist. Folglich erhalten wir für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine abzählbare Menge  $Y_n := \{y_{n,i} : i = 1, 2, \dots\} \subset V_0$  mit der folgenden Eigenschaft:

Für alle  $v \in V_0$  existiert ein  $y \in Y_n$ , sodass die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|v - y\|_V &\leq \|v - x(v, n)\|_V + \|x(v, n) - y\|_V \\ &< \frac{1}{n} \end{aligned}$$

erfüllt ist. Somit liegt die abzählbare Vereinigung  $Y := \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$  dicht in  $V_0$ , d.h.  $V_0$  ist separabel.  $\square$

**SATZ 9.7.** *Sei  $V$  ein reflexiver Banachraum. Dann ist jeder abgeschlossene Unterraum von  $V$  ebenfalls reflexiv.*

**BEWEIS.** Sei  $V_0$  ein abgeschlossener Unterraum von  $V$  und  $\Phi \in V_0''$  beliebig gewählt. Wir definieren das lineare Funktional  $\Psi : V' \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\Psi(F) := \Phi(F|_{V_0}).$$

Da für alle  $F \in V'$  die Ungleichung

$$|\Psi(F)| = \left| \Phi(F|_{V_0}) \right| \leq \|\Phi\|_{V_0''} \|F|_{V_0}\|_{V_0} \leq \|\Phi\|_{V_0''} \|F\|_{V'}$$

erfüllt ist, gilt  $\|\Psi\|_{V''} = \sup_{F \in V'} \frac{|\Psi(F)|}{\|F\|_{V'}} < \infty$ , d.h. das Funktional  $\Psi$  ist stetig und somit aus dem Dualraum  $V''$ . Da  $V$  reflexiv ist, ist die kanonische Einbettung  $i : V \rightarrow V''$  surjektiv, d.h. insbesondere zu  $\Psi \in V''$  existiert ein  $v_\Psi \in V$ , sodass für alle  $F \in V'$  gilt:

$$\Psi(F) = F(v_\Psi).$$

Sei nun  $G \in V_0'$  beliebig gewählt. Nach dem Satz von Hahn-Banach können wir  $G$  auffassen als die Einschränkung  $G = F|_{V_0}$  eines Funktionals  $F \in V'$ . Damit folgt

$$\Phi(G) = \Phi(F|_{V_0}) = \Psi(F) = F(v_\Psi).$$

Ließe sich nun zeigen, dass  $v_\Psi \in V_0$  ist, so gälte

$$\Phi(G) = G(v_\Psi)$$

für alle  $G \in V_0'$  und die Behauptung wäre bewiesen. Nehmen wir an, es sei  $v_\Psi \notin V_0$ . Da  $V_0$  abgeschlossen ist, gilt

$$d := \inf_{v_0 \in V_0} \|v_0 - v_\Psi\|_V > 0.$$

Definieren wir uns auf  $\text{span}\{V_0, v_\Psi\}$  ein lineares Funktional  $\tilde{F}$  durch

$$\begin{aligned}\tilde{F}(v_\Psi) &= d \\ \tilde{F}(v_0) &= 0 \quad \forall v_0 \in V_0,\end{aligned}$$

so ist dieses wegen der für alle  $v_0 \in V_0, \alpha \in \mathbb{R}$  gültigen Ungleichung

$$\left| \tilde{F}(v_0 + \alpha v_\Psi) \right| = |\alpha| d = |\alpha| \inf_{\tilde{v}_0 \in V_0} \|\tilde{v}_0 - v_\Psi\|_V \leq |\alpha| \left\| \frac{v_0}{\alpha} \pm v_\Psi \right\|_V = \|v_0 + \alpha v_\Psi\|_V$$

stetig und besitzt nach dem Satz von Hahn-Banach eine Fortsetzung  $F \in V'$ . Daraus folgt der Widerspruch

$$d = F(v_\Psi) = \Psi(F) = \Phi(F|_{V_0}) = \Phi(0) = 0,$$

und somit ist  $v_\Psi \in V_0$ . □

Desweiteren werden wir von folgendem Hilfssatz Gebrauch machen:

**SATZ 9.8** (Satz vom abgeschlossenen Bild).

*$X$  und  $Y$  seien Banachräume, und es sei  $T : X \rightarrow Y$  eine lineare und stetige Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (1)  $\text{Im } T$  ist abgeschlossen.
- (2)  $\text{Im } T = \{y \in Y : \langle y', y \rangle = 0 \quad \forall y' \in \ker T^*\}$ .
- (3)  $\text{Im } T^*$  ist abgeschlossen.

**BEWEIS.** Siehe [25]. □

Nun sind wir in der Lage, den folgenden Satz zu beweisen:

**SATZ 9.9** (Allgemeiner Lösungssatz für nichtlineare Sattelpunktprobleme). [14]

*Seien  $V, W$  reflexive, separable Banachräume und  $A : V \rightarrow V'$  stetig und monoton,  $B : W \rightarrow V'$  linear und stetig. Sei weiterhin  $f \in V'$  und  $g \in \text{Im } B^*$ , wobei  $B^* : V \rightarrow W'$  der zu  $B$  adjungierte Operator ist. Zusätzlich seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:*

- $A$  ist koerziv auf  $M_g := \{v \in V : B^*v = g\}$ ,
- $\text{Im } B$  ist abgeschlossen in  $V'$ .

*Dann existiert ein Paar  $(u, \pi) \in V \times W$ , welches die Gleichungen*

$$A(u) + B\pi = f \quad \text{in } V', \tag{9.4}$$

$$B^*u = g \quad \text{in } W' \tag{9.5}$$

*erfüllt. Ist der Operator  $A$  darüberhinaus streng monoton auf  $M_g$ , so ist  $u$  eindeutig und für zwei Lösungen  $(u, \pi_1), (u, \pi_2)$  gilt:*

$$\pi_1 - \pi_2 \in \ker B.$$

BEWEIS. Wir führen den Beweis in zwei Schritten:

