Klassische Diskrete Orthogonale Polynome

Bachelorarbeit

von
Kirsten Wiesner
Matrikel-Nr. 25213128

Betreuer: Prof. Dr. Wolfram Koepf
Universität Kassel
Fachbereich 17 - Mathematik

Kassel
26. August 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Bachelorarbeit basiert auf dem Skript „Computeralgebra und Orthogonale Polynome “ zur gleichnamigen Vorlesung, die Prof. W. Koepf im Wintersemester 05/06 an der Universität Kassel gelesen hat.

Wir werden uns in dieser Arbeit intensiv mit den Eigenschaften klassischer diskreter orthogonaler Polynomfamilien beschäftigen. Einleitend dazu werden wir zunächst allgemeine Funktionensysteme betrachten, bei denen die Funktionen $\varphi_n(x)$ bezüglich einer Gewichtsfunktion $w(x)$ im Intervall (a, b) paarweise orthogonal zueinander sind. Ein solches Funktionensystem $(\varphi_n(x))_{n\geq 0}$ werden wir als Orthogonalsystem (OS) bezeichnen. Im ersten Schritt werden wir feststellen, dass eine lineare Unabhängigkeit dieser Funktionen $\varphi_n(x)$ eines solchen Systems existiert. Anschließend werden wir erkennen, dass solche Systeme vollständig sind. Am Ende des Abschnittes werden wir das so genannte *Gram-Schmidtsche-Orthogonalisierungsverfahren* einführen. Dieser Algorithmus wird uns dann zu einem gegebenen linear unabhängigen System $(f_n(x))_{n\geq 0}$ sowohl ein OS, als auch ein Orthonormalsystem (ONS) liefern, bei dem die einzelnen Funktionen zusätzlich zu der paarweisen Orthogonalität auch normiert sind.

Anschließend werden wir uns auf OS beschränken, die für $n \geq 0$ aus Polynomen der Form $\varphi_n(x) = P_n(x) := k_n x^n k_n' x^{n-1} + k_n'' x^{n-2} + \dots$ bestehen. Solche OS werden wir als orthogonale Polynomsysteme (OPS) bezeichnen.
Eine solche Einschränkung erlaubt es uns, zentrale Strukturbeziehungen herzuleiten. Somit haben wir schließlich die Möglichkeit, eine Dreitermrekursion der Form

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x)$$

zu beweisen. Wir werden erkennen, dass diese Dreitermrekursion für alle OPS gilt und dass sich die Koeffizienten A_n, B_n und C_n explizit herleiten lassen. Zusätzlich stellt eine solche Rekursion eine Beziehung zwischen den einzelnen Polynomen eines OPS sicher, nämlich die, dass sich ein Polynom $P_n(x)$ eines OPS in Abhängigkeit der Vorgänger darstellen lässt.

Im nächsten Kapitel werden wir dann eine weitere Einschränkung vornehmen. Wir werden hier OPS betrachten, die Lösung der Differenzengleichung

$$\sigma(x)\nabla\Delta y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda_n y(x) = 0$$

sind. Dabei ist dann $y(x) = P_n(x)$, $\sigma(x) = ax^2 + bx + c$ und $\tau(x) = dx + e$. Wir werden beweisen, dass die Konstante λ_n die Beziehung $\lambda_n = -(an(n-1) + dn)$ erfüllt. Die Lösungen dieser Differenzengleichung werden klassische diskrete OPS genannt.
Zu den zentralen Eigenschaften dieser klassischen diskreten OPS zählt die Orthogonalitätsbedingung $\langle P_n, P_m\rangle = 0$ $(n \neq m)$, wobei wir uns auf Skalarprodukte der Form

$$\langle P_n, P_m\rangle := \sum_{x=a}^{b} P_n(x)P_m(x)w(x)$$

beschränken werden. Die Gewichtsfunktion $w(x)$ soll dabei für $x = a, \ldots, b$ positiv sein. Wir werden die klassischen diskreten OPS klassifizieren und uns näher mit den Eigenschaften der Charlier-, Meixner-, Krawtchouk- und Hahnpolynome beschäftigen.
Um genauere Klassifizierungen durchführen zu können, werden wir zunächst ein paar wichtige Eigenschaften der Differenzenrechnung kennen lernen. Wir werden uns den so genannten Vorwärtsdifferenzenoperator $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ und den Rückwärtsdiffernzenoperator $\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$ definieren. Hierfür werden wir beweisen, dass der Δ-Operator eine partielle Summation

$$\sum_{x=a}^{b} f(x) \cdot \Delta g(x) = f(b+1) \cdot g(b+1) - f(a) \cdot g(a) - \sum_{x=a}^{b} g(x+1) \cdot \Delta f(x)$$

und eine Produktregel

$$\Delta(f(x)g(x)) = g(x+1)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x)$$

erfüllt.
Im darauf folgenden Abschnitt werden wir uns genauer mit der Gewichtsfunktion $w(x)$ beschäftigen. Wir werden erkennen, dass die Gewichtsfunktion der so genannten Pearsonschen Differenzengleichung

$$\Delta(\sigma(x)w(x)) = \tau(x)w(x)$$

genügt. Mit der Einführung der Gewichtsfunktionen $w(x)$ der Charlier-, Meixner-, Krawtchouk- und Hahnpolynome werden wir erkennen, dass diese mit verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus der Stochastik, wie zum Beispiel die Binomialverteilung, übereinstimmen.
Nach Überprüfung der Orthogonalität dieser klassischen diskreten OPS werden wir uns schließlich ausführlich mit den hypergeometrischen Darstellungen dieser Polynomfamilien beschäftigen. Zunächst werden wir dazu die Polynome $P_n(x)$ als Reihe der Form

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k(n) x^{\underline{k}}$$

darstellen und für die Reihenkoeffizienten $C_k(n)$ eine Rekursion herleiten. Aus dieser erhalten wir dann nach einigen Umformungen ein rationales Termverhältnis

$$\frac{C_{k+1}(n)}{C_k(n)} = \frac{(n-k)(ak+d+an-a)}{(k+1)(ak^2+kb+kd+e)},$$

aus dem wir die hypergeometrischen Darstellungen der klassischen diskreten OPS herleiten können.
Anschließend werden wir uns mit verschiedenartigen Rekursionsgleichungen für die klassischen diskreten OPS beschäftigen. Dazu werden wir als erstes für die oben erwähnte Dreitermrekursion von $P_n(x)$ die zugehörigen Koeffizienten A_n, B_n und C_n bestimmen. Hieraus können dann weitere Rekursionsgleichungen, wie die Differenzenregel und die Strukturformel, herleiten. Im darauf folgenden Abschnitt werden wir dann mit der Frage beschäftigen, wie man Informationen eines Polynomsystem $(Q_m(x))_{m\geq 0}$

auf ein anderes Polynomsystem $(P_n(x))_{n\geq 0}$ übertragen kann. Dazu erhalten wir aus der linearen Unabhängigkeit der Monome eine Beziehung der Form

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_m(n) Q_m(x).$$

Dabei handelt es sich bei den Koeffizienten $C_m(n)$ um die Verbindungskoeffizienten zwischen den Polynomen $Q_m(x)$ und $P_n(x)$. Wir werden in diesem Abschnitt zunächst drei Rekursionsgleichungen herleiten, die in Abhängigkeit der Polynome $Q_m(x)$ und $P_n(x)$ stehen. Diese Rekursionsgleichungen werden wir Kreuzregeln nennen. Nach Herleitung der Verbindungskoeffizienten von der Verbindung der fallenden Faktoriellen $x^{\underline{n}}$ und den Charlier-, Meixner-, Krawtchouk- und Hahnpolynomen werden wir schließlich Verbindungskoeffizienten zweier Polynome aus einem dieser Polynomfamilien beweisen können.
Im darauf folgenden Abschnitt wollen wir Funktionen der Form

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(x)}{k!} z^k$$

kennen lernen, die wir erzeugende Funktionen nennen werden. Wir werden dazu exemplarisch eine erzeugende Funktion für die Meixnerpolynome herleiten.

Zum Schluss werden wir werden wir einen Algorithmus kennen lernen, der uns aus einer holonomen Rekursionsgleichung ein klassisches diskretes OPS liefert, sofern dieses existiert. Außerdem werden wir diesen Algorithmus anhand eines Beispiels testen.

Alle Berechnungen, die mittels *Mathematica* durchgeführt werden, befinden sich als Mathematica-Notebooks auf der beigelegten CD.

2 Orthogonale Funktionensysteme

2.1 Skalarprodukt

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass zwei Vektoren v, w eines Vektorraums V genau dann orthogonal zueinander sind, wenn ihr Skalarprodukt gleich Null ist. Wir wollen diese Eigenschaft auf (integrierbare) Funktionen eines reellen Intervalls (a, b) übertragen. Dazu fassen wir die integrierbaren Funktionen $R[a, b]$ als einen unendlich-dimensionalen Vektorraum auf. Nun können wir im Intervall (a, b) ein Skalarprodukt definieren, das gegeben ist durch

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)d\mu(x). \tag{2.1}$$

Dabei stellt $\mu(x)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß dar, welches uns zwei weitere Skalarprodukte liefert:

(a) Kontinuierlicher Fall:

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b w(x) f(x)g(x)dx. \tag{2.2}$$

(b) Diskreter Fall:

$$\langle f, g \rangle := \sum_{x=a}^{b} w(x) f(x)g(x). \tag{2.3}$$

In beiden Fällen sei $w(x)$ positiv und wird Gewichtsfunktion genannt.

2.2 Orthogonalsysteme

Definition 2.1 (Orthogonalsystem)
Sei $\langle f, g \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem Intervall (a, b). Sei weiter $\varphi_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}_{\geq 0})$ eine Familie von Funktionen.
*Falls für diese Funktionenfamilie φ_n gilt $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = 0$ für $n \neq m$ und $\|\varphi_n\|^2 = \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, so nennt man diese ein **Orthogonalsystem (OS)** oder eine orthogonale Familie.*
*Gilt zudem $\|\varphi_n\|^2 = 1$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, so heißt das System **Orthonormalsystem (ONS)**. Zusammenfassend gilt für ein solches ONS:*

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq m \\ 1 & \text{falls } n = m \end{cases} \tag{2.4}$$

Im Folgenden betrachten wir einige Eigenschaften eines ONS $(\varphi_n(x))_{n\geq 0}$:

Satz 2.1 (Lineare Unabhängigkeit)
Alle Funktionen φ_n eines ONS $(\varphi_n(x))_{n\geq 0}$ sind linear unabhängig.

Beweis: Zunächst betrachten wir eine Linearkombination aller Funktionen φ_k. Sei dazu also

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k = 0$$

gegeben. Wären die Funktionen φ_k linear abhängig, so gäbe es wenigstens einen Koeffizienten $\lambda_k \neq 0$.
Wendet man das Skalarprodukt auf diese Gleichung an, dann gilt für alle $m = 1, \ldots, n$:

$$\langle \varphi_m, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k \rangle = 0 \ .$$

Es folgt aus der Linearität des Skalarprodukts für die linke Seite der Gleichung

$$\langle \varphi_m, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle \varphi_m, \varphi_k \rangle = \lambda_m \langle \varphi_m, \varphi_m \rangle = 0 \ .$$

Weil $\langle \varphi_m, \varphi_k \rangle = 0$ (für $m \neq k$) und $\langle \varphi_m, \varphi_m \rangle \neq 0$ ist, folgt $\lambda_m = 0$ und da m beliebig gewählt war, sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ linear unabhängig und damit folgt die Behauptung. □

Satz 2.2 (Besselsche Ungleichung)
Die Fourierkoeffizienten

$$a_n := \langle f, \varphi_n \rangle$$

*bzgl. eines ONS $(\varphi_n(x))_{\geq 0}$ erfüllen die sogenannte **Besselsche Ungleichung***

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \leq \|f\|^2 \ . \tag{2.5}$$

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
Man betrachte nun

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|f - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k\|^2 \\
&= \langle f - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k, f - \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j \rangle \\
&= \langle f, f \rangle + \langle f, -\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j \rangle + \langle f, -\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k \rangle + \langle \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k, \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j \rangle \\
&= \|f\|^2 - \sum_{j=0}^{n} a_j \langle f, \varphi_j \rangle - \sum_{k=0}^{n} a_k \langle f, \varphi_k \rangle + \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{n} a_j \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|f\|^2 - 2\cdot\sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\langle f,\varphi_k\rangle}_{=a_k} + \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_k a_j \underbrace{\langle\varphi_k,\varphi_j\rangle}_{=0 \text{ für } k\neq j}\\
&= \|f\|^2 - 2\cdot\sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \sum_{k=0}^{n} a_k^2\\
&= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \,.
\end{aligned}
$$

Es folgt also

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Da n beliebig gewählt war, folgt die Besselsche Ungleichung. □

Man interessiert sich im Allgemeinen aber für eine Gleichung anstelle einer Ungleichung: Es soll also gelten:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 = \|f\|^2 \,.$$

Daher definieren wir im Folgenden, in welchen Fällen bei der Besselschen Ungleichung Gleichheit auftritt.

Definition 2.2 (Vollständigkeit)
Ein ONS $(\varphi_n(x))_{n\geq 0}$ heißt vollständig, wenn für jedes $f \in R[a,b]$ die sogenannte ***Parsevalsche Gleichung***

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 = \|f\|^2 \tag{2.6}$$

erfüllt ist.

Aus dieser Definition erhält man, dass man ein ONS nicht durch weitere Funktionen „auffüllen“ kann, da sonst die Besselsche Ungleichung nicht mehr erfüllt wäre.

Satz 2.3 (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)
Sei $(f_n(x))_{n\geq 0}$ eine linear unabhängige Familie von Funktionen $f_n \in R[a,b]$. Dann lässt sich diese durch den folgenden iterativen Algorithmus orthogonalisieren:

1. *Setze $g_0 := f_0$*
2. *Berechne iterativ:*

$$g_n := f_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle f_n, g_k\rangle}{\langle g_k, g_g\rangle}\cdot g_k \,.$$

In diesem Fall erhalten wir ein Orthogonalsystem OS $(g_n(x))_{n\geq 0}$. Interessieren wir uns jedoch für ein Orthonormalsystem ONS $(\varphi_n(x))_{n\geq 0}$ mit der Eigenschaft, dass $\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle =$ 1 für $n \neq m$, so müssen wir das oben erhaltene OS noch normieren:

3. *Normiere:*

$$\varphi_n := \frac{g_n}{\|g_n\|}.$$

2.3 Orthogonale Polynome

Im Folgenden werden wir gewichtete Skalarprodukte der Form

$$\langle f, g\rangle := \sum_{x=a}^{b} w(x) f(x) g(x) \tag{2.7}$$

betrachten. Außerdem werden wir OS untersuchen, die für $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ aus Polynomen

$$\varphi_n(x) := P_n(x) = k_n x^n + k_n' x^{n-1} + k_n'' x^{n-2} + \dots \ (k_n \neq 0) \tag{2.8}$$

bestehen, deren Grad genau gleich n ist. Ein derartiges Polynomsystem nennen wir orthogonales Polynomsystem (OPS).

Da unser OPS ein erweitertes OS ist, sind unsere Polynome paarweise orthogonal, d.h. es gilt für $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$:

$$\langle P_n(x), P_m(x)\rangle = \sum_{x=a}^{b} w(x) P_n(x) P_m(x) = \begin{cases} h_n \neq 0 & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{falls } n \neq m \end{cases}. \tag{2.9}$$

Ist $h_n = \langle P_n(x), P_m(x)\rangle = \|P_m(x)\|^2 > 0$, dann nennen wir das Skalarprodukt positiv definit. Wir fordern, dass das Skalarprodukt im Folgenden immer positiv definit sei.

Im nächsten Abschnitt werden wir ein paar Eigenschaften betrachten, die alle OPS besitzen.

Satz 2.4 (Linearkombination)
Sei $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_{\geq 0}}$ ein OPS mit einem gewichteten Skalarprodukt der Form (2.7). Sei zudem $q(x)$ ein Polynom vom Grad n. Dann lässt sich $q(x)$ als Linearkombination

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$$

des gegebenen OPS darstellen, wobei die Koeffizienten c_j gegeben sind durch

$$c_j = \frac{1}{h_j}\langle q(x), P_j(x)\rangle = \frac{1}{h_j}\sum_{x=a}^{b} w(x) q(x) P_j(x).$$

<u>Beweis:</u> Wir berechnen

$$\langle q(x), P_j(x)\rangle = \langle \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x), P_j(x)\rangle = \sum_{k=0}^{n} c_k \underbrace{\langle P_k(x), P_j(x)\rangle}_{=0,\text{für } k\neq j} = c_j \langle P_j(x), P_j(x)\rangle = c_j h_j.$$

Es folgt also $c_j = \frac{1}{h_j}\langle q(x), P_j(x)\rangle$, was den Beweis abschließt. □

Satz 2.5 (Strukturbeziehungen)
Sei $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_{\geq 0}}$ *ein OPS bezüglich eines gewichteten Skalarprodukts.*
Dann ist $P_n(x)$ *zu jedem Polynom kleineren Grades orthogonal.*

Beweis: Jedes Polynom $q(x)$ kleineren Grades (also $\deg(q,x) < n$) lässt sich wegen des zuvor bewiesenen Satzes linear darstellen durch

$$q(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_{n-1} P_{n-1}(x)$$

mit konstanten Koeffizienten c_k.
Daraus folgt:

$$\langle q(x), P_n(x)\rangle = \langle \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k(x), P_n(x)\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \langle P_k(x), P_n(x)\rangle = 0\ ,$$

da alle $P_k(x)$ orthogonal zu $P_n(x)$ sind.
Also gilt die Behauptung. □

Satz 2.6 (Rekursionsgleichung)
Jedes OPS (2.8) bzgl. eines gewichteten Skalarproduktes der Form (2.7) erfüllt eine Rekursionsgleichung der Form

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n) P_n(x) - C_n P_{n-1}(x)\ (n \geq 0) \tag{2.10}$$

mit den Konstanten

$$A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n}, \tag{2.11}$$

$$B_n = A_n \left(\frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \frac{k'_n}{k_n} \right) \ \textit{und} \tag{2.12}$$

$$C_n = \frac{A_n h_n}{A_{n-1} h_{n-1}}. \tag{2.13}$$

Beweis: Sei $n \geq 1$ und sei A_n gemäß (2.11) bestimmt, also $A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n}$. Dann ist das Polynom

$$P_{n+1}(x) - A_n x P_n(x)$$

vom Grad $\leq n$. Wir finden also eine Darstellung für dieses Polynom der Form

$$P_{n+1}(x) - A_n x P_n(x) = c_0 P_0(x) + \ldots + c_n P_n(x). \tag{2.14}$$

Dann folgt für $k = 0, \ldots, n-2$ zusammen mit der Orthogonalität, Satz 2.5 und der Eigenschaft des Skalarproduktes, dass $\langle f, xg\rangle = \langle xf, g\rangle$:

$$\begin{aligned} h_k c_k &= \langle c_0 P_0(x) + \ldots + c_n P_n(x), P_k(x)\rangle \\ &= \langle P_{n+1}(x) - A_n x P_n(x), P_k(x)\rangle \\ &= \langle P_{n+1}(x), P_k(x)\rangle - A_n \langle x P_n(x), P_k(x)\rangle \\ &= \langle P_{n+1}(x), P_k(x)\rangle - A_n \langle P_n(x), x P_k(x)\rangle \\ &= -A_n \langle P_n(x), x P_k(x)\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wegen $h_k \neq 0$ folgt schließlich $c_k = 0$. Also gilt (2.10), denn setzen wir $c_k = 0$ für $k = 0, \dots, n-2$ in die Gleichung (2.14) ein, folgt:

$$\begin{aligned} & P_{n+1}(x) - A_n x P_n(x) = c_{n-1} P_{n-1}(x) + c_n P_n(x) \\ \Leftrightarrow \quad & P_{n+1}(x) = (A_n x + c_n) P_n(x) + c_{n-1} P_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Nun liefert ein Koeffizientenvergleich von x^n dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} & k'_{n+1} = A_n k'_n + c_n k_n \\ \Leftrightarrow \quad & c_n = \frac{k'_{n+1} - A_n k'_n}{k_n} = A_n \left(\frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \frac{k'_n}{k_n} \right). \end{aligned}$$

Also gilt mit $B_n := c_n = A_n \left(\frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \frac{k'_n}{k_n} \right)$ die Gleichung (2.12).