### Existenz

Wir setzen zunächst  $g = 0$  voraus. Dann fällt die Menge  $M_g$  mit dem Unterraum  $V_0 := \ker B^*$  des separablen und reflexiven Banachraums  $V$  zusammen. Wir definieren nun die eingeschränkten Abbildungen  $A_0 : V_0 \rightarrow V'_0$  und  $f_0 \in V'_0$  durch

$$\begin{aligned}\langle A_0(u), v_0 \rangle &= \langle A(u), v_0 \rangle, \\ \langle f_0, v_0 \rangle &= \langle f, v_0 \rangle\end{aligned}$$

für alle  $u, v_0 \in V_0$ . Damit ist die Abbildung  $A_0$  monoton, koerziv und stetig. Da die Abbildung  $B^*$  stetig ist, ist  $\ker B^* = V_0$  abgeschlossen und Satz 9.7 liefert die Reflexivität von  $V_0$ . Die Separabilität von  $V_0$  folgt sofort aus Satz 9.6. Somit ist der Hauptsatz über monotone Operatoren (Satz 5.25 in Vortrag 5) anwendbar, der die Existenz eines  $u_0 \in V_0$  mit der folgenden Lösungseigenschaft liefert:

$$A_0 u_0 = f_0.$$

Daraus ergibt sich für alle  $v_0 \in V_0$  der übergeordnete Zusammenhang

$$\langle A(u_0), v_0 \rangle = \langle A_0(u_0), v_0 \rangle = \langle f_0, v_0 \rangle = \langle f, v_0 \rangle, \quad (9.6)$$

womit wir uns auf die Suche nach einer Lösung für die Gleichungen (9.4), (9.5) machen können. Offensichtlich besitzt Gleichung (9.4) genau dann eine Lösung, falls  $f - A(u) \in \text{Im } B$  ist. Da die Menge  $\text{Im } B$  abgeschlossen ist, besitzt sie nach Satz 9.8 folgende Darstellung:

$$\text{Im } B = \{v' \in V' : \langle v', v_0 \rangle = 0 \ \forall v_0 \in \ker B^* = V_0\}.$$

Da die Abbildung  $f - A(u_0)$  aus dem Dualraum  $V'$  ist und aufgrund von (9.6) für alle  $v_0 \in V_0$  die Gleichung

$$\langle f - A(u_0), v_0 \rangle = 0$$

erfüllt ist, gilt somit  $f - A(u_0) \in \text{Im } B$ , d.h. es existiert ein  $\pi \in W$  mit der Eigenschaft

$$B\pi = f - A(u_0),$$

woraus die Lösbarkeit von (9.4), (9.5) für den Fall  $g = 0$  folgt.

Sei nun  $g \in \text{Im } B^*$  beliebig. Dann existiert ein  $u_g \in V$  mit  $B^*u_g = g$ , weshalb aufgrund der Linearität von  $B^*$  die Beziehung

$$M_g = u_g + \ker B^*$$

gilt. Definieren wir nun die Abbildung  $G : V \rightarrow V'$  durch  $G(v) := A(u_g + v)$ , so ist diese aufgrund der Eigenschaften von  $A$  stetig, monoton sowie koerziv auf  $\ker B^*$ . Folglich besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}G(v) + B\pi &= f \\ B^*v &= 0\end{aligned}$$

aufgrund der obigen Überlegungen eine Lösung  $(\tilde{v}, \pi) \in V_0 \times W$ . Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}A(u_g + \tilde{v}) + B\pi &= f \\ B^*(u_g + \tilde{v}) &= B^*(u_g) = g.\end{aligned}$$

Somit ist das Paar  $(u_g + \tilde{v}, \pi)$  Lösung von (9.4), (9.5).

### Eindeutigkeit

Sei nun  $A$  streng monoton auf  $M_g$  und seien  $(u_1, \pi_1), (u_2, \pi_2) \in V \times W$  Lösungen der Gleichungen (9.4), (9.5). Dann sind  $u_1, u_2 \in M_g, u_1 - u_2 \in V$  und  $\pi_1 - \pi_2 \in W$ , d.h. wir erhalten die Gleichungen

$$\langle A(u_1), u_1 - u_2 \rangle + \langle B\pi_1, u_1 - u_2 \rangle = \langle f, u_1 - u_2 \rangle \quad (9.7)$$

$$\langle A(u_2), u_1 - u_2 \rangle + \langle B\pi_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle f, u_1 - u_2 \rangle \quad (9.8)$$

$$\langle B^*u_1, \pi_1 - \pi_2 \rangle = \langle g, \pi_1 - \pi_2 \rangle \quad (9.9)$$

$$\langle B^*u_2, \pi_1 - \pi_2 \rangle = \langle g, \pi_1 - \pi_2 \rangle. \quad (9.10)$$

Durch die Subtraktion (9.7) - (9.8) erhalten wir

$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2 \rangle + \langle B(\pi_1 - \pi_2), u_1 - u_2 \rangle = 0. \quad (9.11)$$

Die Subtraktion (9.9) - (9.10) ergibt

$$\langle B^*(u_1 - u_2), \pi_1 - \pi_2 \rangle = 0,$$

also

$$\langle B(\pi_1 - \pi_2), u_1 - u_2 \rangle = 0. \quad (9.12)$$

Setzen wir (9.12) in (9.11) ein und nutzen die strenge Monotonie von  $A$  auf  $M_g$  aus, so erhalten wir schließlich  $u_1 - u_2 = 0$ . Seien nun  $(u, \pi_1), (u, \pi_2) \in V \times W$  Lösungen der Gleichungen (9.4), (9.5), dann gilt für alle  $v \in V$

$$\langle A(u), v \rangle + \langle B\pi_1, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad (9.13)$$

$$\langle A(u), v \rangle + \langle B\pi_2, v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad (9.14)$$

d.h. wir erhalten durch Subtraktion der beiden Gleichungen für alle  $v \in V$  die Beziehung  $\langle B(\pi_1 - \pi_2), v \rangle = 0$ . Somit ist  $\pi_1 - \pi_2 \in \ker B$ .  $\square$

### 3. Lösungssatz für das Sattelpunktproblem des Ostwald-de Waele-Modells

Wie wollen nun den allgemeinen Lösungssatz 9.9 anwenden, um einen Lösungssatz für das uns vorliegende nichtlineare Sattelpunktproblem (8.15), (8.16) herzuleiten. Wir setzen dabei von nun an stets voraus, dass es sich um kein reines Neumann-Problem handelt, d.h.  $\text{meas}(\Gamma_D) > 0$ . Desweiteren sei  $d = 3$ , d.h. alle unsere Überlegungen beziehen sich auf den dreidimensionalen Raum.

Es ist bereits bekannt, dass der Raum  $L^p(\Omega)$  ein reflexiver und separabler Banachraum ist, desweiteren wurde schon in Vortrag 8 die Linearität und Stetigkeit der Abbildung  $B : L^p(\Omega) \rightarrow V'_q(0)$  nachgewiesen. Es bleiben also die folgenden Voraussetzungen aus Satz 9.9 zu überprüfen:

- (1)  $V_q(0)$  ist reflexiver und separabler Banachraum.
- (2)  $A$  ist koerziv auf  $M := \{v \in V_q(0) : B^*v = \text{div } g_0\}$ .
- (3)  $A$  ist stetig auf  $V_q(0)$ .
- (4)  $A$  ist streng monoton auf  $M$ .
- (5)  $\text{Im } B$  ist abgeschlossen in  $V'_q(0)$ .
- (6)  $\text{div } g_0 \in \text{Im } B^*$ .

Dabei werden wir in einigen Fällen Zusatzvoraussetzungen an das Ostwald-de Waele-Modell machen müssen, um zu einem Lösungssatz für das zugehörige Sattelpunktproblem zu gelangen.

### 3.1. Reflexivität und Separabilität von $V_q(0)$ .

In Satz 8.8 haben wir gesehen, dass die Spurbildung  $\gamma|_{\Gamma_D} : W^{1,q}(\Omega) \rightarrow W^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma_D)$  linear und stetig ist. Somit ist  $V_q(0) = \ker \gamma|_{\Gamma_D}$  ein abgeschlossener Unterraum des reflexiven und separablen Banachraums  $W^{1,q}(\Omega)$ , und aus den Sätzen 9.6, 9.7 folgt sofort die Reflexivität und Separabilität von  $V_q(0)$ .

### 3.2. Koerzivität von $A$ auf $M = \{v \in V_q(0) : B^*v = \operatorname{div} g_0\}$ .

Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  eine beliebige Folge mit  $\|u_n\|_{W^{1,q}(\Omega)} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Aufgrund der Definition (9.1) von  $A$  gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} \langle A(u_n), u_n \rangle &= \alpha \int_{\Omega} |\varepsilon^D(u_n)|^{q-2} \varepsilon^D(u_n) : \varepsilon^D(u_n) \, dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} |\varepsilon^D(u_n)|^q \, dx \\ &= \alpha \|\varepsilon^D(u_n)\|_{L^q(\Omega)}^q, \end{aligned} \quad (9.15)$$

d.h. für den zur Überprüfung der Koerzivität entscheidenden Quotienten ergibt sich

$$\frac{\langle A(u_n), u_n \rangle}{\|u_n\|_{W^{1,q}(\Omega)}} = \frac{\alpha \|\varepsilon^D(u_n)\|_{L^q(\Omega)}^q}{\|u_n\|_{W^{1,q}(\Omega)}}. \quad (9.16)$$

Für eine geeignete Abschätzung des Nenners in (9.16) benötigen wir die folgende Fassung der Ungleichung von Poincaré-Friedrichs:

**SATZ 9.10** (Poincaré-Friedrichs-Ungleichung). [10]

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und  $1 < q < \infty$ . Ist die Teilmenge  $V \subset W^{1,q}(\Omega)$  abgeschlossen und konvex und erfüllt darüberhinaus für  $u \in V$  die Bedingung

$$\|\varepsilon(u)\|_{L^q(\Omega)} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0, \quad (9.17)$$

so existiert eine Konstante  $c > 0$ , sodass für alle  $u \in V$  gilt:

$$\|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq c \|\varepsilon(u)\|_{L^q(\Omega)}.$$

Wie bereits im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, ist  $V_q(0)$  ein abgeschlossener Unterraum von  $W^{1,q}(\Omega)$ , wobei aus der Unterraumeigenschaft sofort die Konvexität von  $V_q(0)$  folgt. Zum Nachweis der Bedingung (9.17) für  $V_q(0)$  machen wir von folgendem Hilfssatz Gebrauch:

**SATZ 9.11** (Kern des linearisierten Verzerrungstensors  $\varepsilon$ ).

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  beschränktes und zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet sowie  $1 < q < \infty$ . Dann gilt für den Kern des linearisierten Verzerrungstensors  $\varepsilon : W^{1,q}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ ,  $\varepsilon(u) := \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^\top)$  die Beziehung

$$\ker \varepsilon = \{u \in W^{1,q}(\Omega) : u = a + Bx, \, a \in \mathbb{R}^d, \, B = -B^\top \in \mathbb{R}^{d \times d}\}.$$

**BEWEIS.** Für eine beliebige Funktion  $u \in W^{1,q}(\Omega)$  und eine beliebige kompakte Teilmenge  $V \Subset \Omega$  zeigen wir zunächst die Existenz eines  $c > 0$ , sodass für alle  $h \in \mathbb{R}^d$  mit  $|h| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(V, \partial\Omega)$  die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\int_V |h \cdot (u(x+h) - u(x))|^q \, dx \leq c |h|^{2q} \|\varepsilon(u)\|_{L^q(\Omega)}^q. \quad (9.18)$$

Hierfür nehmen wir zunächst an, es sei  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 h \cdot (u(x+h) - u(x)) &= h \cdot \int_0^1 \frac{d}{dt} u(x+th) dt \\
 &= h \cdot \int_0^1 \nabla u(x+th) h dt \\
 &= h \cdot \int_0^1 \left[ \varepsilon(u) + \frac{1}{2} (\nabla u - (\nabla u)^\top) \right] \Big|_{(x+th)} h dt. \quad (9.19)
 \end{aligned}$$

Da für schiefsymmetrische Matrizen  $S \in \mathbb{R}^{d \times d}$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  die Beziehung  $x \cdot Sx = 0$  gilt, erhalten wir aus (9.19) die Gleichung

$$h \cdot (u(x+h) - u(x)) = h \cdot \int_0^1 \varepsilon(u(x+th)) h dt$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
 \int_V |h \cdot (u(x+h) - u(x))|^q dx &= \int_V \left| h \cdot \int_0^1 \varepsilon(u(x+th)) h dt \right|^q dx \\
 &\leq c |h|^{2q} \int_0^1 \int_V |\varepsilon(u(x+th))|^q dx dt \\
 &\leq c |h|^{2q} \|\varepsilon(u)\|_{L^q(\Omega)}^q. \quad (9.20)
 \end{aligned}$$