Um Gleichung (2.13) zu beweisen, betrachten wir erneut die Gleichung (2.10). Umstellen liefert

$$C_n P_{n-1}(x) = (A_n x + B_n) P_n(x) - P_{n-1}(x).$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} C_n \langle P_{n-1}(x), P_{n-1}(x) \rangle &= C_n h_{n-1} \\ &= A_n \langle P_{n-1}(x), x P_n(x) \rangle + B_n \langle P_n(x), P_{n-1}(x) \rangle - \langle P_{n+1}(x), P_{n-1}(x) \rangle \\ &= A_n \langle P_n(x), k_{n-1} x^n \rangle \\ &= A_n \frac{k_{n-1}}{k_n} \langle P_n(x), P_n(x) \rangle \\ &= A_n \frac{k_{n-1}}{k_n} h_n. \end{aligned}$$

Somit folgt $C_n = \frac{A_n h_n}{A_{n-1} h_{n-1}}$ und daraus Gleichung (2.13).
Setzen wir $P_{-1}(x) := 1$, so bleibt die Rekursionsgleichung (2.10) auch für $n = 0$ gültig.
□

Satz 2.7 (Satz von Farvard)
Ein Polynomsystem $P_n(x)$ ist orthogonal, wenn für dieses eine Dreitermrekursion der Form

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n) P_n(x) - C_n P_{n-1}(x)$$

mit $n \geq 0$, $P_{-1} = 0$ und $P_0 = 1$ gilt.
Das zugehörige Skalarprodukt ist genau dann positiv definit, wenn für $n \geq 1$ gilt:

$$C_n A_n A_{n-1} > 0.$$

<u>Beweis:</u> O.B.d.A. sei $Q_n(x) := \frac{P_n(x)}{k_n}$. Dann ist $Q_n(x)$ ein Polynomsystem mit höchstem Koeffizienten $k_n = 1$.
Daraus folgern wir mit (2.10)

$$A_n = 1, \quad B_n = -(k'_n - k'_{n+1}) =: b_n \ \text{ und } \ C_n = \frac{h_n}{h_{n-1}} =: c_n.$$

Wir erhalten damit die Gleichung

$$Q_n(x) = (x - b_n)Q_{n-1}(x) - c_n Q_{n-2}(x). \tag{2.15}$$

Die Gewichtsfunktion $w(x)$ sei genau so erklärt, dass für $n = 1, 2, 3, \dots$ gilt:

$$\sum_{x=0}^{N} w(x)Q_0(x)Q_n(x) = \sum_{x=0}^{N} w(x)Q_n(x) = 0. \tag{2.16}$$

Des Weiteren sei w(x) so gewählt, dass

$$\sum_{x=0}^{N} w(x)Q_0(x) \cdot Q_0(x) = \sum_{x=0}^{N} w(x) = \mu_0 = c_1.$$

Nun summieren wir nach Multiplikation mit $w(x)$ über (2.15). Für $n = 1$ erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{N} w(x)Q_1(x) &= \sum_{x=0}^{N} w(x) \cdot \big((x - b_1)Q_0(x) - c_1 Q_{-1}(x)\big) \\
&= \sum_{x=0}^{N} w(x) \cdot x - b_1 \cdot \sum_{x=0}^{N} w(x)Q_0(x) - c_1 \sum_{x=0}^{N} w(x)Q_{-1}(x) \\
&= \mu_1 - b_1 \cdot \mu_0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Für $n = 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{N} w(x)Q_2(x) &= \sum_{x=0}^{N} w(x) \cdot x \cdot Q_1(x) - b_2 \cdot \sum_{x=0}^{N} w(x)Q_1(x) - c_2 \cdot \sum_{x=0}^{N} w(x)Q_0(x) \\
&= \sum_{x=0}^{N} w(x) \cdot x \cdot Q_1(x) - b_2 \cdot (\mu_1 - b_1 \cdot \mu_0) - c_2 \cdot \mu_0 \\
&= \sum_{x=0}^{N} w(x) \cdot x^2 \cdot Q_0(x) - b_1 \sum_{x=0}^{N} w(x) \cdot x \cdot Q_0(x) \\
&\quad -c_1 \cdot \sum_{x=0}^{N} w(x) \cdot x \cdot Q_{-1}(x) - b_2(\mu_1 - b_1\mu_0) - c_2\mu_0 \\
&= \mu_2 - b_1 \cdot \mu_1 - b_2 \cdot (\mu_1 - b_1\mu_0) - c_2\mu_0 \\
&= \mu_2 - (b_1 + b_2)\mu_1 + (b_1 \cdot b_2 - c_2)\mu_0 \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Analog dazu lassen sich die Darstellungen auch für $n = 3, 4, 5, \dots$ herleiten.
Umformung von (2.15) und Shift von n liefert uns nun

$$x \cdot Q_n(x) = Q_{n+1}(x) + b_{n+1}Q_n(x) + c_{n+1}Q_{n-1}(x). \tag{2.17}$$

Multiplizieren wir dann (2.17) mit $w(x)$, liefert Summation mit (2.16)

$$\sum_{x=0}^{N} w(x) \cdot x \cdot Q_n(x) = 0, \quad (n \geq 2).$$

Multiplizieren wir hingegen (2.17) mit $w(x)$, dann liefert auch hier Summation mit (2.16)

$$\sum_{x=0}^{N} w(x) \cdot x^2 \cdot Q_n(x) = 0, \quad (n \geq 3).$$

Durch iterative Fortsetzung erhalten wir

$$\sum_{x=0}^{N} w(x) \cdot x^k \cdot Q_n(x) = 0, \quad (0 \leq k < n).$$

Hieraus folgt die Orthogonalität von $Q_n(x)$ bzgl. der Gewichtsfunktion $w(x)$.

Bleibt die positive Definitheit des Skalarproduktes zu zeigen, wenn $C_nA_nA_{n-1} > 0$ gilt, d.h.

$$C_nA_nA_{n-1} > 0 \Leftrightarrow \langle P_n, P_n \rangle = \sum_{x=0}^{N} w(x)P_n^2 > 0.$$

Dazu setzen wir (2.11) und (2.13) in $C_nA_nA_{n-1}$ ein und erhalten

$$C_nA_nA_{n-1} = \frac{A_nh_n}{A_{n-1}h_{n-1}} \frac{k_{n+1}}{k_n} \frac{k_n}{k_{n-1}} = \frac{k_{n+1^2}h_n}{k_n^2h_{n-1}}.$$

Nun sind k_n und k_{n+1} als höchste Koeffizienten von $P_n(x)$ bzw. P_{n+1} ungleich Null und daher gilt $k_n^2 > 0$ und $k_{n+1}^2 > 0$.

„$\Rightarrow$“: Sei zunächst das Skalarprodukt zu $P_n(x)$ positiv definit. Dann gilt $\langle P_n, P_n \rangle = h_n > 0$ und $\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle = h_{n-1} > 0$ für $n \geq 1$. Da zudem $k_n^2 > 0$ und $k_{n-1}^2 > 0$ sind, gilt für $n \geq 1$ $C_nA_nA_{n-1} = \frac{k_{n+1}^2h_n}{k_n^2h_{n-1}} > 0$.

„$\Leftarrow$“: Sei $C_nA_nA_{n+1} > 0$. Wir werden nun induktiv zeigen, dass das Skalarprodukt dann positiv definit ist. Wegen $h_0 = 1$ folgt für $n = 1$

$$C_1A_1A_0 = \frac{k_2^2h_1}{k_1^2}.$$

Da $C_1A_1A_0 > 0$ gilt, muss auch $h_1 > 0$ gelten.
Für $n = 2$ folgt dann

$$C_2A_2A_1 = \frac{k_3^2h_2}{k_2^2h_1}.$$

Wegen $h_1 > 0$ und $C_2A_2A_1 > 0$ sind, muss auch $h_2 > 0$ gelten.

Führt man dies iterativ fort, erhält man für $n \geq 1$

$$C_n A_n A_{n-1} = \frac{k_{n+1}^2 h_n}{k_n^2 h_{n-1}}.$$

Da $C_n A_n A_{n-1} > 0$ und $h_{n-1} > 0$ folgt auch, dass $h_n > 0$ gelten muss.

Es gilt also, dass das Skalarprodukt zu $P_n(x)$ (also $h_n > 0$) genau dann positiv definit ist, wenn $C_n A_n A_{n-1} > 0$ für $n \geq 1$ gilt. $\square$

3 Klassische Diskrete Orthogonale Polynome

3.1 Differenzenrechnung

Wir wollen im Folgenden einige Eigenschaften der Differenzenrechnung einführen.

Definition 3.1 (Differenzenoperatoren)
Der sogenannte ***Vorwärtsdifferenzenoperator*** *definiert sich wie folgt:*

$$\Delta f(x) := f(x+1) - f(x). \tag{3.1}$$

Analog lässt sich ein ***Rückwärtsdifferenzenoperator*** *definieren:*

$$\nabla f(x) := f(x) - f(x-1). \tag{3.2}$$

Satz 3.1 (Produktregel)
Für den Vorwärtsdifferenzenoperator gilt die folgende Produktregel:

$$\Delta(f(x)g(x)) = g(x+1)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x). \tag{3.3}$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta(f(x)g(x)) &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) \\
&= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x+1) + f(x)g(x+1) - f(x)g(x) \\
&= g(x+1)\cdot(f(x+1) - f(x)) + f(x)\cdot(g(x+1) - g(x)) \\
&= g(x+1)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 3.2 (Partielle Summation)
Für den Vorwärtsdifferenzenoperator gilt die Regel der partiellen Summation:

$$\sum_{x=a}^{b} f(x)\cdot\Delta g(x) = f(b+1)\cdot g(b+1) - f(a)\cdot g(a) - \sum_{x=a}^{b} g(x+1)\cdot\Delta f(x). \tag{3.4}$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{x=a}^{b} f(x)\cdot\Delta g(x) &= \sum_{x=a}^{b} f(x)\cdot(g(x+1)-g(x)) \\
&= f(a)\cdot(g(a+1)-g(a)) + f(a+1)\cdot(g(a+2)-g(a+1)) \\
&\quad +\ldots + f(b-1)\cdot(g(b)-g(b-1)) + f(b)\cdot(g(b+1)-g(b)) \\
&= -f(a)\cdot g(a) + (f(a)-f(a+1))\cdot g(a+1) \\
&\quad +\ldots + (f(b-1)-f(b))\cdot g(b) + f(b)\cdot g(b+1) \\
&= -f(a)\cdot g(a) - g(a+1)\cdot\Delta f(a) - g(a+2)\cdot\Delta f(a+1) \\
&\quad +\ldots + g(b)\cdot\Delta f(b-1) + g(b+1)\cdot f(b) \\
&= -f(a)\cdot g(a) - \sum_{x=a}^{b-1} g(x+1)\cdot\Delta f(x) \\
&\quad + f(b)\cdot g(b+1) - f(b+1)\cdot g(b+1) + f(b+1)\cdot g(b+1) \\
&= f(b+1)\cdot g(b+1) - f(a)\cdot g(a) - \sum_{x=a}^{b-1} g(x+1) \\
&\quad - g(b+1)\cdot\underbrace{(f(b+1)-f(b))}_{=\Delta f(b)} \\
&= f(b+1)\cdot g(b+1) - f(a)\cdot g(a) - \sum_{x=a}^{b} g(x+1)\Delta f(x)\,.
\end{aligned}$$

□

Satz 3.3
Zwischen dem Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzenoperator gilt folgende Beziehung:

$$\Delta f(x) = \nabla f(x+1). \tag{3.5}$$

Beweis: Betrachtet man die rechte und die linke Seite von (3.5), dann gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= f(x+1) - f(x) \text{ und} \\
\nabla f(x+1) &= f(x+1) - f(x+1-1) \\
&= f(x+1) - f(x).
\end{aligned}$$

Es gilt also $\Delta f(x) = \nabla f(x+1)$, wie behauptet. □

Definition 3.2 (Pochhammer-Symbol)
Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Dann wird

$$(k)_n := \underbrace{k\cdot(k+1)\cdots(k+n-1)}_{n \text{ Faktoren}} \tag{3.6}$$

*als das **Pochhammer-Symbol** bezeichnet.*

Definition 3.3 (Fallende Faktorielle)
*Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Dann gilt für die so genannten **fallenden Faktoriellen**:*

$$k^{\underline{n}} := \underbrace{k \cdot (k-1) \cdots (k-n+1)}_{n \text{ Faktoren}} \tag{3.7}$$

und

$$k^{\underline{n}} := \frac{1}{k \cdot (k-1) \cdots (k-n+1)} \; .$$

Wir wollen nun zeigen, dass sich die fallenden Faktoriellen und das Pochhammer-Symbol, das auch als steigende Faktorielle bezeichnet werden kann, mit Hilfe der Differenzenoperatoren reduzieren lassen.

Satz 3.4
Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, dann gilt für das Pochhammer-Symbol:

$$\nabla_k (k)_n = n \cdot (k)_{n-1} \; . \tag{3.8}$$

Beweis: Da $(k)_n = k \cdot (k+1) \cdots (k+n-1)$ ein Polynmom vom Grad n darstellt, gilt:

$$\begin{aligned} \nabla_k (k)_n &= (k)_n - (k-1)_n \\ &= k \cdot (k+1) \cdots (k+n-1) - (k-1) \cdot (k) \cdots (k+n-2) \\ &= \underbrace{k \cdot (k+1) \cdots (k+n-2)}_{=(k)_{n-1}} \cdot \underbrace{(k+n-1-(k-1))}_{=n} \\ &= n \cdot (k)_{n-1} \; . \end{aligned}$$

□

Analog lässt sich folgender Satz für die fallenden Faktoriellen beweisen:

Satz 3.5
Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, dann gilt für die fallenden Faktoriellen:

$$\Delta_k k^{\underline{n}} = n \cdot k^{\underline{n-1}} \; . \tag{3.9}$$

Beweis: Auch $k^{\underline{n}} = k \cdot (k-1) \cdots (k-n+1)$ stellt ein Polynom vom Grad n dar, also folgt:

$$\begin{aligned} \Delta_k k^{\underline{n}} &= (k+1)^{\underline{n}} - k^{\underline{n}} \\ &= (k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdots (k-n+2) - k \cdot (k-1) \cdots (k-n+2) \cdot (k-n+1) \\ &= \underbrace{k \cdot (k-1) \cdots (k-n-2)}_{=k^{\underline{n-1}}} \cdot \underbrace{(k+1-(k-n+1))}_{=n} \\ &= n \cdot k^{\underline{n-1}} \; . \end{aligned}$$

□

Definition 3.4 (Diskretes orthogonales Polynomsystem)
*Eine Polynomfamilie $P_n(x)$ (mit $\deg(P_n(x), x) = n$ und $P_n(x) = k_n x^n + k'_n x^{n-1} + k''_n x^{n-2} + \ldots$) heißt **klassisches diskretes orthogonales Polynomsystem** (im Folgenden: diskretes OPS), wenn es Lösung der folgenden Differenzengleichung ist:*

$$\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda_n y(x) = 0. \tag{3.10}$$

Dabei gilt

$$\Delta f(x) := f(x+1) - f(x)$$

und

$$\nabla f(x) := f(x) - f(x-1).$$

Für $\sigma(x)$, $\tau(x)$ und λ_n gilt zudem:

- *für $n = 1$ ist $\tau(x) = dx + e$ ein lineares Polynom*
- *für $n = 2$ ist $\sigma(x) = ax^2 + bx + c$ ein Polynom vom Grad ≤ 2*
- *durch Koeffizientenvergleich der höchsten Koeffizienten erhält man die Beziehung:*

$$\lambda_n = -(an(n-1) + dn) \, . \tag{3.11}$$

3.2 Differenzengleichungen klassischer diskreter orthogonaler Polynomfamilien

In diesem Abschnitt wollen wir Differenzengleichungen zu verschiedenen diskreten orthogonalen Polynomfamilien finden.
Dazu betrachten wir zunächst erneut die Gleichung (3.10). Wegen $\Delta\nabla = \Delta - \nabla$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda_n y(x) \\ &= \sigma(x)(\Delta y(x) - \nabla y(x)) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda_n y(x) \\ &= (\sigma(x) + \tau(x))\Delta y(x) - \sigma(x)\nabla y(x) + \lambda_n y(x) \, . \end{aligned}$$

Man kann also erkennen, dass nicht nur das Polynom $\sigma(x)$ vom Grad 2 als Koeffizient der höchsten Differenz bedeutsam ist, sondern auch $\sigma(x) + \tau(x)$.
Die Differenzengleichung können wir auch auch durch Shiftoperation ausdrücken. Es gilt also:

$$\begin{aligned} -\lambda_n y(x) &= (\sigma(x) + \tau(x))\Delta y(x) - \sigma(x)\nabla y(x) + \lambda_n y(x) \\ &= (\sigma(x) + \tau(x))(y(x+1) - y(x)) - \sigma(x)(y(x) - y(x-1)) \\ &= (\sigma(x) + \tau(x))y(x+1) - (\sigma(x) + \tau(x) + \sigma(x))y(x) + \sigma(x)y(x-1) \\ &= (\sigma(x) + \tau(x))y(x+1) - (2\sigma(x) + \tau(x))y(x) + \sigma(x)y(x-1) \, . \end{aligned}$$

Nun wollen wir die resultierenden Polynomsysteme - bis auf lineare Transformation - klassifizieren. In der folgende Fallunterscheidung werden wir alle Polynomsysteme als klassische diskrete orthogonale Polynome bezeichnen. Dabei handelt es sich bei allen Systemen, bis auf die fallenden Faktoriellen, um OPS. Einige dieser Systeme sind endlich:

	$\sigma(x)$	$\sigma(x)+\tau(x)$	$P_n(x)$	Familie
1	1	$\alpha x+\beta+1$	$(-1)^n C_n(-x-\frac{1+\alpha}{\beta};-\frac{1}{\alpha})$	verschobene Charlierpol.
2	x	0	$x^{\underline{n}}$	fallende Faktorielle
3	x	μ ($\mu \neq 0$)	$C_n(x;\mu)$	Charlierpolynome
4	x	$\mu(\gamma+x)$	$M_n(x;\gamma,\mu)$	Meixnerpolynome
5	x	$\frac{p}{1-p}(N-x)$	$K_n(x;p,N)$	Krawtchoukpolynome
6	$x(N+1+\beta-x)$	$(x+\alpha+1)(N-x)$	$Q_n(x;\alpha,\beta,N)$	Hahnpolynome

Tabelle 1: Differenzengleichungen der klassischen diskreten orthogonalen Polynome

3.3 Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wir wollen nun Definitionen aus der Stochastik kennen lernen. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir dann sehen, dass die OPS eng verbunden sind mit einigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen.
Bevor wir dazu kommen, wollen wir uns an die Definition des Binomialkoeffizienten und die Eigenschaften erinnern:

Definition 3.5 (Binomialkoeffizient)
Seien $k,n\in\mathbb{N}_{\geq 0}$ und es gelte $k\leq n$. Dann gilt

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{3.12}$$

wobei $\binom{n}{k}$ Binomialkoeffizient genannt und „n über k“ gesprochen wird.