Da  $C^\infty(\bar{\Omega})$  dicht in  $W^{1,q}(\Omega)$  liegt, gilt (9.20) sogar für alle  $u \in W^{1,q}(\Omega)$ . Sei nun  $u \in W^{1,q}(\Omega)$  mit  $\varepsilon(u) = 0$  und  $V$  eine beliebige kompakte Teilmenge von  $\Omega$ . Definieren wir die Menge  $\tilde{V} := \{y \in \Omega : \text{dist}(y, V) < \frac{1}{2} \text{dist}(V, \partial\Omega)\}$ , so gilt aufgrund von Ungleichung (9.18) für alle  $x \in V$  und  $z \in \mathbb{R}^d$  mit  $|z| < \frac{1}{2} \text{dist}(V, \partial\Omega)$ :  $x+z \in \tilde{V}$  und

$$\int_V |z \cdot (u(x+z) - u(x))|^q dx \leq c |z|^{2q} \|\varepsilon(u)\|_{L^q(\Omega)}^q = 0,$$

d.h. wir erhalten für fast alle  $x \in V$  die Beziehung

$$z \cdot (u(x+z) - u(x)) = 0. \quad (9.21)$$

Setzen wir  $y = x+z$ , so folgt für fast alle  $x \in V, y \in \tilde{V}$ , dass

$$(x-y) \cdot (u(x) - u(y)) = 0.$$

Definieren wir nun die Abbildung  $G \in W^{1,q}(V \times \tilde{V})$  durch  $G(x, y) := (x-y) \cdot (u(x) - u(y))$ , so besitzt diese die Ableitung

$$\nabla_{(x,y)} G = \begin{pmatrix} u(x) - u(y) + (\nabla u(x))^\top (x-y) \\ u(y) - u(x) + (\nabla u(y))^\top (y-x) \end{pmatrix}.$$

Da nach Gleichung (9.21)  $G \equiv 0$  ist, folgt für fast alle  $(x, y) \in V \times \tilde{V}$

$$f(x) := u(y) - u(x) + (\nabla u(y))^\top (y-x) = 0. \quad (9.22)$$

Für fast alle  $y \in \tilde{V}$  ist  $f$  aus  $W^{1,q}(V)$  mit der Ableitung

$$\nabla_x f(x) = -\nabla u(x) - (\nabla u(y))^\top.$$

Da aufgrund von Gleichung (9.22)  $f \equiv 0$  ist in  $V$ , folgt  $\nabla_x f(x) = 0$  fast überall in  $V$ , d.h. fast überall in  $V \times \tilde{V}$  gilt:

$$-\nabla u(x) - (\nabla u(y))^\top = 0.$$

Nutzen wir aus, dass  $\varepsilon(u) = 0$  ist, also  $\nabla u$  schiefsymmetrisch ist, gelangen wir zu der für fast alle  $(x, y) \in V \times \tilde{V}$  gültigen Beziehung

$$\nabla u(x) = \nabla u(y).$$

Somit ist  $B := \nabla u(x)$  konstant und schiefsymmetrisch für fast alle  $x$ . Wir erhalten schließlich mit (9.22) für fast alle  $(x, y) \in V \times \tilde{V}$  die Gleichung

$$\begin{aligned} u(y) - u(x) + B^\top(y - x) &= 0 \\ \Leftrightarrow u(y) + B^\top y &= u(x) + B^\top x. \end{aligned}$$

Folglich existiert eine Konstante  $a$ , sodass für fast alle  $x \in V$  gilt:

$$u(x) = a - B^\top x.$$

Aus der Allgemeinheit von  $V \Subset \Omega$  folgt schließlich die Behauptung.  $\square$

Es gelte nun  $u \in V_q(0)$  mit  $\|\varepsilon(u)\|_{L^q(\Omega)} = 0$ . Dann besitzt  $u$  unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass  $\Omega$  ein beschränktes und zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet ist, aufgrund des Hilfssatzes (9.11) einen  $C^0(\Omega)$ -Vertreter der Gestalt  $u(x) = a + Bx$  mit einem konstanten Vektor  $a \in \mathbb{R}^3$  und einer schiefsymmetrischen Matrix  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Es folgt die Existenz eines Vektors  $b \in \mathbb{R}^3$ , sodass wir die stetige Funktion  $u$  in der Form  $u(x) = a + b \times x$  schreiben können. Da  $u|_{\Gamma_D} = 0$  und  $\text{meas}(\Gamma_D) > 0$  ist, finden wir drei nicht kollineare Punkte  $x_i \in \Gamma_D, i = 1, 2, 3$  mit der Eigenschaft  $u(x_i) = 0$ . Wir erhalten also für  $i, j = 1, 2, 3$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= -b \times x_i \\ a &= -b \times x_j, \end{aligned}$$

woraus durch Subtraktion der Gleichungen die Beziehung

$$b \times (x_i - x_j) = 0 \tag{9.23}$$

folgt. Nun sind die Punkte  $x_i, i = 1, 2, 3$  nicht kollinear, d.h. die Vektoren  $x_2 - x_1$  und  $x_3 - x_1$  sind linear unabhängig. Damit folgt aus (9.23)  $b = 0$ . Somit gilt  $u(x_i) = a = 0$ , d.h.  $u = 0$ .

Wir können also die Ungleichung von Poincaré-Friedrichs (9.10) anwenden, welche die Existenz eines  $c > 0$  liefert, sodass für alle  $u \in V_q(0)$  die Ungleichung

$$\|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq c \|\varepsilon(u)\|_{L^q(\Omega)}$$

erfüllt ist. Mit Hilfe der Beziehung  $\varepsilon^D(u) = \varepsilon(u) - \frac{1}{3} \text{tr} \varepsilon(u) \text{Id} = \varepsilon(u) - \frac{1}{3} \text{div} u \text{Id}$  erhalten wir daraus die Abschätzung

$$\|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq c \left( \|\varepsilon^D(u)\|_{L^q(\Omega)} + \left\| \frac{1}{3} \text{div} u \text{Id} \right\|_{L^q(\Omega)} \right).$$

Nun ist  $u \in M = \{v \in V_q(0) : -\text{div} v = \text{div} g_0\}$ , d.h.  $\left\| \frac{1}{3} \text{div} u \text{Id} \right\|_{L^q(\Omega)} = \left\| \frac{1}{3} \text{div} g_0 \text{Id} \right\|_{L^q(\Omega)} = k \|\text{div} g_0\|_{L^q(\Omega)}$  mit  $k > 0$ . Folglich gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq c \left( \|\varepsilon^D(u)\|_{L^q(\Omega)} + k \|\text{div} g_0\|_{L^q(\Omega)} \right)$$

und es geht  $\|u_n\|_{W^{1,q}(\Omega)}$  dann und nur dann gegen unendlich, falls  $\|\varepsilon^D(u_n)\|_{L^q(\Omega)}$  gegen unendlich geht. Schließlich erhalten wir aus Gleichung (9.16)

$$\frac{\langle A(u_n), u_n \rangle}{\|u_n\|_{W^{1,q}(\Omega)}} \geq \tilde{c} \frac{\|\varepsilon^D(u_n)\|_{L^q(\Omega)}^q}{\left(\|\varepsilon^D(u_n)\|_{L^q(\Omega)} + k\|\operatorname{div} g_0\|_{L^q(\Omega)}\right)} \rightarrow \infty$$

für  $n$  gegen unendlich, da  $1 < q < 2$  gilt. Somit ist  $A$  koerziv auf  $M$ .