Satz 3.6 (Eigenschaften des Binomialkoeffizienten)
Für den Binomialkoeffizienten gelten unter anderem die folgenden Beziehungen:

(a) $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

(b) $\binom{n}{1}=n$

(c) $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$

(d) $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}$

(e) $\sum_{i=0}^{k}\binom{a}{i}\cdot\binom{b}{k-i}=\binom{a+b}{k}$

<u>Beweis:</u>

(a) Es gilt nach Definition zum einen

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!(n-0)!}=\frac{n!}{n!}=1$$

und zum anderen gilt

$$\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{n!}{n!}=1.$$

(b) Betrachten wir wieder die Definition, dann gilt

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)\cdots 2 \cdot 1}{(n-1)\cdots 2 \cdot 1} = n.$$

(c) Wir betrachten für diese Beziehung die rechte Seite der Gleichung, dann gilt nach Definition

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{k \cdot n!}{k \cdot (k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{(n-k+1) \cdot n!}{(n-k+1) \cdot k!(n-k)!} \\
&= \frac{k \cdot n! + (n-k+1) \cdot n!}{k!(n-(k-1))!} \\
&= \frac{(n+1) \cdot n!}{k!(n-(k-1))!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \\
&= \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)\dots((n-1)-(k-1)+1)}{(k-1)!} \\
&= \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}.
\end{aligned}$$

(e) Wir betrachten das Polynom $f(x) = (1+x)^{a+b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach dem binomischen Lehrsatz einerseits

$$(1+x)^{a+b} = \sum_{k=0}^{a+b} \binom{a+b}{k} x^k$$

und andererseits gilt

$$\begin{aligned}
(1+x)^{a+b} &= (1+x)^a \cdot (1+x)^b = \left(\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{b} \binom{b}{j} x^j \right) \\
&= \sum_{k=0}^{a+b} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i} x^i \binom{b}{k-i} x^{k-i} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{a+b} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i} \binom{b}{k-i} x^k \right).
\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man also

$$\sum_{k=0}^{a+b} \binom{a+b}{k} x^k = \sum_{k=0}^{a+b} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i} \binom{b}{k-i} x^k \right) .$$

Mittels Koeffizientenvergleich erhalten wir schließlich

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i} \binom{b}{k-i} = \binom{a+b}{k} .$$

□

Nun werden wir den Begriff des Wahrscheinlichkeitsraumes, des Erwartungswertes und der Varianz definieren.

Definition 3.6 (Wahrscheinlichkeitsraum)
Ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Paar (Ω, P)*, wobei* $\Omega \neq \emptyset$ *eine endliche Menge und* P *eine auf den Teilmengen von* Ω *definierte reellwertige Funktion mit folgenden Eigenschaften ist:*

(1) Nichtnegativität: $P(A) \geq 0$*, für* $A \subseteq \Omega$

(2) Normiertheit: $P(\Omega) = 1$

(3) Additivität: $P(A + B) = P(A) + P(B)$*, falls* $A \cap B = \emptyset$

P *heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung oder auch Wahrscheinlichkeitsmaß auf* Ω*.*
$P(A)$ *wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses* A *genannt.*

Definition 3.7 (Erwartungswert)
Für eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum* (Ω, P) *heißt die Zahl*

$$E(X) := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) \tag{3.13}$$

der ***Erwartungswert*** *von* X*.*

Der Erwartungswert liefert einen Mittelwert für die Zufallsvariable X. Hierfür gewichtet man die Werte $X(\omega)$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(\omega)$ und erhält schließlich den Mittelwert (3.13).

Definition 3.8 (Varianz)
Für eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum* (Ω, P) *heißt*

$$V(X) := E(X - EX)^2 \tag{3.14}$$

die Varianz von X.

Nimmt X *die verschiedenen Werte* $x_1, \dots, x_n$ *an, so folgt für die Varianz*

$$V(X) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - EX)^2 \cdot P(X = x_j) \tag{3.15}$$

Satz 3.7 (Eigenschaft der Varianz)
Für die Varianz einer Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) gilt die folgende Beziehung:

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 \,.$$

Beweis: Um diese Gleichung zu beweisen, betrachten wir (3.14). Durch Umformung erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X - EX)^2 \\ &= E(X^2) - 2EX \cdot EX + (EX)^2 \\ &= E(X^2) - (EX)^2 \,. \end{aligned}$$

□

Während der Erwartungswert eine Maßzahl für den Schwerpunkt einer Verteilung ist, ist die Varianz eine Maßzahl für die Streuung um diesen Schwerpunkt.

Wir wollen nun verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen kennen lernen und einsehen, in welchen Situationen die einzelnen Verteilungen angewendet werden.
In der Stochastik sind so genannte Urnenmodelle bekannt. In dieser Urne befinden sich N Kugeln mit unterschiedlichen Farben. Es werden nun Kugeln aus dieser Urne gezogen, wobei es sein kann, dass z.B. die Kugeln nach dem Ziehen wieder zurück in die Urne gelegt werden sollen. Uns interessieren jetzt diese verschiedenen Fälle, denn für jeden Fall gibt es eine eigene Wahrscheinlichkeitsverteilung, die dazu dient, die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse zu repräsentieren.

3.3.1 Hypergeometrische Verteilung

Stellen wir uns nun vor, dass sich in der Urne $N = r + s$ Kugeln befinden, wobei r die Anzahl der roten Kugeln und s die Anzahl der schwarzen Kugeln ist. Es soll nun n-mal ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gezogen werden. Interessiert man sich nun für die Wahrscheinlichkeit, dass sich eine gewisse Anzahl an roten (oder auch schwarzen) Kugeln unter den n gezogenen Kugeln befindet, so können wir diese mit Hilfe der hypergeometrischen Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnen.

Sei

$$X := \sum_{j=1}^{n} 1\{A_j\}$$

eine Zählvariable mit $A_j := \{(a_j, \ldots, a_n) \in \Omega : a_j \leq r\}$. Dann beschreibt diese Zählvariable z.B. die Anzahl der roten Kugeln k beim n-maligen Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln.

Definition 3.9
Die Verteilung von einem wie oben beschriebenen X heißt hypergeometrische Verteilung mit den Parametern n, r, s.

Dann erhalten wir für X die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}} \quad (k = 0, \ldots, n). \tag{3.16}$$

Wir können also mit der hypergeometrischen Verteilung die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass beim n-maligen Ziehen ohne Zurücklegen k rote Kugeln gezogen werden.

An dieser Stelle wollen wir exemplarisch den Erwartungswert der der hypergeometrischen Verteilung berechnen. Für diesen gilt mit (3.13)

$$E(X) = \sum_{j=0}^{n} j \cdot P(X = j) = \sum_{j=0}^{n} j \cdot \frac{\binom{r}{j}\binom{s}{n-j}}{\binom{r+s}{n}} \ .$$

Wir können nun diese Gleichung mit den Eigenschaften des Binomialkoeffizienten umformen und erhalten

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{j=1}^{n} j \cdot \frac{\binom{r}{j}\binom{s}{n-j}}{\binom{r+s}{n}} \\
&= \frac{1}{\binom{r+s}{n}} \sum_{j=0}^{n} j \cdot \binom{r}{j}\binom{s}{n-j} \\
&= \frac{1}{\frac{r+s}{n}\binom{r+s-1}{n-1}} \sum_{j=1}^{n} j \cdot \frac{r}{j}\binom{r-1}{j-1}\binom{s}{n-j} \\
&= \frac{r}{\frac{r+s}{n}\binom{r+s-1}{n-1}} \sum_{j=1}^{n} \binom{r-1}{j-1}\binom{s}{n-1-(j-1)} \\
&= \frac{r}{\frac{r+s}{n}\binom{r+s-1}{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \binom{r-1}{i}\binom{s}{n-1-i)} \\
&= \frac{r}{\frac{r+s}{n}\binom{r+s-1}{n-1}} \binom{r-1+s}{n-1)} \\
&= \frac{r}{\frac{r+s}{n}} \\
&= n \cdot \frac{r}{r+s} \ .
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir schließlich:
Erwartungswert:

$$E(X) = n \cdot \frac{r}{r+s} \tag{3.17}$$

Varianz:

$$V(X) = n \cdot \frac{r}{r+s} \cdot \left(1 - \frac{r}{r+s}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{r+s-1}\right) \tag{3.18}$$

3.3.2 Binomialverteilung

Nun interessiert uns der Fall, dass n Kugeln aus der Urne gezogen werden, wobei nach jedem Zug die Kugel wieder zurück in die Urne gelegt wird. Wieder soll hier die Anzahl der gezogenen roten Kugeln von Bedeutung sein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass k rote Kugeln gezogen werden? Diese Frage beantwortet uns die so genannte Binomialverteilung:

Definition 3.10
Eine Zufallsvariable X besitzt eine Binomialverteilung mit den Parametern n und p (mit $n, p \in \mathbb{N}$ und $0 < p < 1$), falls gilt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{3.19}$$

Erwartungswert:

$$E(X) = n \cdot p \tag{3.20}$$

Varianz:

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1-p) \tag{3.21}$$

3.3.3 Poisson-Verteilung

In manchen Fällen führt die Binomialverteilung nicht zum Erfolg, d.h. sie liefert keine oder eine ungenaue Wahrscheinlichkeit. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn die Wahrscheinlichkeiten sehr klein sind. Um jedoch trotzdem eine eindeutige Aussage über die Wahrscheinlichkeitsverteilung treffen zu können, brauchen wir eine andere Methode. Diese wird Poisson-Verteilung genannt:

Definition 3.11
Eine Zufallsvariable X besitzt eine Poisson-Verteilung mit dem Parameter $\lambda > 0$, falls gilt:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.22}$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \lambda \tag{3.23}$$

Varianz:

$$V(X) = E(X) = \lambda \tag{3.24}$$

3.3.4 Pascalsche Verteilung

In der letzten Verteilung betrachten wir die so genannte Pascalsche Verteilung. Diese wird angewendet, wenn man mehrere Experimente macht und eine Aussage über die Anzahl der Misserfolge k machen möchte.

Definition 3.12
Eine Zufallsvariable X besitzt eine Pascalsche Verteilung (oder: negative Binomialverteilung) mit den Parametern r und p ($r \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$), falls ihre Verteilung gegeben ist durch:

$$P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} \cdot p^r \cdot (1-p)^k \quad (k \in \mathbb{N}_0). \tag{3.25}$$

Erwartungswert:

$$E(X) = r \cdot \frac{1-p}{p} \tag{3.26}$$

Varianz:

$$V(X) = E(X) = r \cdot \frac{1-p}{p^2} \tag{3.27}$$

3.4 Gewichtsfunktion

Ein diskretes OPS besitzt eine diskrete Gewichtsfunktion $d\mu(x) = w(x)|_{x\in\mathbb{Z}}$. Diese genügt der so genannten *Pearsonschen Differenzengleichung*

$$\Delta(\sigma(x)w(x)) = \tau(x)w(x). \tag{3.28}$$

Betrachtet man die Pearsonsche Differenzengleichung (3.28) genauer, so folgt:

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma(x)w(x)) &= \tau(x)w(x) \\ \Leftrightarrow w(x+1)\sigma(x+1) - \sigma(x)w(x) &= \tau(x)w(x) \\ \Leftrightarrow \frac{w(x+1)}{w(x)} &= \frac{\tau(x)+\sigma(x)}{\sigma(x+1)}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Wir erhalten also das Termverhältnis (3.29). Nun ist das **Skalarprodukt** gegeben durch

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x)d\mu(x) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} w(x) f(x)g(x) \,. \tag{3.30}$$

Beispiel 1
Wir betrachten die Gewichtsfunktion $w(x) = 1$ für $x = 0, \dots, N-1$. Sie ist also an N Gitterpunkten erklärt. Mit dem Gram-Schmidtschen-Orthogonalisierungsverfahren, welches in Satz 2.3 eingeführt wurde, kann man nun die Polynome bestimmen.
Das folgende Mathematica-Output liefert uns für $N = 5$ die zugehörigen orthogonalen und orthonormalen Polynome.

Zunächst wird das Skalarprodukt definiert:

In[1]:= **Skalarprodukt[f_, g_, w_, N_] :=** $\sum_{x=0}^{N-1}$ **w * f * g**

Die folgende Funktion liefert ein OS:

```
In[2]:= Clear[GramSchmidtOS];
        GramSchmidtOS[f_, w_, N_] :=
          Module[{fliste, gliste = {}, t},
          fliste = Table[f, {n, 0, N - 1}];
          AppendTo[gliste, fliste[[1]]];
          For[i = 2, i <= N, i + +,
          t =
          fliste[[i]]-
          Sum[Skalarprodukt[fliste[[i]], gliste[[k]], w, N] / Skalarprodukt[gliste[[k]], gliste[[k]], w, N], {k, 1, i-1}] *
          gliste[[k]]//Together;
          AppendTo[gliste, t]];
          gliste
        ]
In[3]:= OS = GramSchmidtOS[x^n, 1, 5]
```

Out[3]= $\left\{1, x-2, x^2-4x+2, \frac{1}{5}\left(5x^3-30x^2+43x-6\right), \frac{1}{35}\left(35x^4-280x^3+685x^2-500x+12\right)\right\}$

Wir erkennen, dass die Polynome paarweise orthogonal sind, z.B.:

```
In[4]:= Skalarprodukt[OS[[1]], OS[[2]], 1, 5]
```

Out[4]= 0

Allerdings sind sie die Polynome nicht normiert:

```
In[5]:= Skalarprodukt[OS[[1]], OS[[1]], 1, 5]
```

Out[5]= 5

Diese Funktion berechnet schließlich ein ONS:

```
In[6]:= Clear[GramSchmidtONS];
        GramSchmidtONS[f_, w_, N_] :=
          Module[{g = GramSchmidtOS[f, w, N], ϕ = {}, t},
          For[i = 1, i ≤ Length[g], i + +,
          t = g[[i]] / Sqrt[Skalarprodukt[g[[i]], g[[i]], w, N]];
          AppendTo[ϕ, t]];
          ϕ
        ]
In[7]:= ONS = GramSchmidtONS[x^n, 1, 5]
```

```
Out[7]= {1/√5, (x-2)/√10, (x^2-4x+2)/√14,
        (5x^3-30x^2+43x-6)/(6√10), (35x^4-280x^3+685x^2-500x+12)/(12√70)}
```

$$\text{Out[7]=}\ \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{x-2}{\sqrt{10}}, \frac{x^2-4x+2}{\sqrt{14}}, \frac{5x^3-30x^2+43x-6}{6\sqrt{10}}, \frac{35x^4-280x^3+685x^2-500x+12}{12\sqrt{70}}\right\}$$

Auch hier sind die Polynome wieder paarweise orthogonal, z.B.:

```
In[8]:= Skalarprodukt[ONS[[1]], ONS[[2]], 1, 5]
Out[8]= 0
```

Hier sind sie auch normiert:

```
In[9]:= Skalarprodukt[ONS[[1]], ONS[[1]], 1, 5]
Out[9]= 1
```

Wir erhalten in diesem Beispiel (bis auf Standardisierung) die so genannten diskreten Chebyshevpolynome, welche zu $\sigma(x) = x(N-x)$ und $\sigma(x) + \tau(x) = (x+1)(N-1-x)$ gehören.
Eine konstante Gewichtsfunktion liefert immer einen Spezialfall der Hahnpolynome $Q_n(x;\alpha,\beta,N)$.

Abschließend folgt eine Übersicht der Gewichtsfunktionen verschiedener Polynomfamilien mit Definitionsbereich.

$P_n(x)$	Familie	$w(x)$	Def.Bereich	Bedingungen
$C_n(x;\mu)$	Charlierpol.	$\frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$	$\mathbb{N}_{\geq 0}$	$\mu > 0$
$M_n(x;\gamma,\mu)$	Meixnerpol.	$\frac{\mu^x(\gamma)_x}{x!}$	$\mathbb{N}_{\geq 0}$	$\gamma > 0, 0 < \mu < 1$
$K_n(x;p,N)$	Krawtchoukpol.	$\binom{N}{x}p^x(1-p)^{N-x}$	$\{0,1,\ldots,N\}$	$0 < p < 1$
$Q_n(x;\alpha,\beta,N)$	Hahnpol.	$\binom{\alpha+x}{x}\binom{\beta+N-x}{N-x}$	$\{0,1,\ldots,N\}$	$\alpha > -1, \beta > -1$

Tabelle 2: Gewichtsfunktionen der klassischen diskreten orthogonalen Polynome

Betrachtet man zum Beispiel die Charlierpolynome mit (3.29), so erhält man aus

$$\frac{w(x+1)}{w(x)} = \frac{\sigma(x)+\tau(x)}{\sigma(x+1)} = \frac{\mu}{x+1}$$

die Gewichtsfunktion

$$w(x) = C\frac{\mu^x}{x!}$$

Dabei wählt man $C = e^{-\mu}$ aus historischen Gründen und erhält $w(x) = e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!}$, welches die Poisson-Verteilung (3.22) darstellt.