### 3.3. Stetigkeit von $A$ .

Sei  $u \in V_q(0)$  beliebig gewählt und  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V_q(0)$  eine approximierende Folge, d.h. es geht  $\|u_n - u\|_{W^{1,q}(\Omega)}$  gegen Null für  $n$  gegen unendlich. Zum Nachweis der Stetigkeit von  $A$  ist zu zeigen, dass

$$\|A(u_n) - A(u)\|_{V'_q(0)} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (9.24)$$

Um uns die folgenden Rechnungen zu erleichtern, identifizieren wir für  $v \in V_q(0)$  die Matrix

$$\varepsilon^D(v) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^D & \varepsilon_2^D & \varepsilon_3^D \\ \varepsilon_4^D & \varepsilon_5^D & \varepsilon_6^D \\ \varepsilon_7^D & \varepsilon_8^D & \varepsilon_9^D \end{pmatrix}$$

mit dem Spaltenvektor

$$\vec{\varepsilon}^D(v) := \begin{pmatrix} \varepsilon_1^D \\ \varepsilon_2^D \\ \vdots \\ \varepsilon_9^D \end{pmatrix}. \quad (9.25)$$

Dabei gilt für  $v_1, v_2 \in V_q(0)$  der Zusammenhang  $\varepsilon^D(v_1) : \varepsilon^D(v_2) = \vec{\varepsilon}^D(v_1) \cdot \vec{\varepsilon}^D(v_2)$ . Damit erhalten wir für die linke Seite in (9.24):

$$\begin{aligned} \|A(u_n) - A(u)\|_{V'_q(0)} &= \sup_{\substack{v \in V_q(0) \\ \|v\|=1}} |\langle A(u_n) - A(u), v \rangle| \\ &= \alpha \sup_{\substack{v \in V_q(0) \\ \|v\|=1}} \left| \int_{\Omega} \left[ |\varepsilon^D(u_n)|^{q-2} \varepsilon^D(u_n) - |\varepsilon^D(u)|^{q-2} \varepsilon^D(u) \right] : \varepsilon^D(v) \, dx \right| \\ &= \alpha \sup_{\substack{v \in V_q(0) \\ \|v\|=1}} \left| \int_{\Omega} \left[ |\vec{\varepsilon}^D(u_n)|^{q-2} \vec{\varepsilon}^D(u_n) - |\vec{\varepsilon}^D(u)|^{q-2} \vec{\varepsilon}^D(u) \right] \cdot \vec{\varepsilon}^D(v) \, dx \right| \end{aligned} \quad (9.26)$$

Wir definieren einen Nemyckii-Operator  $\Phi$  durch

$$\Phi(\vec{\varepsilon}^D(u))(x) = \varphi(x, (\vec{\varepsilon}^D(u))(x)),$$

wobei die Abbildung  $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert ist durch

$$\varphi(x, \eta) := |\eta|^{q-2} \eta.$$

Dann liefert uns das Lemma über die Stetigkeit von Nemyckii-Operatoren (Lemma 7.15 in Vortrag 7) die Stetigkeit des Nemyckii-Operators  $\Phi : L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ . Die erforderlichen Voraussetzungen lassen sich leicht verifizieren:

(1) Carathéodory-Bedingung:

Da  $\varphi$  nicht explizit von  $x$  abhängt, ist  $f(\cdot, \eta)$  messbar auf  $\Omega$  für alle  $\eta \in \mathbb{R}^9$ . Die Stetigkeit von  $\varphi(x, \cdot) : \eta \mapsto |\eta|^{q-2} \eta$  wurde bereits in Bemerkung 7.3 angesprochen.

(2) Wachstumsbedingung:

Es gilt

$$|f(x, \eta)| = |\eta|^{q-1} = \left( \sum_{i=1}^9 \eta_i^2 \right)^{\frac{q-1}{2}}.$$

Da  $1 < q < 2$  gilt, ergibt sich die Ungleichung

$$|f(x, \eta)| \leq \sum_{i=1}^9 |\eta_i|^{q-1},$$

und mit der Äquivalenz  $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \Leftrightarrow q-1 = \frac{q}{p}$  erhalten wir schließlich die gewünschte Wachstumsbedingung

$$|f(x, \eta)| \leq \sum_{i=1}^9 |\eta_i|^{\frac{q}{p}}.$$

Nun können wir die Stetigkeit von  $A$  nachweisen, indem wir den Nemyckii-Operator  $\Phi$  in die rechte Seite von (9.26) einbringen:

$$\|A(u_n) - A(u)\|_{V'_q(0)} = \alpha \sup_{\substack{v \in V'_q(0) \\ \|v\|=1}} \left| \int_{\Omega} \underbrace{[\Phi(\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_n)) - \Phi(\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u))]}_{\in L^p(\Omega)} \cdot \underbrace{\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(v)}_{\in L^q(\Omega)} dx \right|.$$

Mit der Hölderschen Ungleichung (Satz 8.14) erhalten wir schließlich:

$$\|A(u_n) - A(u)\|_{V'_q(0)} \leq \alpha \underbrace{\|\Phi(\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_n)) - \Phi(\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u))\|_{L^p(\Omega)}}_{\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{v \in V'_q(0) \\ \|v\|=1}} \|\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(v)\|_{L^q(\Omega)}.$$

Da  $\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(v)$  linear und stetig von  $v$  abhängt, ist der Faktor

$$\sup_{\substack{v \in V'_q(0) \\ \|v\|=1}} \|\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(v)\|_{L^q(\Omega)}$$

beschränkt. Folglich konvergiert für  $n$  gegen unendlich die Norm  $\|A(u_n) - A(u)\|_{V'_q(0)}$  gegen Null, d.h. der Operator  $A$  ist stetig.