Wir betrachten nun die Gewichtsfunktionen der anderen OPS genauer und wollen sehen, welche Verbindung zwischen ihnen und den anderen Wahrscheinlichkeitsverteilungen besteht.
Betrachten wir die Meixnerpolynome mit $w(x) = \frac{\mu^x(\gamma)_x}{x!}$, so ist erkennbar, dass dies genau die Pascalverteilung (3.25) ist. Die Gewichtsfunktion $w(x) = \binom{N}{x}p^x(1-p)^{N-x}$ der

Krawtchoukpolynome stellt genau die Binomialverteilung (3.19) dar und für die Hahn-polynome gilt die hypergeometrische Verteilung (3.16), denn vergleicht man diese mit $w(x) = \binom{\alpha+x}{x}\binom{\beta+N-x}{N-x}$, so kann man erkennen, dass sie gleich sind.

Die Nebenbedingung der Tabelle ist wichtig, da sie für die Konvergenz der klassischen diskreten OPS verantwortlich ist.

3.5 Orthogonalität

Wir wollen nun zeigen, dass die in der Tabelle 2 gegebenen Bedingungen wirklich die Orthogonalität der diskreten orthogonalen Polynomfamilien liefert.
Dazu betrachten wir erneut die Pearsonsche Differenzengleichung (3.28). Ersetzt man in dieser Gleichung nun $y(x)$ durch $P_n(x)$, dann folgt:

$$\Delta(\sigma(x)w(x)\nabla P_n(x)) = -\lambda_n w(x)P_n(x) \tag{3.31}$$

Multiplikation dieser zu n gehörigen Gleichung mit $P_m(x)$ liefert:

$$\Delta(\sigma(x)w(x)\nabla P_n(x)) \cdot P_m(x) + \lambda_n w(x)P_n(x) \cdot P_m(x) = 0. \tag{3.32}$$

Analog erhalten wir durch Multiplikation zu der zu m gehörigen Gleichung mit $P_n(x)$ und anschließendem Gleichsetzung mit (3.32):

$$\begin{aligned}
& \Delta(\sigma(x)w(x)\nabla P_m(x)) \cdot P_n(x) + \lambda_m w(x)P_m(x) \cdot P_n(x) \\
& = \Delta(\sigma(x)w(x)\nabla P_n(x)) \cdot P_m(x) + \lambda_n w(x)P_n(x) \cdot P_m(x) \\
\Leftrightarrow\quad & (\lambda_m - \lambda_n)w(x)P_m(x) \cdot P_n(x) \\
& = \Delta(\sigma(x)w(x)\nabla P_n(x)) \cdot P_m(x) - \Delta(\sigma(x)w(x)\nabla P_m(x)) \cdot P_n(x)\ .
\end{aligned}$$

Nach Summierung über die letzte Gleichung im Intervall $x = a, \ldots, b$ folgt:

$$\begin{aligned}
& (\lambda_m - \lambda_n) \cdot \sum_{x=a}^{b} w(x)P_m(x)P_n(x) \\
= \quad & \sum_{x=a}^{b} \Delta(\sigma(x)w(x)\nabla P_n(x)) \cdot P_m(x) - \sum_{x=a}^{b} \Delta(\sigma(x)w(x)\nabla P_m(x)) \cdot P_n(x)\ .
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Wird die partielle Summation (3.4) auf diese Gleichung angewendet, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_m - \lambda_n) \cdot \sum_{x=a}^{b} w(x)P_m(x)P_n(x) \\
= \ & \left[\sigma(x)w(x)\nabla P_n(x)P_m(x)\right]_{x=a}^{x=b+1} - \sum_{x=a}^{b} \sigma(x+1)w(x+1)\underbrace{\nabla P_n(x+1)}_{=\Delta P_n(x)}\Delta P_m(x) \\
& - \left[\sigma(x)w(x)\nabla P_m(x)P_n(x)\right]_{x=a}^{x=b+1} + \sum_{x=a}^{b} \sigma(x+1)w(x+1)\underbrace{\nabla P_m(x+1)}_{=\Delta P_m(x)}\Delta P_n(x) \\
= \ & \left[\sigma(x)w(x)\nabla P_n(x)P_m(x)\right]_{x=a}^{x=b+1} - \sum_{x=a}^{b} \sigma(x+1)w(x+1)\Delta P_n(x)\Delta P_m(x) \\
& - \left[\sigma(x)w(x)\nabla P_m(x)P_n(x)\right]_{x=a}^{x=b+1} + \sum_{x=a}^{b} \sigma(x+1)w(x+1)\Delta P_m(x)\Delta P_n(x) \\
= \ & \left[\sigma(x)w(x)(\nabla P_n(x)P_m(x) - \nabla P_m(x)P_n(x))\right]_{x=a}^{x=b+1} \ .
\end{aligned}
$$

Die OPS bzgl. eines Skalarproduktes der Form (2.7) sind orthogonal, wenn folgende Randbedingung erfüllt ist

$$\lim_{x\to a} x^n\sigma(x)w(x) = \lim_{x\to b} x^n\sigma(x)w(x) = 0 \ (n \in \mathbb{N}_{\geq 0}). \tag{3.34}$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Polynomfamilien aus Tabelle 2 tatsächlich orthogonal sind. Dazu muss die Randbedingung (3.34) erfüllt sein. Außerdem werden wir zeigen, dass die Nebenbedingung der Tabelle nötig ist, damit die Gewichtsfunktion $w(x)$ positiv definit ist.

Charlierpolynome $C_n(x;\mu)$:
Zunächst betrachten wir die Charlierpolynome mit $\sigma(x) = x$, $w(x) = \frac{e^{-\mu}\cdot\mu^x}{x!}$ und ihrem Definitionsbereich $\mathbb{N}_{\geq 0}$. Für die Gewichtsfunktion $w(x)$ muss für die Charlierpolynome die Nebenbedingung $\mu > 0$ gelten.

Wir zeigen zunächst, dass die Randbedingung (3.34) unter gegebener Nebenbedingung ($\mu > 0$) erfüllt ist. Dann gilt für $a = 0$:

$$a^n\sigma(a)w(x) = \frac{0^{n+1}\mu^0}{e^\mu 0!} = 0 \ .$$

Desweiteren gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+1}\mu^x}{e^\mu x!} = 0,$$

da wir $x!$ mit der Stirlingschen Formel darstellen können als $x! \cong \sqrt{(2\pi x)}\cdot\left(\frac{x}{e}\right)^x$ und somit erhalten wir

$$\frac{1}{e^\mu}\lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+1}\mu^x e^x}{\sqrt{2\pi x}\cdot x^x} = 0,$$

da $\sqrt{2\pi x} \cdot x^x$ sehr viel schneller gegen ∞ konvergiert, als $x^{n+1}\mu^x e^x$.

Nun wollen wir noch zeigen, dass die Nebenbedingung für eine positiv definite Gewichtsfunktion nötig ist:
Sei zunächst $\mu > 0$ gegeben, dann gilt

$$w(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} > 0,$$

für alle $x \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Sei nun $\mu = 0$, dann gilt für $w(x)$:

$$w(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} = 0,$$

d.h. im Falle $\mu = 0$ ist die Gewichtsfunktion $w(x)$ nicht positiv definit.
Betrachten wir nun den Fall $\mu < 0$. Dann gilt:

$$w(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} = \frac{e^{|\mu|}\mu^x}{x!}.$$

Für die Gewichtsfunktion $w(x)$ gilt dann also

$$w(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x \text{ gerade} \\ < 0 & \text{für } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

Also wäre die Gewichtsfunktion nicht positiv definit im Definitionsbereich für x.
Somit haben wir also gezeigt, dass die Charlierpolynome paarweise orhtogonal sind und die Gewichtsfunktion positiv definit ist bei gegebener Nebenbedingung.

Meixnerpolynome $M_n(x; \gamma, \mu)$:
Betrachten wir nun die Meixnerpolynome mit $\sigma(x) = x$, $w(x) = \frac{\mu^x(\gamma)_x}{x!}$, Definitionsbereich $\mathbb{N}_{\geq 0}$ und Nebenbedingung $\gamma > 0$, $0 < \mu < 1$.
Wir zeigen wieder als erstes, dass unter gegebener Nebenbedingung ($\gamma > 0$, $0 < \mu < 1$) die Randbedingung (3.34) erfüllt ist.
Für $a = 0$ gilt dann:

$$a^n\sigma(a)w(a) = 0^{n+1} \cdot \frac{\mu^0(\gamma)_0}{0!} = 0.$$

Weiter gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+1}\mu^x(\gamma)_x}{x!} = \lim_{x\to\infty} \mu^x \cdot \frac{x^{n+1}(\gamma)_x}{x!} = 0,$$

weil μ^x mit $0 < \mu < 1$ für $x \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

Wir zeigen nun, dass die Nebenbedingung nötig ist. Sei zunächst die Nebenbedingung mit $\gamma > 0$ und $0 < \mu < 1$ erfüllt. Dann gilt für die Gewichtsfunktion

$$w(x) = \frac{\mu^x(\gamma)_x}{x!} > 0,$$

für alle $x \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.
Sei nun $\gamma \leq 0$. Dann gilt für die Gewichtsfunktion

$$w(x) = \frac{\mu^x (\gamma)_x}{x!} = 0,$$

da $(\gamma)_x = 0$ für $\gamma \leq 0$. Somit ist $w(x)$ im Fall $\gamma \leq 0$ und $|\gamma| \leq x$ nicht positiv definit.

Sei nun $\mu = 0$, dann gilt für $w(x)$ ebenfalls

$$w(x) = \frac{\mu^x (\gamma)_x}{x!} = 0$$

und damit ist die Gewichtsfunktion $w(x)$ im Falle $\mu = 0$ nicht positiv definit.

Krawtchoukpolynome $K_n(x; p, N)$:
Nun wollen wir zeigen, dass die Krawtchoukpolynome die Randbedingung (3.34) erfüllen. Für die Krawtchoukpolynome gilt $\sigma(x) = x$ und $w(x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$ mit dem Definitionsbereich $\{0, 1, \ldots, N\}$ und der Nebenbedingung $0 < p < 1$.
Wir betrachten also für $a = 0$

$$a^n \sigma(a) w(a) = 0$$

und für $b = N + 1$

$$b^n \sigma(b) w(b) = (N+1)^{n+1} \cdot \binom{N}{N+1} p^(N+1)(1-p)^{-1} = 0,$$

da $\binom{N}{N+1} = 0$ gilt.

Nun wollen wir noch zeigen, dass die Gewichtsfunktion $w(x)$ nur dann positiv definit ist, wenn die Nebenbedingung$0 < p < 1$ gilt. Sei dazu zunächst $p < 0$, dann gilt für die Gewichtsfunktion:

$$w(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x \text{ gerade} \\ < 0 & \text{für } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

Sei nun $p > 1$. Dann gilt:

$$w(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } N - x \text{ gerade} \\ < 0 & \text{für } N - x \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für $p = 0$ (bzw. $p = 1$) gilt dann $w(x) = 0$.
Somit ist die Gewichtsfunktion nicht positiv definit, wenn die Nebenbedingung nicht erfüllt ist.

Hahnpolynome $Q_n(x; \alpha, \beta, N)$:
Wir betrachten nun die Hahnpolynome mit $\sigma(x) = x(N+1+\beta-x)$ und $w(x) = \binom{\alpha+x}{x}\binom{\beta+N-x}{N-x}$.

Die Hahnpolynome besitzen den Definitionsbereich $\{0, 1, \ldots, N\}$ und die Nebenbedingungen $\alpha, \beta > -1$.
Sei zunächst $a = 0$, dann gilt für die Randbedingung

$$a^n \sigma(a) w(a) = 0.$$

Sei nun $b = N + 1$, dann gilt

$$b^n \sigma(b) w(b) = (N+1)^{n+1} \cdot \beta \cdot \binom{\alpha + N + 1}{N + 1} \binom{\beta - 1}{-1} = 0,$$

da $\binom{\beta-1}{-1} = 0$ gilt.

Wir wollen nun wieder zeigen, dass die Gewichtsfunktion $w(x)$ nicht positiv definit ist, wenn die Nebenbedingung nicht erfüllt ist.
Wir betrachten den Fall, dass $\alpha \leq -1$ (bzw. $\beta \leq -1$) gilt. Dann ist die Gewichtsfunktion $w(x)$ teilweise nicht definiert für den Definitionsbereich $\{0, 1, \ldots, N\}$, da $\binom{\alpha+x}{x}$ für $x < |\alpha|$ (bzw. $\binom{\beta+N-x}{N-x}$ für $x < |\alpha| - N$) nicht definiert ist.

Somit haben wir nun die Orthogonalität der Polynomfamilien bewiesen und die positive Definitheit der Gewichtsfunktion $w(x)$ sichergestellt.

Bemerkung 1
Aus der Orthogonalität folgt, dass eine Rekursion der Form (2.10) gilt. Im folgenden Abschnitt wird zudem gezeigt, dass eine hypergeometrische Darstellung existiert.

3.6 Hypergeometrische Darstellung

Definition 3.13 (Hypergeometrische Reihe)
Die Potenzreihe

$${}_pF_q\left(\begin{array}{c} a_1, \ldots, a_p \\ \\ b_1, \ldots, b_q \end{array} \middle| \, z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k, \tag{3.35}$$

deren Summanden $A_k z^k$ das rationale Termverhältnis

$$\frac{A_{k+1} z^{k+1}}{A_k z^k} = \frac{(k + a_1) \cdots (k + a_p)}{(k + b_1) \cdots (k + b_q)} \frac{z}{k+1} \tag{3.36}$$

besitzen, nennt man ***hypergeometrische Reihe****.*
Den Summanden $A_k z^k$ einer hypergeometrischen Reihe nennt man hypergeometrischen Term. Für die Koeffizienten der hypergeometrsichen Reihe erhalten wir die Formel

$${}_pF_q\left(\begin{array}{c} a_1, \ldots, a_p \\ \\ b_1, \ldots, b_q \end{array} \middle| \, z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}. \tag{3.37}$$

Satz 3.8
O.B.d.A. sei $P_n(x)$ ein monisches klassisches diskretes OPS, welches durch eine Differenzengleichung der Form (3.10) mit $\sigma(x) = ax^2 + bx + c$ und $\tau(x) = dx + e$ gegeben sei. Seien weiter $C_k(n)$ die Reihenkoeffizienten der folgenden Reihe

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k(n)x^{\underline{k}}. \tag{3.38}$$

Diese Koeffizienten $C_k(n)$ erfüllen dann folgende Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned}&(an + ak - a + d)(n - k)C_k(n)\\ &+(k + 1)(an^2 - 2ak^2 - an - ak + nd - 2dk - bk - d - e)C_{k+1}(n)\\ &-(k + 1)(k + 2)(ak^2 + 2ak + dk + bk + a + d + b + c + e)C_{k+2}(n) = 0.\end{aligned} \tag{3.39}$$

Beweis: Wir geben zunächst unsere Differenzengleichung (3.10) ein

```
In[10]:= NewCoefficient[p_, x_, n_] := Coefficient[Expand[p/x^n], x, 0]

In[11]:= σ[x_] := a x^2 + b x + c;

         τ[x_] := d x + e;

In[12]:= DE = (σ[x + 1] + τ[x + 1])P[n, x + 2] - (2σ[x + 1] + τ[x + 1]-
          λ[n])P[n, x + 1] + σ[x + 1]P[n, x]
```

Out[12]= $\left(a\,(x+1)^2 + b\,(x+1) + c\right) P(n,x) + \left(a\,(x+1)^2 + b\,(x+1) + d\,(x+1) + c + e\right) P(n,x+2) - P(n,x+1)\left(e + d\,(x+1) + 2\left(a\,(x+1)^2 + b\,(x+1) + c\right) - \lambda(n)\right)$

Nun ersetzen wir in der Differenzengleichung die P[n,x] entsprechend durch C[k] fF[x,k]

```
In[13]:= EQ1 = Expand[DE]/.P[n, x_] → C_k[n]fF[x, k]
```

Out[13]= $a\,\mathrm{fF}(x,k)\,\mathrm{C}_k(n)\,x^2 - 2\,a\,\mathrm{fF}(x+1,k)\,\mathrm{C}_k(n)\,x^2 + a\,\mathrm{fF}(x+2,k)\,\mathrm{C}_k(n)\,x^2 + 2\,a\,\mathrm{fF}(x,k)\,\mathrm{C}_k(n)\,x + b\,\mathrm{fF}(x,k)\,\mathrm{C}_k(n)\,x - 4\,a\,\mathrm{fF}(x+1,k)\,\mathrm{C}_k(n)\,x - 2\,b\,\mathrm{fF}(x+1,k)\,\mathrm{C}_k(n)\,x - d\,\mathrm{fF}(x+1,k)\,\mathrm{C}_k(n)\,x + 2\,a\,\mathrm{fF}(x+2,k)\,\mathrm{C}_k(n)\,x + b\,\mathrm{fF}(x+2,k)\,\mathrm{C}_k(n)\,x + d\,\mathrm{fF}(x+2,k)\,\mathrm{C}_k(n)\,x + a\,\mathrm{fF}(x,k)\,\mathrm{C}_k(n) + b\,\mathrm{fF}(x,k)\,\mathrm{C}_k(n) + c\,\mathrm{fF}(x,k)\,\mathrm{C}_k(n) - 2\,a\,\mathrm{fF}(x+1,k)\,\mathrm{C}_k(n) - 2\,b\,\mathrm{fF}(x+1,k)\,\mathrm{C}_k(n) - 2\,c\,\mathrm{fF}(x+1,k)\,\mathrm{C}_k(n) - d\,\mathrm{fF}(x+1,k)\,\mathrm{C}_k(n) - e\,\mathrm{fF}(x+1,k)\,\mathrm{C}_k(n) + a\,\mathrm{fF}(x+2,k)\,\mathrm{C}_k(n) + b\,\mathrm{fF}(x+2,k)\,\mathrm{C}_k(n) + c\,\mathrm{fF}(x+2,k)\,\mathrm{C}_k(n) + d\,\mathrm{fF}(x+2,k)\,\mathrm{C}_k(n) + e\,\mathrm{fF}(x+2,k)\,\mathrm{C}_k(n) + \mathrm{fF}(x+1,k)\,\lambda(n)\,\mathrm{C}_k(n)$

Nun soll die Gleichung keine Funktionsterme mehr der Form $fF[x + j, k]$ enthalten, daher ersetzen wir $fF[x + j, k]$ durch $\sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l}(k - l + 1)_l\, fF[x, k - l]$:

```
In[14]:= EQ2 = EQ1/.fF[x + j_., k_]/; j > 0 :→
          Sum[Binomial[j, l]Pochhammer[k - l + 1, l]fF[x, k - l], {l, 0, j}]
```

Out[14]= $a\,\mathrm{fF}(x,k)\,C_k(n)\,x^2 - 2\,a\,(k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n)\,x^2 +$
$a\,((k-1)\,k\,\mathrm{fF}(x,k-2)+2\,k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n)\,x^2 + 2\,a\,\mathrm{fF}(x,k)\,C_k(n)\,x +$
$b\,\mathrm{fF}(x,k)\,C_k(n)\,x - 4\,a\,(k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n)\,x - 2\,b\,(k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+$
$\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n)\,x - d\,(k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n)\,x +$
$2\,a\,((k-1)\,k\,\mathrm{fF}(x,k-2)+2\,k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n)\,x +$
$b\,((k-1)\,k\,\mathrm{fF}(x,k-2)+2\,k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n)\,x +$
$d\,((k-1)\,k\,\mathrm{fF}(x,k-2)+2\,k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n)\,x + a\,\mathrm{fF}(x,k)\,C_k(n) +$
$b\,\mathrm{fF}(x,k)\,C_k(n) + c\,\mathrm{fF}(x,k)\,C_k(n) - 2\,a\,(k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) -$
$2\,b\,(k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) - 2\,c\,(k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) -$
$d\,(k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) - e\,(k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) +$
$a\,((k-1)\,k\,\mathrm{fF}(x,k-2)+2\,k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) + b\,((k-1)\,k\,\mathrm{fF}(x,k-2)+$
$2\,k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) + c\,((k-1)\,k\,\mathrm{fF}(x,k-2)+2\,k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+$
$\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) + d\,((k-1)\,k\,\mathrm{fF}(x,k-2)+2\,k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) +$
$e\,((k-1)\,k\,\mathrm{fF}(x,k-2)+2\,k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) + (k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+$
$\mathrm{fF}(x,k))\,\lambda(n)\,C_k(n)$

Um nun die Rekursionsgleichung zu erhalten, müssen wir Koeffizientenvergleich bzgl. x durchführen.
Desweiteren müssen wir für die Koeffizienten von x^1 die Ersetzungsregel $fF[x,k] \to ff[x,k+1] + kfF[x,k]$ einmal und für die Koeffizienten von x^2 müssen wir die Ersetzungsregel zweimal anwenden.

```
In[15]:= Summand1 = Coefficient[EQ2, x, 0]
```

Out[15]= $a\,\mathrm{fF}(x,k)\,C_k(n) + b\,\mathrm{fF}(x,k)\,C_k(n) + c\,\mathrm{fF}(x,k)\,C_k(n) - 2\,a\,(k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) -$
$2\,b\,(k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) - 2\,c\,(k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) -$
$d\,(k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) - e\,(k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) +$
$a\,((k-1)\,k\,\mathrm{fF}(x,k-2)+2\,k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) +$
$b\,((k-1)\,k\,\mathrm{fF}(x,k-2)+2\,k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) +$
$c\,((k-1)\,k\,\mathrm{fF}(x,k-2)+2\,k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) +$
$d\,((k-1)\,k\,\mathrm{fF}(x,k-2)+2\,k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) + e\,((k-1)\,k\,\mathrm{fF}(x,k-2)+$
$2\,k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,C_k(n) + (k\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))\,\lambda(n)\,C_k(n)$

```
In[16]:= Summand2 = Coefficient[EQ2, x, 1]/.fF[x, k_] → fF[x, k+1]+kfF[x, k]
```

```
Out[16]= 
```
$$2a\,(k\,\mathrm{fF}(x,k)+\mathrm{fF}(x,k+1))\,\mathrm{C}_k(n)+b\,(k\,\mathrm{fF}(x,k)+\mathrm{fF}(x,k+1))\,\mathrm{C}_k(n)-$$
$$4a\,(k\,\mathrm{fF}(x,k)+k\,((k-1)\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))+\mathrm{fF}(x,k+1))\,\mathrm{C}_k(n)-$$
$$2b\,(k\,\mathrm{fF}(x,k)+k\,((k-1)\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))+\mathrm{fF}(x,k+1))\,\mathrm{C}_k(n)-$$
$$d\,(k\,\mathrm{fF}(x,k)+k\,((k-1)\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))+\mathrm{fF}(x,k+1))\,\mathrm{C}_k(n)+$$
$$2a\,((k-1)\,k\,((k-2)\,\mathrm{fF}(x,k-2)+\mathrm{fF}(x,k-1))+k\,\mathrm{fF}(x,k)+$$
$$2k\,((k-1)\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))+\mathrm{fF}(x,k+1))\,\mathrm{C}_k(n)+$$
$$b\,((k-1)\,k\,((k-2)\,\mathrm{fF}(x,k-2)+\mathrm{fF}(x,k-1))+k\,\mathrm{fF}(x,k)+2k\,((k-1)\,\mathrm{fF}(x,k-1)+$$
$$\mathrm{fF}(x,k))+\mathrm{fF}(x,k+1))\,\mathrm{C}_k(n)+d\,((k-1)\,k\,((k-2)\,\mathrm{fF}(x,k-2)+\mathrm{fF}(x,k-1))+$$
$$k\,\mathrm{fF}(x,k)+2k\,((k-1)\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))+\mathrm{fF}(x,k+1))\,\mathrm{C}_k(n)$$

```
In[17]:= Summand3 = Coefficient[EQ2, x, 2]/.fF[x, k_] → fF[x, k + 1]
          +k fF[x, k]/.fF[x, k_] → fF[x, k + 1] + k fF[x, k]
Out[17]= 
```
$$a\,((k+1)\,\mathrm{fF}(x,k+1)+k\,(k\,\mathrm{fF}(x,k)+\mathrm{fF}(x,k+1))+\mathrm{fF}(x,k+2))\,\mathrm{C}_k(n)-$$
$$2a\,((k+1)\,\mathrm{fF}(x,k+1)+k\,(k\,\mathrm{fF}(x,k)+\mathrm{fF}(x,k+1))+$$
$$k\,(k\,\mathrm{fF}(x,k)+(k-1)\,((k-1)\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))+\mathrm{fF}(x,k+1))+\mathrm{fF}(x,k+2))\,\mathrm{C}_k(n)+$$
$$a\,((k-1)\,k\,((k-1)\,\mathrm{fF}(x,k-1)+(k-2)\,((k-2)\,\mathrm{fF}(x,k-2)+\mathrm{fF}(x,k-1))+\mathrm{fF}(x,k))+$$
$$(k+1)\,\mathrm{fF}(x,k+1)+k\,(k\,\mathrm{fF}(x,k)+\mathrm{fF}(x,k+1))+$$
$$2k\,(k\,\mathrm{fF}(x,k)+(k-1)\,((k-1)\,\mathrm{fF}(x,k-1)+\mathrm{fF}(x,k))+\mathrm{fF}(x,k+1))+\mathrm{fF}(x,k+2))\,\mathrm{C}_k(n)$$

Nun erhalten wir eine Gleichung bzgl. $fF[x,k]$ und $C_k(n)$.

```
In[18]:= EQ3 = Collect[Summand1 + Summand2 + Summand3, fF[x, _], Factor]
Out[18]= 
```
$$(k-1)\,k\left(a\,k^2-2\,a\,k+b\,k+d\,k+a-b+c-d+e\right)\mathrm{fF}(x,k-2)\,\mathrm{C}_k(n)+$$
$$\mathrm{fF}(x,k)\left(a\,k^2-a\,k+d\,k+\lambda(n)\right)\mathrm{C}_k(n)+$$
$$k\,\mathrm{fF}(x,k-1)\left(2\,a\,k^2-3\,a\,k+b\,k+2\,d\,k+a-b-d+e+\lambda(n)\right)\mathrm{C}_k(n)$$

Uns interessieren aber nur die Koeffizienten von $C_k(n)$, also müssen wir zunächst Koeffizientenvergleich bzgl. der $fF[x,k-i]$ durchführen und entsprechend eine Indexverschiebung von k mit $k \to k+i$ vornehmen.

```
In[19]:= RESummand1 = Coefficient[EQ3, fF[x, k - 2]]/.k → k + 2
Out[19]= 
```
$$(k+1)\,(k+2)\left(a\,(k+2)^2-2\,a\,(k+2)+b\,(k+2)+d\,(k+2)+a-b+c-d+e\right)\mathrm{C}_{k+2}(n)$$

```
In[20]:= RESummand2 = Coefficient[EQ3, fF[x, k - 1]]/.k → k + 1
Out[20]= 
```
$$(k+1)\left(2\,a\,(k+1)^2-3\,a\,(k+1)+b\,(k+1)+2\,d\,(k+1)+a-b-d+e+\lambda(n)\right)\mathrm{C}_{k+1}(n)$$

```
In[21]:= RESummand3 = Coefficient[EQ3, fF[x, k]]
Out[21]= 
```
$$\left(a\,k^2-a\,k+d\,k+\lambda(n)\right)\mathrm{C}_k(n)$$

Dann erhalten wir schließlich unsere zu beweisende Rekursionsgleichung:

```
In[22]:= SolRE = RESummand1 + RESummand2 + RESummand3
Out[22]= 
```
$$\left(a\,k^2-a\,k+d\,k+\lambda(n)\right)\mathrm{C}_k(n)+$$
$$(k+1)\left(2\,a\,(k+1)^2-3\,a\,(k+1)+b\,(k+1)+2\,d\,(k+1)+a-b-d+e+\lambda(n)\right)\mathrm{C}_{k+1}(n)+$$
$$(k+1)\,(k+2)\left(a\,(k+2)^2-2\,a\,(k+2)+b\,(k+2)+d\,(k+2)+a-b+c-d+e\right)\mathrm{C}_{k+2}(n)$$

□

Satz 3.9
O.B.d.A. sei $P_n(x)$ *wieder ein monisches klassisches diskretes OPS, welches durch eine Differenzengleichung der Form (3.10) gegeben sei. Nun sei* $\sigma(x) = ax^2 + bx$ *(also* $c = 0$*) und* $\tau(x) = dx + e$*. Seien weiter* $C_k(n)$ *die Reihenkoeffizienten der folgenden Reihe (3.38).*
Dann reduziert sich wegen $c = 0$ *die Rekursionsgleichung (3.39) auf*

$$(n-k)(ak-d+an-a)C_k(n) - (k+1)(ak^2+kb+kd+e)C_{k+1}(n) = 0 \tag{3.40}$$

Beweis: Für $c = 0$ reduziert sich die Rekursionsgleichung (3.39) nicht direkt zu (3.40). Wir wenden nun den sogenannten Petkovšek-van Hoeij-Algorithmus auf die Gleichung

$$\begin{aligned}&(an+ak-a+d)(n-k)C_k(n)\\ &+(k+1)(an^2-2ak^2-an-ak+nd-2dk-bk-d-e)C_{k+1}(n)\\ &-(k+1)(k+2)(ak^2+2ak+dk+bk+a+d+b+e)C_{k+2}(n) = 0,\end{aligned}$$

also (3.39) mit $c = 0$ anwenden. Dieser Algorithmus findet alle hypergeometrischen Terme einer Rekursionsgleichung.
Wir verwenden eine bereits implementiere Version dieses Algorithmus[1]: Zunächst muss das Package geladen werden:

```
In[23]:= Needs["Hyper`"]
```

Wir geben nun die Gleichung (3.41) ein und wenden die Methode Hyper auf sie an:

```
In[24]:= term = (a * n + a * k - a + d) * (n - k) * C[k] +
            (k + 1) * (a n^2 - 2 a k^2 - a n - a k + n d - 2 d k -
                  b k - d - e) * C[k + 1] -
            (k + 1) (k + 2) (a k^2 + 2 a k + d k + b k + a + d + b + e)
              C[k + 2]
```

Out[24]= $(n-k)\,(k\,a+n\,a-a+d)\,c_k +$
$(k+1)\left(-2\,a\,k^2-a\,k-b\,k-2\,d\,k+a\,n^2-d-e-a\,n+d\,n\right)c_{k+1} -$
$(k+1)\,(k+2)\left(a\,k^2+2\,a\,k+b\,k+d\,k+a+b+d+e\right)c_{k+2}$

```
In[25]:= Hyper[term, C[k]]
```

Out[25]= $\left\{-\dfrac{(k-n)\,(k\,a+n\,a-a+d)}{(k+1)\,(a\,k^2+b\,k+d\,k+e)}\right\}$

Wir erhalten also den hypergeometrischen Term

$$\frac{C_{k+1}(n)}{C_k(n)} = \frac{(n-k)(ak+d+an-a)}{(k+1)(ak^2+kb+kd+e)} \tag{3.41}$$

Durch Umformung von (3.41) erhalten wir dann die Rekursionsgleichung

$$(n-k)(ak-d+an-a)C_k(n) - (k+1)(ak^2+kb+kd+e)C_{k+1}(n) = 0,$$

was genau (3.40) darstellt. □

[1] Der Algorithmus ist als Mathematica-Package *Hyper* unter http://www.math.upenn.edu/ wilf/progs.html erhältlich.

Satz 3.10 (Hypergeometrische Darstellungen der klassischen diskreten OPS)
Man erhält mit den Rekursionsgleichungen (3.39) und (3.40) für die klassisch diskreten orthogonalen Polynome folgende hypergeometrische Darstellungen:

$$Q_n(x;\alpha,\beta,N) \;=\; {}_3F_2\left(\left.\begin{array}{c} -n,-x,n+1+\alpha+\beta \\ \\ \alpha+1,-N \end{array}\right| 1\right), \tag{3.42}$$

$$K_n(x;p,N) \;=\; (-1)^n \binom{N}{n} p^n \; {}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c} -n,-x \\ \\ -N \end{array}\right| \tfrac{1}{p}\right), \tag{3.43}$$

$$M_n(x;\gamma,\mu) \;=\; (\gamma)_n \; {}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c} -n,-x \\ \\ \gamma \end{array}\right| 1-\tfrac{1}{\mu}\right), \tag{3.44}$$

$$C_n(x;\mu) \;=\; {}_2F_0\left(\left.\begin{array}{c} -n,-x \\ \\ - \end{array}\right| -\tfrac{1}{\mu}\right). \tag{3.45}$$

<u>Beweis:</u> Betrachtet man die Tabelle 1, so erkennt man, dass kein $\sigma(x) = ax^2 + bx + c$ einen konstanten Summanden besitzt, d.h. in allen Fällen gilt $c = 0$. Zur Berechnung der hypergeometrischen Darstellung verwendet man also in allen Fällen die Rekursionsgleichung (3.40).
Wir können also in allen Fällen den hypergeometrischen Term (3.41) verwenden, um zu zeigen, dass die hypergeometrischen Darstellungen (3.42)-(3.45) wahr sind.

Zur Berechnung der hypergeometrischen Darstellungen betrachtet man das folgende Termverhältnis:

```
In[26]:= term = (n - k)(a k + d + a n - a) / ((k + 1)(a k^2 + k b + k d + e));
```

Weiterhin sei angemerkt, dass wir wegen $x^{\underline{n}} = (-1)^k(-x)_k$ bei allen hypergeometrischen Darstellungen ein $-x$ in der oberen Reihe erhalten.

Hahnpolynome $Q_n(x;\alpha,\beta,N)$**:**
Für die Hahnpolynome gilt $\sigma(x) = x(N+1+\beta-x)$ und $\sigma(x)+\tau(x) = (x+\alpha+1)(N-x)$.
Man erhält: $a = -1$, $b = N+\beta+1$, $c = 0$, $d = -2-\alpha-\beta$ und $e = \alpha N + N$.
Setzt man dies nun ein und faktorisiert, erhält man:

```
In[27]:= term/. a → -1 /. b → (N + β + 1) /. d → -2 - α - β /.
           e → α N + N//Factor
```

$$\texttt{Out[27]=}\; -\frac{(k-n)(k+n+\alpha+\beta+1)}{(k+1)(k-N)(k+\alpha+1)}$$

Damit erhalten wir die hypergeometrische Darstellung

$$Q_n(x;\alpha,\beta,N) = {}_3F_2\left(\begin{array}{c|c} -n,-x,n+1+\alpha+\beta & \\ & 1 \\ \alpha+1,-N & \end{array}\right).$$

Krawtchoukpolynome $K_n(x;p,N)$**:**
Für die Krawtchoukpolynome gilt $\sigma(x) = x$ und $\sigma(x)+\tau(x) = \frac{p}{1-p}(N-x)$.
Man erhält: $a = 0, b = 1, c = 0, d = -\frac{p}{p-1} - 1$ und $e = \frac{Np}{p-1}$. Durch Einsetzen in das Termverhältnis und anschließendem Faktorisieren erhält man:

```
In[28]:= term/. a → 0 /. b → 1 /. d → -p/(p-1) - 1 /. e → N p/(p-1) // Factor
```

$$\text{Out[28]= } -\frac{(k-n)(2p-1)}{(k+1)(k-N)p}$$

Daraus folgt für die Krawtchoukpolynome die hypergeometrische Darstellung

$$K_n(x;p,N) = (-1)^n \binom{N}{n} p^n \, {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} -n,-x & \\ & \frac{1}{p} \\ -N & \end{array}\right),$$

wobei $(-1)^n\binom{N}{n}p^n$ ein historischer Standardisierungsfaktor darstellt.

Meixnerpolynome $M_n(x;\gamma,\mu)$**:**
Bei den Meixnerpolynomen gilt $\sigma(x) = x$ und $\sigma(x)+\tau(x) = \mu(\gamma+x)$.
Man erhält daraus $a = 0, b = 1, c = 0, d = \mu - 1$ und $e = \gamma\mu$. Dies führt zu:

```
In[29]:= term/. a → 0 /. b → 1 /. d → μ - 1 /. e → γ μ// Factor
```

$$\text{Out[29]= } -\frac{(k-n)(\mu-1)}{(k+1)(k+\gamma)\mu}$$

Somit erhält man für die Meixnerpolynome die folgende hypergeometrische Darstellung:

$$M_n(x;\gamma,\mu) = (\gamma)_n \, {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} -n,-x & \\ & 1-\frac{1}{\mu} \\ \gamma & \end{array}\right).$$

Dabei ist $(\gamma)_n$ ebenfalls ein historischer Standardisierungsfaktor.