### 3.4. (Strenge) Monotonie von $A$ .

Wir verwenden wieder den zur Überprüfung der Stetigkeit in (9.25) eingeführten Vektor  $\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u)$  anstelle des linearisierten Verzerrungstensors  $\varepsilon^{\mathcal{D}}(u)$ . Durch Anwendung der Ungleichung (7.3)

aus Vortrag 7 erhalten wir für  $u_1, u_2 \in V_q(0)$  die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 & \langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2 \rangle \\
 &= \alpha \int_{\Omega} \left[ |\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_1)|^{q-2} \bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_1) - |\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_2)|^{q-2} \bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_2) \right] \cdot \bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_1 - u_2) \, dx \\
 &= \alpha \int_{\Omega} \left[ |\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_1)|^{q-2} \bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_1) - |\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_2)|^{q-2} \bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_2) \right] \cdot [\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_1) - \bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_2)] \, dx \\
 &\geq c \int_{\Omega} (|\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_1)| + |\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_2)|)^{q-2} |\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_1) - \bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_2)|^2 \, dx \\
 &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{9.27}$$

Somit ist  $A$  monoton auf  $V_q(0)$ . Wir nehmen nun an, für  $u_1, u_2 \in M$  sei die rechte Seite in (9.27) Null. Nach der Dreiecksungleichung gälte  $|\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_1)| + |\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_2)| \geq |\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_1) - \bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_2)|$ , wir erhielten also die Beziehung

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Omega} (|\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_1)| + |\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_2)|)^{q-2} |\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_1) - \bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_2)|^2 \, dx \\
 &\geq \int_{\Omega} |\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_1) - \bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_2)|^q \, dx \\
 &= \|\bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_1) - \bar{\varepsilon}^{\mathcal{D}}(u_2)\|_{L^q(\Omega)}^q \\
 &= \|\varepsilon^{\mathcal{D}}(u_1) - \varepsilon^{\mathcal{D}}(u_2)\|_{L^q(\Omega)}^q.
 \end{aligned} \tag{9.28}$$

Nutzen wir nun für  $u_i, i = 1, 2$  die Eigenschaft  $\varepsilon^{\mathcal{D}}(u_i) := \varepsilon(u_i) - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \varepsilon(u_i) \operatorname{Id} = \varepsilon(u_i) - \frac{1}{3} \operatorname{div} u_i \operatorname{Id} = \varepsilon(u_i) + \frac{1}{3} \operatorname{div} g_0 \operatorname{Id}$  aus, so erhielten wir aus (9.28):

$$\begin{aligned}
 0 &\geq \|\varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2)\|_{L^q(\Omega)}^q \\
 &= \|\varepsilon(u_1 - u_2)\|_{L^q(\Omega)}^q.
 \end{aligned}$$

Wie wir bereits bei der Überprüfung der Koerzivität von  $A$  gezeigt haben, folgte daraus  $u_1 - u_2 = 0$ , also ist  $A$  streng monoton auf  $M$ .

### 3.5. Abgeschlossenheit von $\operatorname{Im} B$ in $V'_q(0)$ .

Wir zitieren zunächst den folgenden Hilfssatz [10, Theorem 3], [14]:

SATZ 9.12 (Eigenschaften der Divergenz).

Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand,  $1 < q < \infty$  sowie  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Sei ferner  $\Gamma_D \subset \partial\Omega$  offen. Dann gilt für die Abbildung  $B^* : V_q(0) \rightarrow L^q(\Omega), u \mapsto -\operatorname{div} u$

$$\operatorname{Im} B^* = \begin{cases} \{r \in L^q(\Omega) : \int_{\Omega} r \, dx = 0\} & \text{falls } \Gamma_D = \partial\Omega, \\ L^q(\Omega) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist  $\operatorname{Im} B^*$  insbesondere abgeschlossen. Der Kern des adjungierten Operators  $B$  besitzt die folgende Gestalt:

$$\ker B = \begin{cases} \{\text{konst. Funktionen in } L^p(\Omega)\} & \text{falls } \Gamma_D = \partial\Omega, \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit folgt aus dem Satz vom abgeschlossenen Bild 9.8 die Abgeschlossenheit von  $\operatorname{Im} B$ .

BEMERKUNG 9.13. Aus Satz 9.12 folgt bei Anwendung des allgemeinen Lösungssatzes für Sattelpunktprobleme 9.9 im Fall  $\Gamma_D \neq \partial\Omega$  die Eindeutigkeit von  $\pi$ , ansonsten die Eindeutigkeit bis auf eine Konstante.

### 3.6. Bild von $B^*$ .

Ist  $\Gamma_D \neq \partial\Omega$ , so ist nach Satz 9.12 Im  $B^* = L^q(\Omega)$ , d.h.  $\operatorname{div} g_0 \in L^q(\Omega)$  ist für alle  $g_0 \in W^{1,q}(\Omega)$  im Bild von  $B^*$  enthalten. Im Fall  $\Gamma_D = \partial\Omega$  hingegen benötigen wir als zusätzliche Voraussetzung an das Dirichlet-Datum  $g$  die Existenz eines  $g_0 \in W^{1,q}(\Omega)$ , sodass die folgenden Beziehungen gelten:

$$g_0|_{\partial\Omega} = g \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} g_0 \, dx = 0.$$

Somit können wir den allgemeinen Lösungssatz für Sattelpunktprobleme anwenden und gelangen zu folgendem Theorem:

**SATZ 9.14** (Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen des Ostwald-de Waele-Modells). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes und zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet,  $\partial\Omega = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$ , wobei  $\Gamma_D$  und  $\Gamma_N$  offen und disjunkt sind mit  $\operatorname{meas} \Gamma_D > 0$ . Sei darüberhinaus  $1 < q < 2$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Weiterhin sei  $f \in V'_q(0)$ ,  $h \in (\widetilde{W}^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma_N))'$ ,  $g \in W^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma_D)$ . Im Fall  $\Gamma_D = \partial\Omega$  existiere zusätzlich eine Abbildung  $g_0 \in W^{1,q}(\Omega)$  mit  $g_0|_{\partial\Omega} = g$  und  $\int_{\Omega} \operatorname{div} g_0 \, dx = 0$ . Dann existiert ein Paar  $(u_0, \pi) \in V_q(g) \times L^p(\Omega)$ , welches die schwache Formulierung*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha |\varepsilon^D(u_0)|^{q-2} \varepsilon^D(u_0) : \varepsilon^D(v) \, dx - \int_{\Omega} \pi \operatorname{div} v \, dx &= \langle f, v \rangle + \langle h, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V_q(0), \\ \int_{\Omega} r \operatorname{div} u_0 \, dx &= 0 \quad \text{für alle } r \in L^p(\Omega) \end{aligned}$$

bzw. äquivalent dazu das Sattelpunktproblem mit  $u = u_0 - g_0 \in V_q(0)$

$$A(u + g_0) + B\pi = F \quad \text{in } V'_q(0), \tag{8.15}$$

$$B^*u = \operatorname{div} g_0 \quad \text{in } L^q(\Omega) \tag{8.16}$$

löst. Dabei ist  $u$  eindeutig. Im Fall  $\Gamma_D \neq \partial\Omega$  ist auch  $\pi$  eindeutig, andernfalls eindeutig bis auf eine Konstante.