Charlierpolynome $C_n(x;\mu)$**:**
Für die Charlierpolynome betrachtet man $\sigma(x) = x$ und $\sigma(x)+\tau(x) = \mu$ mit $mu \neq 0$.

Daraus erhält man $a = 0, b = 1, c = 0, d = -1, e = \mu$. Einsetzen und faktorisieren liefert:

```
In[30]:= term/. a → 0 /. b → 1 /. d → −1 /. e → μ//
            Factor
```

Out[30]= $\frac{k-n}{(k+1)\,\mu}$

Somit besitzen die Charlierpolynome die hypergeometrische Darstellung

$$C_n(x;\mu) = {}_2F_0\left(\left.\begin{array}{c} -n, -x \\ \\ - \end{array}\right| -\frac{1}{\mu}\right).$$

□

3.7 Struktureigenschaften

Nun sollen die Rekursionskoeffizienten generisch bestimmt werden. Dazu betrachte folgenden Satz:

Definition 3.14 (Binomische Formeln)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \textit{und} \\ (a-b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k. \end{aligned}$$

Satz 3.11 (Dreitermrekursion)
$P_n(x)$ sei ein klassisches diskretes OPS, welches durch die Differenzengleichung (3.10) mit $\sigma(x) = ax^2 + bx + c$ und $\tau(x) = dx + e$ gegeben sei. Dann gilt eine Rekursion der Form (2.10)

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x) \quad (n \geq 0),$$

wobei

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{k_{n+1}}{k_n}, \\ B_n &= \frac{n(d+2b)(d+an-a) + e(d-2a)}{(2an-2a+d)(d+2an)} \cdot \frac{k_{n+1}}{k_n} \quad \textit{und} \\ C_n &= -((n-1)(d+an-a)(and - db - ad + a^2n^2 - 2a^2n + 4ca + a^2 + 2ea - b^2) \\ &\quad -dbe + d^2c + ae^2) \cdot \frac{(an+d-2a)n}{(d-a+2an)(d+2an-3a)(2an-2a+d)^2} \cdot \frac{k_{n+1}}{k_n}. \end{aligned}$$

Beweis: Wir müssen im Folgenden nur zeigen, dass die Koeffizienten A_n, B_n und C_n gültig sind für unsere Rekursionsgleichung, denn wir haben bereits in Satz 2.6 gezeigt, dass für jedes OPS eine Rekursion der Form (2.10) gilt.

Die Koeffizienten A_n, B_n und C_n lassen sich mittels Koeffizientenvergleich herleiten. Dazu betrachtet man von einem Polynom der Form (2.8) die drei höchsten Koeffizienten, setzt diese in die Differenzengleichung (3.10) ein und führt schließlich einen Koeffizientenvergleich durch. Dabei lässt sich fast automatisch die Richtigkeit der Beziehung für λ_n (3.11) beweisen.
Zunächst definieren wir uns je eine Funktion, die den Vorwärtsdifferenzenoperator Δ bzw. den Rückwärtsdifferenzenoperator ∇ berechnet:

```
In[31]:= Delta[y_, x_] := (y/.x → (x + 1)) - y
```

```
In[32]:= Nabla[y_, x_] := y - (y/.x → (x - 1))
```

Im Folgenden seien $\sigma = ax^2 + bx + c$ und $\tau = dx + e$. Dann können wir uns ein Polynom der Form (2.8) definieren:

```
In[33]:= p = k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + k_{n-2} x^{n-2};
```

Man erhält schließlich die Differenzengleichung:

```
In[34]:= glg = σ Delta[Nabla[p, x], x] + τ Delta[p, x] + λ p
```

$$\begin{aligned}\texttt{Out[34]=}\ &\lambda\left(k_{n-2}\,x^{n-2} + k_{n-1}\,x^{n-1} + k_n\,x^n\right)+\\&\left(a\,x^2 + b\,x + c\right)\left(k_{n-2}\,(x-1)^{n-2} + k_{n-1}\,(x-1)^{n-1} + k_n\,(x-1)^n - 2\,x^{n-2}\,k_{n-2}+\right.\\&\left.(x+1)^{n-2}\,k_{n-2} - 2\,x^{n-1}\,k_{n-1} + (x+1)^{n-1}\,k_{n-1} - 2\,x^n\,k_n + (x+1)^n\,k_n\right)+\\&(e + d\,x)\left(-k_{n-2}\,x^{n-2} - k_{n-1}\,x^{n-1} - k_n\,x^n + (x+1)^{n-2}\,k_{n-2} + (x+1)^{n-1}\,k_{n-1} + (x+1)^n\,k_n\right)\end{aligned}$$

Im Folgenden werden in der Differenzengleichung alle auftretenden $(x+1)^n$, $(x+1)^{n-1}$, $(x+1)^{n-2}$, x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, $(x-1)^n$, $(x-1)^{n-1}$ und $(x-1)^{n-2}$ gemäß der binomischen Formeln aus Definition 3.14 ersetzt. Dabei betrachten wir wieder nur die drei höchsten Koeffizienten:

```
In[35]:= glg2 = glg/. (x - 1)^n → x^n - n x^{n-1} + 1/2 (n - 1) n x^{n-2}/.
              (x - 1)^{n-1} → x^{n-1} - (n - 1) x^{n-2} + 1/2 (n - 2) (n - 1) x^{n-3}/.
              (x - 1)^{n-2} → x^{n-2} - (n - 2) x^{n-3} + 1/2 (n - 3) (n - 2) x^{n-4}/.
              (x + 1)^n → x^n + n x^{n-1} + 1/2 (n - 1) n x^{n-2} /.
              (x + 1)^{n-1} → x^{n-1} + (n - 1) x^{n-2} + 1/2 (n - 2) (n - 1) x^{n-3} /.
              (x + 1)^{n-2} → x^{n-2} + (n - 2) x^{n-3} + 1/2 (n - 3) (n - 2) x^{n-4}//Expand;
```

Dividieren wir durch x^{n-4} und multiplizieren wir aus, so erhalten wir eine Gleichung, bei der wir den Koeffizientenvergleich durchführen können:

```
In[36]:= glg3 = Together[glg2/x^{n-4}];
```

Wir legen uns nun eine Koeffizientenliste bzgl. x an:

```
In[37]:= Coeff = CoefficientList[glg3, x]
```

Out[37]= $\{c\,k_{n-2}\,n^2 + \frac{1}{2}\,e\,k_{n-2}\,n^2 - 5\,c\,k_{n-2}\,n - \frac{5}{2}\,e\,k_{n-2}\,n + 6\,c\,k_{n-2} + 3\,e\,k_{n-2},$

$b\,k_{n-2}\,n^2 + \frac{1}{2}\,d\,k_{n-2}\,n^2 + c\,k_{n-1}\,n^2 + \frac{1}{2}\,e\,k_{n-1}\,n^2 - 5\,b\,k_{n-2}\,n - \frac{5}{2}\,d\,k_{n-2}\,n +$

$e\,k_{n-2}\,n - 3\,c\,k_{n-1}\,n - \frac{3}{2}\,e\,k_{n-1}\,n + 6\,b\,k_{n-2} + 3\,d\,k_{n-2} - 2\,e\,k_{n-2} + 2\,c\,k_{n-1} + e\,k_{n-1},$

$a\,k_{n-2}\,n^2 + b\,k_{n-1}\,n^2 + \frac{1}{2}\,d\,k_{n-1}\,n^2 + c\,k_n\,n^2 + \frac{1}{2}\,e\,k_n\,n^2 - 5\,a\,k_{n-2}\,n + d\,k_{n-2}\,n -$

$3\,b\,k_{n-1}\,n - \frac{3}{2}\,d\,k_{n-1}\,n + e\,k_{n-1}\,n - c\,k_n\,n - \frac{1}{2}\,e\,k_n\,n + 6\,a\,k_{n-2} - 2\,d\,k_{n-2} + \lambda\,k_{n-2} +$

$2\,b\,k_{n-1} + d\,k_{n-1} - e\,k_{n-1},\,a\,k_{n-1}\,n^2 + b\,k_n\,n^2 + \frac{1}{2}\,d\,k_n\,n^2 - 3\,a\,k_{n-1}\,n + d\,k_{n-1}\,n -$

$b\,k_n\,n - \frac{1}{2}\,d\,k_n\,n + e\,k_n\,n + 2\,a\,k_{n-1} - d\,k_{n-1} + \lambda\,k_{n-1},\,a\,k_n\,n^2 - a\,k_n\,n + d\,k_n\,n + \lambda\,k_n\}$

Zunächst erhält man durch Koeffizientenvergleich unser λ_n:

In[38]:= **sub1 = Solve[Coeff[[5]] == 0, λ][[1]]**

Out[38]= $\{\lambda \to -a\,n^2 + a\,n - d\,n\}$

Multipliziert man (3.11) aus, so erhält man Gleichheit für λ und damit ist diese Beziehung gezeigt.
Nach Einsetzen von λ und eines erneuten Koeffizientenvergleichs erhalten wir k_{n-1}:

In[39]:= **sub2 = Map[Factor, (Solve[Coeff[[4]] == 0, k_{n-1}]/.sub1[[1]])[[1]], {2}]**

Out[39]= $\{k_{n-1} \to \frac{n\,(2\,n\,b - 2\,b - d + 2\,e + d\,n)\,k_n}{2\,(2\,n\,a - 2\,a + d)}\}$

Durch erneutes Einsetzen von λ und nun auch k_{n-1}, erhalten wir durch Koeffizientenvergleich k_{n+1}:

In[40]:= **sub3 = Map[Factor, (Solve[Coeff[[3]] == 0,**
k_{n-2}]/.{sub1[[1]], sub2[[1]]})[[1]], {2}]//Together

Out[40]= $\{k_{n-2} \to ((n-1)\,n\,(4\,n^2\,b^2 - 12\,n\,b^2 + 8\,b^2 + 4\,d\,n^2\,b + 8\,d\,b - 12\,e\,b - 12\,d\,n\,b + 8\,e\,n\,b +$

$2\,d^2 + 4\,e^2 + d^2\,n^2 - 8\,a\,c + 4\,c\,d - 4\,a\,e - 4\,d\,e - 3\,d^2\,n + 8\,a\,c\,n +$

$4\,a\,e\,n + 4\,d\,e\,n)\,k_n)/(8\,(2\,n\,a - 3\,a + d)\,(2\,n\,a - 2\,a + d))\}$

Wir werden jetzt die Richtigkeit der Koeffizienten A_n, B_n und C_n zeigen, indem wir unserer erhaltenen k_{n-1} und k_{n+1} in die Gleichung (3.96) einsetzen.

In[41]:= **P_n = p/.{sub2[[1]], sub3[[1]]};**

P_{n+1} = P_n/.n → n + 1;

P_{n-1} = P_n/.n → n - 1;

In[42]:= **rekglg = (A_n x + B_n)P_n - $C_n P_{n-1}$ - P_{n+1};**

Hier wird nun durch x^{n-3} dividiert und anschließend faktorisiert. Das Ergebnis interessiert uns an dieser Stelle nicht.

In[43]:= **rekglg2 = rekglg/x^{n-3}//Factor;**

Uns interessieren eher die Koeffizienten dieser Rekursionsgleichung. Wir legen uns also eine Koeffizientenliste bzgl. x an. Auch hier ist die Ausgabe aus Platzgründen unterdrückt.

```
In[44]:= coeff2 = CoefficientList[rekglg2, x]//Together;
```

Koeffizientenvergleich liefert zunächst A_n:

```
In[45]:= sub4 = Solve[coeff2[[5]] == 0, A_n][[1]]
```

Out[45]= $\left\{A_n \to \frac{k_{n+1}}{k_n}\right\}$

Setzen wir nun A_n in die Koeffizientenliste ein und machen erneuten Koeffizientenvergleich, so erhalten wir B_n

```
In[46]:= sub5 = Map[Factor, Solve[coeff2[[4]] == 0, B_n]/.sub4[[1]], {3}][[1]][[1]]
```

Out[46]= $B_n \to \frac{(n\,d^2 + a\,n^2\,d + e\,d - a\,n\,d + 2\,b\,n\,d + 2\,a\,b\,n^2 - 2\,a\,e - 2\,a\,b\,n)\,k_{n+1}}{(d + 2\,a\,n)\,(2\,n\,a - 2\,a + d)\,k_n}$

Durch Einsetzen von A_n und B_n erhalten wir nun durch erneuten Koeffizientenvergleich unser C_n:

```
In[47]:= sub6 = Map[Factor, Solve[coeff2[[3]] == 0, C_n]/.{sub4[[1]],
           sub5[[1]]}, {3}][[1]][[1]]//FullSimplify
```

Out[47]= $C_n \to \Big((d + a\,(n-2))\,n\,\big(d\,n\,(2\,b + d)^2 - 8\,a^2\,(2\,c + e)\,(n-1)^2 - d\,\big(4\,b^2 + 4\,(d - e)\,b + d\,(4\,c + d)\big) + a\,\big(n^2\,d^2 + d^2 + 4\,b\,(n-1)^2\,d + 16\,c\,d + 8\,e\,d - 2\,(8\,c + d + 4\,e)\,n\,d - 4\,e^2 + 4\,b^2\,(n-1)^2\big)\big)\,k_{n+1}\Big)\Big/\Big(4\,(d + 2\,a\,(n-1))^2\,(d + a\,(2\,n-3))\,(d + a\,(2\,n-1))\,k_{n-1}\Big)$

Als Beweis dazu, dass diese Koeffizienten tatsächlich den Koeffizienten aus dem Satz entsprechen, müssten nur noch die Koeffizienten aus dem Satz eingegeben werden und verglichen werden. Wir werden dies an dieser Stelle für $B_n(x)$ durchführen. A_n entspricht offensichtlich dem A_n aus dem Satz.

In[48]:= $\mathbf{BE} = \frac{\mathbf{n\,(d + 2\,b)\,(d + a\,n - a) + e\,(d - 2a)}}{\mathbf{(2\,a\,n - 2a + d)\,(d + 2\,a\,n)}}\,\frac{\mathbf{k_{n+1}}}{\mathbf{k_n}};$

```
In[49]:= (B_n/.sub5) - BE//Together
Out[49]= 0
```

□

Satz 3.12 (Rekursionsgleichung)
Ein Polynomsystem $P_n(x)$ erfülle eine Dreitermrekursion der Form (2.10). Dann erfüllt es auch eine Rekursion der Form

$$xP_n(x) = a_nP_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + c_nP_{n-1}(x) \tag{3.46}$$

mit den Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{A_n}, \quad b_n = -\frac{B_n}{A_n}, \quad c_n = \frac{C_n}{A_n}.$$

Beweis: Wir betrachten die Dreitermrekursion (2.10) für $P_n(x)$. Mit elementaren Umformungen erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} & P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x) \\ \Leftrightarrow\quad & -A_n x P_n(x) = -P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) - C_n P_{n-1}(x) \\ \Leftrightarrow\quad & xP_n(x) = \frac{1}{A_n}P_{n+1}(x) - \frac{B_n}{A_n}P_n(x) + \frac{C_n}{A_n}P_{n-1}(x) \\ \Leftrightarrow\quad & xP_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x) \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{A_n}, \quad b_n = -\frac{B_n}{A_n}, \quad c_n = \frac{C_n}{A_n}.$$

□

Satz 3.13 (Differenzenregel)
Sei $P_n(x)$ ein klassisches diskretes OPS, das Lösung der Differenzenregel (3.10) ist. Dann erfüllt $P_n(x)$ eine Differenzenregel der Form

$$\sigma(x)\nabla P_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) \quad (n \in \mathbb{N}_{\geq 0}). \tag{3.47}$$

Beweis: Wir wollen nun zunächst zeigen, dass eine Differenzenregel der Form

$$\sigma(x)\nabla P_n(x) = (\tilde{\alpha}_n x + \tilde{\beta}_n)P_n(x) + \tilde{\gamma}_n P_{n-1}(x) \tag{3.48}$$

mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ erfüllt ist.
Wir setzen dazu $P_n(x) = k_n x^n + k_n' x^{n-1} + k_n'' x^{n-2} + \ldots$ ein und vergleichen die Koeffizienten von x^{n+1}. Dann erhalten wir

$$\tilde{\alpha}_n = an. \tag{3.49}$$

Aus der Pearsonschen Differenzengleichung (3.28) ergibt sich, dass $P_n(x)$ orthogonal bzgl. der Gewichtsfunktion $w(x)$ ist. Multiplizieren wir die Differenzengleichung (3.10) mit $w(x)$, so erhalten wir also die selbstadjungierte Form (3.31)

$$\Delta(w(x)\sigma(x)\nabla P_n(x)) + \lambda_n w(x)P_n(x) = 0.$$

Wir wollen nun zeigen, dass hieraus die Beziehung

$$\sum_{x=a}^{b} w(x)\sigma(x)\nabla P_n(x) f(x) = 0 \tag{3.50}$$

für jedes Polynom $f(x)$ vom Grad $\leq n-2$ folgt. Sei dazu $F(x)$ die diskrete Stammfunktion von $f(x)$, d.h. es gilt $\sum \Delta F(x) = f(x)$. Dann folgt mit partieller Summation

$$\begin{aligned} \sum_{x=a}^{b} w(x)\sigma(x)\nabla P_n(x) f(x) &= [w(x)\sigma(x)\nabla P_n(x)F(x)]_a^{b+1} - \sum_{x=a}^{b} F(x+1)\cdot\Delta(\sigma(x)\nabla P_n(x)) \\ &= \lambda_n \sum_{x=a}^{b} w(x)P_n(x)F(x+1) = 0. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Orthogonalität von $P_n(x)$ und $F(x+1)$.
Wegen (3.49) ist jetzt aber der Grad des Polynoms $\sigma(x)\nabla P_n(x) - \tilde{\alpha}_n x \leq n$. Man kann diese Beziehung also schreiben als

$$\sigma(x)\nabla P_n(x) - \tilde{\alpha}_n x P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} e_j P_n(x), \tag{3.51}$$

wobei aber mit (3.50) hieraus folgt, dass $e_j = 0$ für $0 \leq j \leq n-2$ gilt.
Damit haben wir bewiesen, dass eine Differenzenregel der Form (3.48) erfüllt ist. Eine Anwendung von (3.46) liefert uns dann (3.47). □

Satz 3.14 (Koeffizienten der Differenzenregel)
Eine Differenzenregel der Form (3.47) besitzt die Koeffizienten

$$\alpha_n = an\frac{k_n}{k_{n+1}}, \tag{3.52}$$

$$\beta_n = -\frac{n(d+an-a)(2and-ad-db+2ea-2a^2n+2a^2n^2)}{(d+2a(n-1))(d+2an)} \tag{3.53}$$

und

$$\begin{aligned}\gamma_n \;=\;& ((n-1)(d+an-a)(and-db-ad+a^2n^2-2a^2n+4ca+a^2+2ea-b^2)\\ &-dbe+d^2c+ae^2)\\ &\cdot\frac{(d+an-a)(an+d-2a)n}{(d-a2an)(d+2an-3a)(2an-2a+d^2)}\cdot\frac{k_n}{k_{n-1}}\end{aligned} \tag{3.54}$$

<u>Beweis:</u> Wir können die Koeffizienten wieder mittels Koeffizientenvergleich bestimmen. □

Satz 3.15
Sei $P_n(x) = k_n x^n + k'_n x^{n-1} + \ldots$ ($n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$) ein klassiches diskretes OPS, welches Lösung der Differenzengleichung der Form (3.10) mit quatratischem Polynom $\sigma(x)$ und linearem Polynom $\tau(x)$ ist. Dann ist das Polynomsystem $(\Delta P_{n+1}(x))_{n\geq 0}$ wieder ein klassisches diskretes OPS.
Für dieses System gilt dann eine Rekursionsgleichung der Form

$$x\Delta P_n(x) = \alpha_n^*\Delta P_{n+1}(x) + \beta_n^*\Delta P_n(x) + \gamma_n^*\Delta P_{n-1}(x) \tag{3.55}$$

mit den Koeffizienten

$$\alpha_n^* = \frac{n}{n+1}\frac{k_n}{k_{n+1}},$$

$$\beta_n^* = \frac{-n(d+2a+2b)(d+an-a)-d(e-a-b)}{(2an-2a+d)(d+2an)},$$

$$\begin{aligned}\gamma_n^* \;=\;& -((n-1)(d+an-a)(and-db-ad+a^2n^2-2a^2n+4ca+a^2+2ea-b^2)\\ &-dbe+d^2c+ae^2)\\ &\cdot\frac{(d+an-a)n}{(d-a+2an)(d+2an-3a)(2an-2a+d)^2}\cdot\frac{k_n}{k_{n-1}}\,.\end{aligned}$$

Beweis: Anwendung des Δ-Operators auf die Differenzengleichung (3.10) liefert uns mit $y(x) := \Delta P_n(x)$

$$\begin{aligned} 0 &= (\sigma(x+1) - \Delta\sigma(x))\Delta\nabla y(x) + (\tau(x+1) + \Delta\sigma(x))\Delta y(x) + (\lambda_n + \Delta\tau(x))y(x) \\ &= (ax^2 + bx + c)\Delta\nabla y(x) + ((d+2a)x + d + e + a + b)\Delta y(x) + (\lambda_n + d)y(x). \end{aligned}$$

Da somit $y(x) := \Delta P_n(x)$ eine Differenzengleichung der Form

$$(a'x^2 + b'x + c')\Delta\nabla y(x) + (d'x + e')\Delta y(x) + \lambda'_n y(x) = 0$$

mit $a' = a, b' = b, c' = c, d' = 2a + d, e' = a + b + d + e$ und $\lambda'_n = \lambda_n + d$ erfüllt, existiert auch eine Rekursionsgleichung für $\Delta P_n(x)$ der Form

$$x\Delta P_n(x) = \alpha^*_n \Delta P_{n+1}(x) + \beta^*_n \Delta P_n(x) + \gamma^*_n \Delta P_{n-1}(x).$$

Dabei erhält man die Koeffizienten α^*_n, β^*_n und γ^*_n, indem wir die Koeffizienten a_n, b_n und c_n der Rekursionsgleichung (3.46) in Abhängigkeit von a', b', c', d', e' und λ'_n berechnen. □

Satz 3.16
Sei $\Delta(P_n(x))$ ein klassisches diskretes OPS, dann stellt auch $P_n(x)$ ein klassisches diskretes OPS dar.

Beweis: Für das klassische diskrete OPS $\Delta(P_n(x))$ gilt nach Satz 3.15 eine Differenzengleichung der Form

$$\sigma(x)\Delta\nabla\Delta P_n(x) + \overline{\tau}(x)\Delta\Delta P_n(x) + \overline{\lambda}_n \Delta P_n(x) = 0$$

mit $\sigma(x) = ax^2 + bx + c$, $\overline{\tau}(x) = (d + 2a)x + d + e + a + b$ und $\overline{\lambda}_n = \lambda_n + d$. Sei weiter $Q_n(x)$ ein klassisches diskretes OPS, das eine Differenzenregel der Form (3.10)

$$\sigma(x)\Delta\nabla Q_n(x) + \tau(x)Q_n(x) + \lambda_n Q_n(x) = 0$$

erfüllt. Definieren wir

$$Q_n(x) := -\frac{1}{\overline{\lambda}_n}\left(\sigma(x)\Delta\nabla P_n(x) + \overline{\tau}\Delta P_n(x)\right) ,$$

so liefert Anwedung des Δ-Operators

$$\begin{aligned} -\lambda_n \Delta Q_n(x) &= (\sigma(x+1) - \Delta\sigma(x))\Delta\nabla\Delta P_n(x) + (\tau(x) + \Delta\sigma(x))\Delta\Delta P_n(x) + d\Delta P_n(x) \\ &= \sigma(x)\Delta\nabla\Delta P_n(x) + \overline{\tau}(x)\Delta\Delta P_n(x) + d\Delta P_n(x) \\ &= -\lambda_n \Delta P_n(x) . \end{aligned}$$

Somit muss $Q_n(x) = P_n(x)$ gelten, woraus folgt, dass auch $P_n(x)$ ein klassisches diskretes OPS darstellt. □

Satz 3.17 (Strukturformel)
Sei $P_n(x) = k_n x^n + k'_n x^{n-1} + \ldots$ $(n \in \mathbb{N}_{\geq 0})$ ein klassiches diskretes OPS, welches Lösung der Differenzengleichung (3.10) mit quatratischem Polynom $\sigma(x)$ und linearem Polynom $\tau(x)$ ist. Dann erfüllt $P_n(x)$ die Strukturformel

$$P_n(x) = \hat{a}_n \Delta P_{n+1}(x) + \hat{b}_n \Delta P_n(x) + \hat{c}_n \Delta P_{n-1}(x). \tag{3.56}$$

Beweis: Um für ein klassisches diskretes OPS eine Strukturregel zu finden, wenden wir zunächst den Δ-Operator auf die Gleichung (3.47) an und erhalten

$$\Delta(\sigma(x)\nabla P_n(x)) = \alpha_n \Delta P_{n+1}(x) + \beta_n \Delta P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x).$$

Anwendung der Produktregel für den Δ-Operator und Verwendung der Beziehung (3.5) liefert uns schließlich

$$\Delta\sigma(x)\cdot\Delta P_n(x) + \sigma(x)\cdot\Delta\nabla P_n(x) = \alpha_n \Delta P_{n+1}(x) + \beta_n \Delta P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x).$$

Nutzen wir nun die Gleichung (3.55), um $x\Delta P_n(x)$ zu ersetzen, so erhalten wir eine Rekursionsgleichung der Form

$$\sigma(x)\Delta\nabla P_n(x) = a'_n \Delta P_{n+1}(x) + b'_n \Delta P_n(x) + c'_n \Delta P_{n-1}(x). \tag{3.57}$$

Um nun die Strukturformel zu erhalten, substituieren wir (3.57) in die Differenzengleichung (3.10) und erhalten

$$a'_n \Delta P_{n+1}(x) + b'_n \Delta P_n(x) + c'_n \Delta P_{n-1}(x) + \tau(x)\Delta P_n(x) + \lambda_n P_n(x) = 0.$$

Ersetzen wir nun wieder $x\Delta P_n(x)$ in dieser Gleichung und lösen nach $P_n(x)$ auf, so erhalten wir die Strukturformel

$$P_n(x) = \hat{a}_n \Delta P_{n+1}(x) + \hat{b}_n \Delta P_n(x) + \hat{c}_n \Delta P_{n-1}(x).$$

□

Satz 3.18 (Koeffizienten der Strukurformel)
Eine Strukturformel der Form (3.56) besitzt folgende Koeffizienten

$$\hat{a}_n = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{k_n}{k_{n+1}},$$

$$\hat{b}_n = \frac{-2an(d+an) - db + ad - d^2 + 2ea}{(2an-2a+d)(d+2an)}$$

und

$$\begin{aligned}\hat{c}_n = {} & ((n-1)(d+an-a)(and - db - ad + a^2n^2 - 2a^2n + 4ca + a^2 + 2ea - b^2) \\ & -dbe + d^2c + ae^2) \\ & \cdot\frac{an}{(d-a+2an)(d+2an-3a)(2an-2a+d)^2}\frac{k_n}{k_{n-1}}\ .\end{aligned}$$

Beweis: Führen wir die im Beweis von Satz 3.17 beschriebenen Schritte aus, so erhalten wir letzlich mittels Koeffizientenvergleich die erwähnten Koeffizienten. □

Satz 3.19 (Diskrete Stammfunktionen klassischer diskreter OPS)
Sei $P_n(x) = k_n x^n + k'_n x^{n-1} + \ldots$ ($n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$) ein klassisches diskretes OPS, welches die Differenzengleichung (3.10) mit einem quadratischen Polynome $\sigma(x)$ und einem linearen Polynom $\tau(x)$ erfüllt. Dann hat die diskrete Stammfunktion von $P_n(x)$ die Darstellung:

$$\sum_{x=a}^{b} P_n(x) = \hat{a}_n P_{n+1}(x) + \hat{b}_n P_n(x) + \hat{c}_n P_{n-1}(x)\ . \tag{3.58}$$

Für die klassischen diskreten OPS ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\sum_{x=a}^{b} C_n(x;\mu) &= -\frac{\mu}{n+1} C_{n+1}(x;\mu)\,, \\
\sum_{x=a}^{b} K_n(x;p,N) &= K_{n+1}(x;p,N) - pK_n(x;p,N)\,, \\
\sum_{x=a}^{b} M_n(x;\gamma,\mu) &= \frac{\mu}{(\mu-1)(n+1)} M_{n+1}(x;\gamma,\mu) - \frac{\mu}{\mu-1} M_n(x;\gamma,\mu)\,, \\
\sum_{x=a}^{b} H_n(x;\alpha,\beta,N) &= \frac{n+\alpha+\beta+1}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} H_{n+1}(x;\alpha,\beta,N) \\
&\quad - \frac{2n^2+2n+2n\alpha+2n\beta+\alpha-\alpha N+\beta N+\alpha\beta+\beta+\beta^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} H_n(x;\alpha,\beta,N) \\
&\quad + \frac{(n+\alpha)(n+\beta)(n-N)(n+\alpha+\beta+N)}{(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)} H_{n-1}(x;\alpha,\beta,N)\,.
\end{aligned}$$

Beweis: Wenden wir die Summation auf die Strukturformel (3.56) an, so erhalten wir wegen $\sum_{x=a}^{b} \Delta P_n(x) = P_n(x)$ die diskrete Stammfunktion.
Durch Einsetzen der jeweiligen a, b, c, d, e der klassischen diskreten OPS in die Koeffizientengleichungen für $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$ und $\hat{c}_n$ erhalten wir dann die diskreten Stammfunktionen der Systeme. □

3.8 Verbindungskoeffizienten

In manchen Fällen möchte man Informationen und Ergebnisse eines Polynomsystems $(Q_m(x))_{m\geq 0}$ auf ein anderes Polynomsystem $(P_n(x))_{n\geq 0}$ übertragen. Wir gehen zunächst davon aus, dass sowohl $P_n(x)$ als auch $Q_n(x)$ vom Grad n sind. Dann gilt wegen der linearen Unabhängigkeit die folgende Beziehung:

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} C_m(n) Q_m(x). \tag{3.59}$$

Unser Ziel wird es in diesem Abschnitt sein, die Koeffizienten $C_m(n)$ ($n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, $m = 0, \ldots, n$), welche Verbindungskoeffzienten zwischen den Polynomsystemen $P_n(x)$ und $Q_m(x)$ heißen, weitgehend zu bestimmen.
Der Einfachheithalber nehmen wir nun an, dass $C_m(n)$ nur für ganzzahlige m, n definiert sei und dass $C_m(n) = 0$ außerhalb der $m \times n$-Region läge.
Wir werden zunächst versuchen, $C_m(n)$ durch eine Rekursionsgleichung zu beschreiben. Da $C_m(n)$ von zwei Parametern n und m abhängt, gilt eine gemischte Rekursionsgleichung. Diese soll möglichst in eine reine Rekursionsgleichung umgewandelt werden, die nur Shifts bzgl. einem der beiden Parameter beinhaltet.
Wir werden uns auf monische Systeme $\tilde{P}_n(x)$ und $\tilde{Q}_m(x)$ beschränken, denn sind $\tilde{C}_m(n)$ die Verbindungskoeffizienten von $\tilde{P}_n(x)$ und $\tilde{Q}_m(x)$ und sind k_n und $\overline{k}_m$ die führenden Koeffizienten von $P_n(x)$ und $Q_m(x)$, so gilt für die Verbindungskoeffzienten $C_m(n)$ offenbar

die folgende Beziehung

$$C_m(n) = \frac{k_n}{\overline{k}_m}\tilde{C}_m(n).$$

Wir nehmen nun an, dass $P_n(x)$ ein durch (3.10) gegebenes OPS sei mit $\sigma(x) = ax^2 + bx + c$ und $\tau(x) = dx + e$ und dass $Q_m(x)$ ebenfalls ein durch (3.10) gegebenes OPS sei mit $\overline{\sigma}(x) = \overline{a}x^2 + \overline{b}x + \overline{c}$ und $\overline{\tau}(x) = \overline{d}x + \overline{e}$. Dann erfüllen beide OPS eine Rekursion der Form

$$xP_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x) \tag{3.60}$$

und

$$xQ_m(x) = \overline{a}_m Q_{m+1}(x) + \overline{b}_m Q_m(x) + \overline{c}_m Q_{m-1}(x), \tag{3.61}$$

wobei die Koeffizienten wie folgt berechnet werden

$$a_n = \frac{1}{A_n}, \quad b_n = -\frac{B_n}{A_n}, \quad c_n = \frac{A_n}{C_n} \tag{3.62}$$

und

$$\overline{a}_m = \frac{1}{\overline{A}_m}, \quad \overline{b}_m = -\frac{\overline{B}_m}{\overline{A}_m}, \quad \overline{c}_m = \frac{\overline{A}_m}{\overline{C}_m}. \tag{3.63}$$

Die Koeffizienten $a_n, b_n, c_n, \overline{a}_m, \overline{b}_m$ und $\overline{c}_m$ seien explizit gegeben.

Im Folgenden wollen wir voneinander unabhängige Rekursionsgleichungen für die Verbindungskoeffizienten $C_m(m)$ herleiten. Diese werden wir Kreuzregeln nennen.
Zunächst betrachten wir die für $C_m(n)$ definierte Gleichung und die für $P_n(x)$ und $Q_m(x)$ definierten Rekursionsgleichungen. Dann erhält man

$$\begin{aligned} xP_n(x) &= a_n P_{n+1} + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x) \\ &= \sum_{m=0}^{n} (a_n C_m(n+1) Q_m(x) + b_n C_m(n) Q_m(x) + c_n C_m(n-1) Q_m(x)) \\ &= \sum_{m=0}^{n} C_m(n) x Q_m(x) \\ &= \sum_{m=0}^{n} C_m(n) (\overline{a}_m Q_{m+1}(x) + \overline{b}_m Q_m(x) + \overline{c}_m Q_{m-1}(x)). \end{aligned}$$

Durch entsprechende Indexverschiebung können wir die Koeffizienten vergleichen und erhalten die sogenannte
1. Kreuzregel:

$$a_n C_m(n+1) + b_n C_m(n) + c_n C_m(n-1) = \overline{a}_{m-1} C_{m-1}(n) + \overline{b}_m C_m(n) + \overline{c}_{m+1} C_{m+1}(n). \tag{3.64}$$

Betrachten wir nun

$$\begin{aligned} x\Delta P_n(x) &= \alpha_n^* \Delta P_{n+1}(x) + \beta_n^* \Delta P_n(x) + \gamma_n^* \Delta P_{n-1}(x) \quad \text{und} \\ x\Delta Q_m(x) &= \overline{\alpha}_n^* \Delta Q_{m+1}(x) + \overline{\beta}_n^* \Delta Q_m(x) + \overline{\gamma}_n^* \Delta Q_{m-1}(x)\ , \end{aligned}$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}
x\Delta P_n(x) &= \alpha_n^*\Delta P_{n+1}(x) + \beta_n^*\Delta P_n(x) + \gamma_n^*\Delta P_{n-1}(x) \\
&= \sum_{m=0}^{n}(\alpha_n^* C_m(n+1)\Delta Q_m(x) + \beta_n^* C_m(n)\Delta Q_m(x) + \gamma_n^* C_m(n-1)\Delta Q_m(x)) \\
&= \sum_{m=0}^{n} C_m(n) x\Delta Q_m(x) \\
&= \sum_{m=0}^{n} C_m(n)(\overline{\alpha}_n^*\Delta Q_{m+1}(x) + \overline{\beta}_n^*\Delta Q_m(x) + \overline{\gamma}_n^*\Delta Q_{m-1}(x)).
\end{aligned}$$

Durch Indexverschiebung erhalten wir dann wieder die
2. Kreuzregel:

$$\alpha_n^* C_m(n+1) + \beta_n^* C_m(n) + \gamma_n^* C_m(n-1) = \overline{\alpha}_{m-1}^* C_{m-1}(n) + \overline{\beta}_m^* C_m(n) + \overline{\gamma}_{m+1}^* C_{m+1}(n) \quad (3.65)$$

Auf analoge Weise erhält man dann mittels der Strukturformel die
3. Kreuzregel:

$$\hat{a}_n C_m(n+1) + \hat{b}_n C_m(n) + \hat{c}_n C_m(n-1) = \overline{\hat{a}}_{m-1} C_{m-1}(n) + \overline{\hat{b}}_m C_m(n) + \overline{\hat{c}}_{m+1} C_{m+1}(n). \quad (3.66)$$

Nun möchten wir die Kreuzregeln noch ein wenig spezifizieren, da sich herausstellt, dass (3.64) und (3.65) linear abhängig zueinander sind.
Dazu betrachten wir die beiden Differenzenregeln

$$\begin{aligned}
\sigma(x)\nabla P_n(x) &= \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) \quad \text{und} \\
\overline{\sigma}(x)\nabla Q_m(x) &= \overline{\alpha}_m Q_{m+1}(x) + \overline{\beta}_m Q_m(x) + \overline{\gamma}_m Q_{m-1}(x)
\end{aligned}$$

und fordern, dass $\overline{\sigma}(x) = \sigma(x)$ gilt, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sigma(x)\nabla P_n(x) &= \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) \\
&= \sum_{m=0}^{n}(\alpha_n C_m(n+1) Q_m(x) + \beta_n C_m(n) Q_m(x) + \gamma_n C_{m-1}(n) Q_m(x)) \\
&= \sum_{m=0}^{n} C_m(n)\sigma(x)\nabla Q_m(x) \\
&= \sum_{m=0}^{n} C_m(n)(\overline{\alpha}_m Q_{m+1}(x) + \overline{\beta}_m Q_m(x) + \overline{\gamma}_m Q_{m-1}(x) .
\end{aligned}$$