## 4. Ausblick

Wir haben nun sehr ausführlich das nichtlineare Ostwald-de Waele-Modell eines scherentzähenden Fluids untersucht und konnten dabei die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der zugehörigen schwachen Formulierung zufriedenstellend beantworten, indem wir die zugehörigen Strömungsgleichungen auf ein Sattelpunktproblem transformierten. Dabei war das scherentzähende Fluid durch eine Abnahme der Viskosität bei zunehmender Schergeschwindigkeit gekennzeichnet. Doch dies ist nur eines von vielen Strömungsmodellen, und die Einteilung eines Fluids in eine bestimmte Klasse bereitet mitunter große Schwierigkeiten. Betrachten wir beispielsweise Humanblut, so sind dessen Eigenschaften durch die vielfältigen Transportaufgaben, die ihm im menschlichen Körper zukommen, geprägt. Bei den Bestandteilen des Blutes unterscheidet man zunächst zwischen dem fluiden Trägermedium, dem Plasma, und den darin suspendierten Zellen. Das Plasma besteht zu 90 % aus Wasser und zu 1 % aus anorganischen Ionen, der Rest sind Proteine. Die zellulären Bestandteile sind die Erythrozyten (rote Blutkörperchen), die Leukozyten (weiße Blutkörperchen) und die Thrombozyten (Blutplättchen).

Auf das Fließverhalten haben die folgenden Parameter den größten Einfluß [17]:

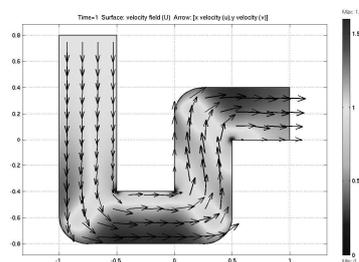
- Erythrozytenaggregation (lange Aneinanderreihungen von Erythrozyten)
- Deformierbarkeit der Erythrozyten
- Viskosität des Plasmas
- Hämatokrit (volumenmäßiger Anteil der Blutzellen)

Doch nicht nur die Klasseneinteilung bereitet Probleme. Wir konnten zwar die Frage klären, unter welchen Bedingungen das Ostwald-de Waele-Modell eine Lösung besitzt, doch steht uns bislang kein numerisches Verfahren zur Lösung derartiger nichtlinearer Strömungsgleichungen zur Verfügung. Wie wichtig es in bestimmten Fällen ist, auf die nichtlineare Variante eines Strömungsmodells zurückzugreifen, wollen wir uns am Beispiel der stationären Navier-Stokes-Gleichungen

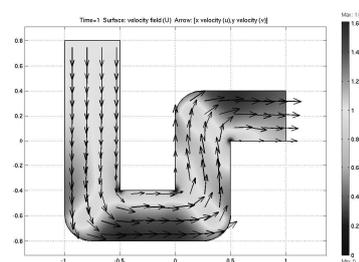
$$\begin{aligned} \rho(\nabla u)u + \nabla\pi - 2\mu \operatorname{div} \varepsilon(u) - f &= 0, \\ \operatorname{div} u &= 0 \end{aligned}$$

klar machen. Im Unterschied zum Ostwald-de Waele Modell eines scherentzähenden Fluids weist dieses zwar ein lineares konstitutives Gesetz auf, doch beinhaltet es dafür den nichtlinearen Term  $(\nabla u)u$ . Als Modellbeispiel stellen wir uns ein gekrümmtes Rohr vor, dessen Wände undurchlässig sind und das an der Oberseite einen Einfluss und seitlich einen Ausfluss besitzt. Die Einströmgeschwindigkeit  $v_1$  kann dabei beliebig vorgegeben werden. Im Falle einer kleinen Einströmgeschwindigkeit ( $v_1 = -1$ ) erhalten wir beim linearen und nichtlinearen Ansatz ein nahezu identisches Strömungsbild (siehe Seite 103).

In den nachfolgenden Abbildungen ist der Betrag des Geschwindigkeitsfeldes  $u$  farbig dargestellt, die Pfeile beschreiben die Richtung des Geschwindigkeitsfeldes.

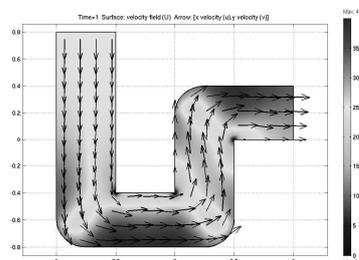


linear

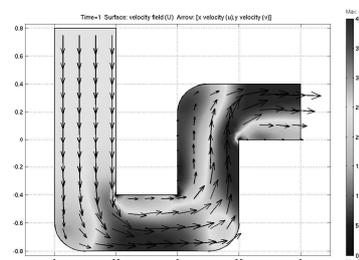


nichtlinear

Erhöhen wir jedoch die Einströmgeschwindigkeit ( $v_1 = -25$ ), so werden signifikante Unterschiede erkennbar:

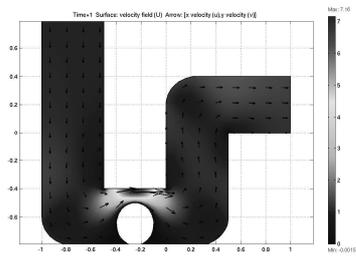


linear

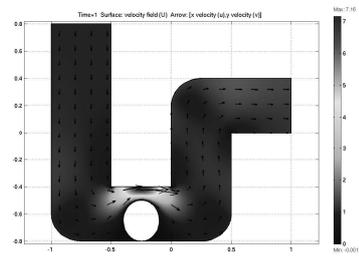


nichtlinear

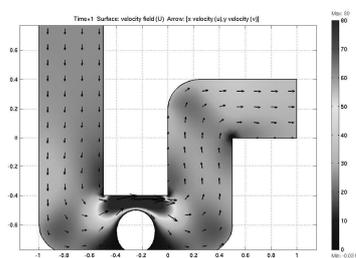
Besonders deutlich werden die Unterschiede, wenn wir noch einen Fremdkörper in das Rohr einbringen, der vom Fluid umströmt wird:



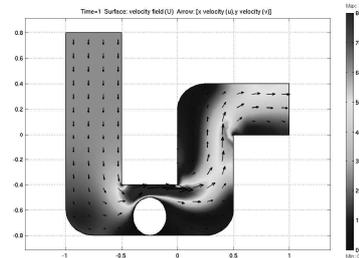
linear,  $v_1 = -1$



nichtlinear,  $v_1 = -1$



linear,  $v_1 = -25$



nichtlinear,  $v_1 = -25$

## Literaturverzeichnis

- [1] ADAMS, R. A. *Sobolev spaces*, vol. 65 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., New York, San Francisco, London, 1975.
- [2] ADAMS, R. A. *Sobolev Spaces*, vol. 65 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Boston, 1992.
- [3] ALT, H. W. *Lineare Funktionalanalysis*, 2. ed. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.
- [4] BETTEN, J. *Kontinuumsmechanik, Elastisches und inelastisches Verhalten isotroper und anisotroper Stoffe*, 2. ed. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [5] BÖHME, G. *Strömungsmechanik nicht-newtonscher Fluide*, vol. 52 of *Studienbücher Mechanik*. Teubner, Stuttgart, 1981.
- [6] BRAESS, D. *Finite Elemente*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.
- [7] BROKATE, M. Mathematische Elastizitäts- und Plastizitätstheorie. Vorlesungsskript, Mathematisches Seminar, Universität Kiel, <http://www.numerik.uni-kiel.de/~mbr/>, 1995.
- [8] CIARLET, P. G. *Mathematical Elasticity*, vol. 1, Three-dimensional Elasticity. North Holland, Amsterdam, 1993.
- [9] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [10] GEYMONAT, G., AND SUQUET, P. Functional Spaces for Norton-Hoff Materials. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 8 (1986), 206–222.
- [11] GRISVARD, P. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman Press, Bath, Avon, 1985.
- [12] HEUSER, H. *Funktionalanalysis*. Teubner, Stuttgart, 1992.
- [13] HEUSER, H. *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, 10 ed. Teubner, Stuttgart, 1993.
- [14] KNEES, D. On the regularity of weak solutions of a shear thinning fluid of power-law type. Bericht SFB 404 2003/23, Universität Stuttgart, 2003.
- [15] KOROWKIN, P. P. *Ungleichungen*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1966.
- [16] KOZLOV, V. A., MAZ'YA, V. G., AND ROSSMANN, J. *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities*. American Mathematical Society, 1997.
- [17] KULICK, W.-M., Ed. *Fließverhalten von Stoffen und Stoffgemischen*. Hüthig und Wepf, Basel, 1986.
- [18] RUZICKA, M. Funktionalanalysis II, Vorlesung SoSe 2003. Vorlesungsmanuskript, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, <http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/homepages/rose/script.html>, 2003.
- [19] SÄNDIG, A.-M. Nichtlineare Funktionalanalysis. Vorlesungsskript SoSe 2000, Universität Stuttgart, 2000.
- [20] SÄNDIG, A.-M. Partielle Differentialgleichungen, Vorlesung Sommersemester 2002. Preprint 2002-11, Mathematisches Institut A, Universität Stuttgart, 2002.
- [21] SÄNDIG, A.-M. Höhere Analysis. Berichte aus dem Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation 2003/020, Universität Stuttgart, 2003.
- [22] SÄNDIG, A.-M. Proseminar Funktionenräume, Wintersemester 2002/2003. Berichte aus dem Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation 2003/015, Universität Stuttgart, 2003.
- [23] SCHWAB, C. *p- and hp-Finite Element Methods, Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics*. Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [24] TRIEBEL, H. *Höhere Analysis*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.
- [25] WERNER, D. *Funktionalanalysis*, 2 ed. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [26] WLOKA, J. *Partielle Differentialgleichungen*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1982.
- [27] ZEIDLER, E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, vol. 2/A Linear Monotone Operators. Springer Verlag Inc., New York, 1986.
- [28] ZEIDLER, E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, vol. 2/B Nonlinear Monotone Operators. Springer Verlag Inc., New York, 1986.

- [29] ZEIDLER, E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, vol. 1 Fixed-Point Theorems. Springer Verlag Inc., New York, 1986.

Anna-Margarete Sändig, (Hrsg.)

Universität Stuttgart

Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation

Paffenwaldring 57

70569 Stuttgart

**E-Mail:** Anna.Saendig@ians.uni-stuttgart.de

**WWW:** <http://ians.uni-stuttgart.de/agsaendig/mitarbeiter/saendig.shtml>

Dorothee Knees (Hrsg.)

Universität Stuttgart

Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation

Paffenwaldring 57

70569 Stuttgart

**E-Mail:** Dorothee.Knees@ians.uni-stuttgart.de

**WWW:** <http://ians.uni-stuttgart.de/agsaendig/mitarbeiter/knees.shtml>



## Erschienenene Preprints ab Nummer 2004/001

Komplette Liste: <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

- 2004/001 *Geis, W., Mishuris, G., Sändig, A.-M.*: 3D and 2D asymptotic models for piezoelectric stack actuators with thin metal inclusions
- 2004/002 *Klimke, A., Wohlmuth, B., Willner, K.*: Computing expensive multivariate functions of fuzzy numbers using sparse grids
- 2004/003 *Klimke, A., Wohlmuth, B., Willner, K.*: Uncertainty modeling using efficient fuzzy arithmetic based on sparse grids: applications to dynamic systems
- 2004/004 *Flemisch, B., Mair, M., Wohlmuth, B.*: Nonconforming discretization techniques for overlapping domain decompositions
- 2004/005 *Sändig, A.-M.*: Vorlesung Mathematik für Informatiker und Softwaretechniker I, WS 2003/2004
- 2004/006 *Bürger, R., Karlsen, K. H., Towers, J. D.*: Closed-form and finite difference solutions to a population balance model of grinding mills
- 2004/007 *Berres, S., Bürger, R., Tory, E. M.*: Applications of Polydisperse Sedimentation Models
- 2004/008 *Bürger, R., Karlsen, K. H., Towers, J. D.*: A model of continuous sedimentation of flocculated suspensions in clarifier-thickener units
- 2004/009 *Bürger, R., Karlsen, K. H., Towers, J. D.*: Mathematical model and numerical simulation of the dynamics of flocculated suspensions in clarifier-thickeners
- 2004/010 *Lehrstühle: Wendland, Wohlmuth, Abteilungen: Gekeler, Sändig*: Jahresbericht 2003
- 2004/011 *Sändig, A.-M. (Hrsg.), Knees, D. (Hrsg.)*: Nichtlineare Funktionalanalysis mit Anwendungen in der Festkörpermechanik