Durch Indexverschiebung erhalten wir dann eine weitere Kreuzregel:
4. Kreuzregel:

$$\alpha_n C_m(n+1) + \beta_n C_m(n) + \gamma_n C_m(n-1) = \overline{\alpha}_{m-1} C_{m-1}(n) + \overline{\beta}_m C_m(n) + \overline{\gamma}_{m+1} C_{m+1}(n) . \quad (3.67)$$

Mit dieser letzten Erkenntnis können wir dann den folgenden Satz beweisen:

Satz 3.20
Sei $P_n(x)$ ein klassisches diskretes OPS, das die Differenzengleichung (3.10) mit $\sigma(x) = ax^2 + bx + c$ und $\tau(x) = dx + e$ erfüllt und sei $Q_n(x)$ ein weiteres klassisches diskretes OPS, das die Differenzengleichung (3.10) mit $\bar{\sigma}(x) = \sigma(x)$ und $\bar{\tau}(x) = \bar{d}x + \bar{e}$ erfüllt. Dann gilt eine Beziehung der Form (3.59), wobei $C_m(n)$ folgende Rekursionsgleichung

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& (\bar{d} + 2am + 2a)^2(\bar{d} + 3a + 2am)(\bar{d} + a + 2am)(\bar{d} + 2am)(-m + n)\\
&\cdot(an - a + d + am)C_m(n) - (\bar{d} + 2am + 2a)(\bar{d} + 3a + 2am)(\bar{d} + a + 2am)(m + 1)\\
&\cdot(-a\bar{d}d + an^2\bar{d}^2 + 2ea\bar{d} - 2a^2\bar{e}m^2 + b\bar{d}^2m - 2na^3m^2 - 2a^3nm - a^2n\bar{d} + a^2n^2\bar{d}\\
&-an\bar{d}^2 - 2\bar{e}a\bar{d}m + 4ea^2m + ba\bar{d}m^2 + 2a^3m^2n^2 + a\bar{d}bm + 2a^2m\bar{d}n^2 - 4a^3m^2\\
&-2a\bar{d}^2m^2 - 4a^2\bar{d}m^3 + dn\bar{d}^2 - 2a^2m^2d - a^2m\bar{d} - \bar{d}^2ma - 2a^2\bar{e}m + 2a^3mn^2 + and\bar{d}\\
&-2a^3m^2 - 2a^2\bar{e}n^2 - \bar{d}^2d - \bar{d}bd - 2a^3m^4 - 2a^2md + 2\bar{d}mand + 2a^2m^2nd + 4a^2em^2\\
&+4aem\bar{d} - 2a\bar{e}nd + 2a^2ndm - 2a^2m\bar{d}n - 3am\bar{d}d - \bar{d}m^2ad - 2\bar{d}bmd - 2am^2bd\\
&-2ambd - 5\bar{d}m^2a^2 + 2\bar{e}a^2n - \bar{d}\bar{e}d - \bar{d}^2md + e\bar{d}^2 + dn\bar{d} + an^2b\bar{d} - anb\bar{d})C_{m+1}(n)\\
&+(m + 1)(\bar{d} + 2am)(\bar{d} + am + a + an)(m + 2)\cdot(4a^2cm^2 + 2a^2\bar{e}m^2 - b\bar{d}^2m - b^2am^2\\
&+2\bar{e}am - ba\bar{d}m^2 + 4\bar{d}cam + 2a^2\bar{d} + 4a^3m - 2a\bar{d}bm + 4a^3m^3 - \bar{d}b^2m + a\bar{d}^2m^2\\
&+2a^2\bar{d}m^3 + 6a^2m\bar{d} + 2\bar{d}^2ma + 4a^2\bar{e}m + 6a^3m^2 + 4\bar{d}ca - 2b^2am + 8a^2cm\\
&+2a^2\bar{e} - b^2a + a^3m^4 + a^3 + 4a^2c - \bar{d}b^2 - ba\bar{d} + \bar{d}^2c + a\bar{d}^2 - b\bar{d}^2 + a\bar{e}^2\\
&-\bar{d}b\bar{e} + 2\bar{e}a\bar{d} + 6\bar{d}m^2a^2)\cdot(-am - 2a - \bar{d} + an + d)\cdot C_{m+2}(n)
\end{aligned}
$$

bzgl. m mit Anfangswerten $C_n(n) = 1$ und $C_{m+1}(n) \equiv 0$ erfüllt ist. Außerdem gilt die folgende Rekursionsgleichung

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& (d + 2an + 2a)(n + 2)(-n^2ab^2 - d^2bn - dbe + 2a^2n^2e + 4n^2a^2c + 2dn^3a^2 + d^2an^2\\
&-db^2n + a^3n^4 + d^2c + ae^2dan^2b + 2dane + 4dcna)(n + a)(an - a + d + am)\\
&\cdot(-am - \bar{d} + an + d)C_m(n) - (d + 2an)(d - a + 2an)(d + a + 2an)(n + 2)\\
&\cdot(-2ea\bar{d} - 2na^3m^2 + ed\bar{d} + 2a^3nm + amd^2 - am^2d^2 + d^2n\bar{d} - 2ea^2m\\
&+an^2d\bar{d} - 2a^3m^2n^2 - 2a^2m\bar{d}n^2 - d^2bn - a^2m^2d - andb + 2a^2n^2e + 2a^3mn^2\\
&+3a^2nd + 7a^2n^2d + and\bar{d} + 2ead - \bar{d}md^2 + 4dn^3a^2 - 4a^2\bar{e}n^2\\
&-\bar{e}d^2 + 2a^2ne + d^2\bar{d} + 2d^2an^2 + 2\bar{d}bd + 2a^3n^4 + ad^2 - bd^2 - dan^2b\\
&+a^2md + 2dane + 4a^3n^3 + 2a^3n^2 - 2\bar{d}mand - 2a^2m^2nd + 2a^2em^2 + 2aem\bar{d}\\
&-4a\bar{e}nd - 2a\bar{e}d + 2a^2ndm - 2a^2m\bar{d}n - am\bar{d}d - am^2bd + ambd - 4\bar{e}a^2n\\
&+2dbn\bar{d} + 2an^2b\bar{d} + 2anb\bar{d} + 3and^2)C_m(n + 1) + (d + 2an)^2(d + 2an + 2a)\\
&(d - a + 2an)(d + a + 2an)(-m + n + 2)(\bar{d} + am + a + an)C_m(n + 2)
\end{aligned}
$$

bzgl. n.

<u>Beweis:</u> Wir geben zunächst unsere Kreuzregeln (3.64), (3.65) und (3.67) ein. Dabei sind die Koeffizienten noch unbestimmt.

```
In[50]:= kreuz1 = a[n] * C_m[n + 1] + b[n] * C_m[n] + c[n] * C_m[n - 1] ==
           oa[m - 1] * C_{m-1}[n] + ob[m] * C_m[n] + oc[m + 1] * C_{m+1}[n];

         kreuz2 = αs[n] * C_m[n + 1] + βs[n] * C_m[n] + γs[n] * C_m[n - 1] ==
           oαs[m - 1] * C_{m-1}[n] + oβs[m] * C_m[n] + oγs[m + 1] * C_{m+1}[n];

         kreuz3 = α[n] * C_m[n + 1] + β[n] * C_m[n] + γ[n] * C_m[n - 1] ==
           oα[m - 1] * C_{m-1}[n] + oβ[m] * C_m[n] + oγ[m + 1] * C_{m+1}[n];
```

Um nun die Rekursionsgleichung bzgl. m herzuleiten, eliminieren wir aus den Kreuzregeln $C_m(n+1)$ und $C_m(n-1)$ und erhalten:

```
In[51]:= rek1 = Eliminate[{kreuz1, kreuz2, kreuz3}, {C_m[n + 1], C_m[n - 1]}]
```

Out[51]=

$$
\begin{aligned}
&-c(n)\,\mathrm{o\alpha s}(m-1)\,\alpha(n)\,\mathrm{C}_{m-1}(n) + c(n)\,\mathrm{o}\alpha(m-1)\,\alpha s(n)\,\mathrm{C}_{m-1}(n)+\\
&a(n)\,\mathrm{o\alpha s}(m-1)\,\gamma(n)\,\mathrm{C}_{m-1}(n) - a(n)\,\mathrm{o}\alpha(m-1)\,\gamma s(n)\,\mathrm{C}_{m-1}(n)-\\
&c(n)\,\mathrm{o\beta s}(m)\,\alpha(n)\,\mathrm{C}_m(n) + c(n)\,\mathrm{o}\beta(m)\,\alpha s(n)\,\mathrm{C}_m(n) - c(n)\,\alpha s(n)\,\beta(n)\,\mathrm{C}_m(n)+\\
&c(n)\,\alpha(n)\,\beta s(n)\,\mathrm{C}_m(n) + a(n)\,\mathrm{o\beta s}(m)\,\gamma(n)\,\mathrm{C}_m(n) + b(n)\,\alpha s(n)\,\gamma(n)\,\mathrm{C}_m(n)-\\
&\mathrm{ob}(m)\,\alpha s(n)\,\gamma(n)\,\mathrm{C}_m(n) - a(n)\,\beta s(n)\,\gamma(n)\,\mathrm{C}_m(n) - a(n)\,\mathrm{o}\beta(m)\,\gamma s(n)\,\mathrm{C}_m(n)-\\
&b(n)\,\alpha(n)\,\gamma s(n)\,\mathrm{C}_m(n) + \mathrm{ob}(m)\,\alpha(n)\,\gamma s(n)\,\mathrm{C}_m(n) + a(n)\,\beta(n)\,\gamma s(n)\,\mathrm{C}_m(n)-\\
&c(n)\,\mathrm{o\gamma s}(m+1)\,\alpha(n)\,\mathrm{C}_{m+1}(n) + c(n)\,\mathrm{o}\gamma(m+1)\,\alpha s(n)\,\mathrm{C}_{m+1}(n)+\\
&a(n)\,\mathrm{o\gamma s}(m+1)\,\gamma(n)\,\mathrm{C}_{m+1}(n) - \mathrm{oc}(m+1)\,\alpha s(n)\,\gamma(n)\,\mathrm{C}_{m+1}(n)-\\
&a(n)\,\mathrm{o}\gamma(m+1)\,\gamma s(n)\,\mathrm{C}_{m+1}(n) + \mathrm{oc}(m+1)\,\alpha(n)\,\gamma s(n)\,\mathrm{C}_{m+1}(n) ==\\
&\mathrm{oa}(m-1)\,(\alpha s(n)\,\gamma(n) - \alpha(n)\,\gamma s(n))\,\mathrm{C}_{m-1}(n)
\end{aligned}
$$

Analog eliminieren wir $C_{m-1}(n)$ und $C_{m+1}(n)$, um die Rekursionsgleichung bzgl. n zu erhalten:

```
In[52]:= rek2 = Eliminate[{kreuz1, kreuz2, kreuz3}, {C_{m+1}[n], C_{m-1}[n]}]
```

Out[52]=

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{oc}(m+1)\,\mathrm{o\alpha s}(m-1)\,\gamma(n)\,\mathrm{C}_m(n-1) + \mathrm{oa}(m-1)\,\mathrm{o\gamma s}(m+1)\,\gamma(n)\,\mathrm{C}_m(n-1)+\\
&\mathrm{oc}(m+1)\,\mathrm{o}\alpha(m-1)\,\gamma s(n)\,\mathrm{C}_m(n-1) - \mathrm{oa}(m-1)\,\mathrm{o}\gamma(m+1)\,\gamma s(n)\,\mathrm{C}_m(n-1)+\\
&\mathrm{oc}(m+1)\,\mathrm{o\alpha s}(m-1)\,\mathrm{o}\beta(m)\,\mathrm{C}_m(n) - \mathrm{oc}(m+1)\,\mathrm{o}\alpha(m-1)\,\mathrm{o\beta s}(m)\,\mathrm{C}_m(n)+\\
&b(n)\,\mathrm{o\alpha s}(m-1)\,\mathrm{o}\gamma(m+1)\,\mathrm{C}_m(n) - \mathrm{ob}(m)\,\mathrm{o\alpha s}(m-1)\,\mathrm{o}\gamma(m+1)\,\mathrm{C}_m(n)+\\
&\mathrm{oa}(m-1)\,\mathrm{o\beta s}(m)\,\mathrm{o}\gamma(m+1)\,\mathrm{C}_m(n) - b(n)\,\mathrm{o}\alpha(m-1)\,\mathrm{o\gamma s}(m+1)\,\mathrm{C}_m(n)+\\
&\mathrm{ob}(m)\,\mathrm{o}\alpha(m-1)\,\mathrm{o\gamma s}(m+1)\,\mathrm{C}_m(n) - \mathrm{oa}(m-1)\,\mathrm{o}\beta(m)\,\mathrm{o\gamma s}(m+1)\,\mathrm{C}_m(n)-\\
&\mathrm{oc}(m+1)\,\mathrm{o\alpha s}(m-1)\,\beta(n)\,\mathrm{C}_m(n) + \mathrm{oa}(m-1)\,\mathrm{o\gamma s}(m+1)\,\beta(n)\,\mathrm{C}_m(n)+\\
&\mathrm{oc}(m+1)\,\mathrm{o}\alpha(m-1)\,\beta s(n)\,\mathrm{C}_m(n) - \mathrm{oa}(m-1)\,\mathrm{o}\gamma(m+1)\,\beta s(n)\,\mathrm{C}_m(n)+\\
&a(n)\,\mathrm{o\alpha s}(m-1)\,\mathrm{o}\gamma(m+1)\,\mathrm{C}_m(n+1) - a(n)\,\mathrm{o}\alpha(m-1)\,\mathrm{o\gamma s}(m+1)\,\mathrm{C}_m(n+1)-\\
&\mathrm{oc}(m+1)\,\mathrm{o\alpha s}(m-1)\,\alpha(n)\,\mathrm{C}_m(n+1) + \mathrm{oa}(m-1)\,\mathrm{o\gamma s}(m+1)\,\alpha(n)\,\mathrm{C}_m(n+1)+\\
&\mathrm{oc}(m+1)\,\mathrm{o}\alpha(m-1)\,\alpha s(n)\,\mathrm{C}_m(n+1) - \mathrm{oa}(m-1)\,\mathrm{o}\gamma(m+1)\,\alpha s(n)\,\mathrm{C}_m(n+1) ==\\
&c(n)\,(\mathrm{o}\alpha(m-1)\,\mathrm{o\gamma s}(m+1) - \mathrm{o\alpha s}(m-1)\,\mathrm{o}\gamma(m+1))\,\mathrm{C}_m(n-1)
\end{aligned}
$$

Nach Eingabe der Koeffizienten führen wir in unserer Rekursionsgleichung bzgl. m einen Shift $m \to m + 1$ durch:

```
In[53]:= rek3 = rek1/.m → m + 1;
```

Genauso shiften wir die Rekursionsgleichung bzgl. n mit $n \to n + 1$:

```
In[54]:= rek4 = rek2/.n → n + 1;
```

Die *Mathematica*-Outputs sind an dieser Stelle aus Platzgründen unterdrückt.

Um jetzt die zu beweisenden Rekursionsgleichungen zu erhalten, müssen wir noch die beiden oben erhaltenen Rekursionsgleichungen faktorisieren, zusammenfassen und die gemeinsamen Vielfachen eliminieren. Dies ist aufgrund des Umfangs der Gleichungen an dieser Stelle weggelassen, ist aber mit Hilfe eines Computeralgebrasystems einfach durch zu führen. □

Satz 3.21
Sei $Q_m(x)$ ein klassisches diskretes OPS, welches mit $\bar\sigma(x) = \bar a x^2 + \bar b x + \bar c$ und $\bar\tau(x) = \bar d x + \bar e$ die Differenzengleichung (3.10) erfüllt. Dann gilt für die Reihenkoeffizienten $C_m(n)$ der Reihe bezüglich der fallenden Faktoriellen

$$x^{\underline{n}} = \sum_{m=0}^{n} C_m(n) Q_m(x) \tag{3.68}$$

die Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned}
0 \;=\; & (2m\bar a + \bar a + \bar d)(2m\bar a + 3\bar a + \bar d)(2ma\bar a + 2\bar a + \bar d)^2(2m\bar a + \bar d)(n - m)C_m(n) \\
& +(2m\bar a + \bar a + \bar d)(2m\bar a + 3\bar a + \bar d)(2m\bar a + 2\bar a + \bar d)(m + 1)(2m^2 n\bar a^2 - 2m^2\bar a^2 + m^2\bar a\bar d \\
& +2m^2\bar a\bar d + 2mn\bar a^2 + 2mn\bar a\bar d - 2m\bar a^2 - m\bar a\bar d + 2m\bar a\bar b + m\bar d^2 + 2m\bar d\bar b + n\bar a\bar d \\
& +2n\bar a\bar e - n\bar b\bar b - \bar a\bar d + \bar d\bar b + \bar d\bar e)C_{m+1}(n) \\
& +(m + 1)(2m\bar a + \bar d)(m^4\bar a^3 + 2m^3\bar a^2\bar d + 6m^2\bar a + 6m^2\bar a^2\bar d + 4m^2\bar a^2\bar c + 2m^2\bar a^2\bar e \\
& +m^2\bar a\bar d^2 - m^2\bar a\bar b\bar d - m^2\bar a\bar b^2 + 4m\bar a^3 + 6m\bar a^2\bar d + 8m\bar a^2\bar c + 4m\bar a^2\bar e \\
& +2m\bar a\bar d^2 - 2m\bar a\bar d\bar b + 4m\bar a\bar d\bar c + 2m\bar a\bar d\bar e - 2m\bar a\bar b^2 - m\bar d^2\bar b - m\bar d\bar b^2 \\
& +\bar a^3 + 2\bar a^2\bar d + 4\bar a^2\bar c + 2\bar a^2\bar e + \bar a\bar d^2 - \bar a\bar d\bar b + 4\bar a\bar d\bar c + 2\bar a\bar d\bar e \\
& -\bar a\bar e^2 - \bar d^2\bar b + \bar d^2\bar c - \bar d\bar b^2 - \bar d\bar b\bar e)(m + 2)(m\bar a + n\bar a + \bar a + \bar d)C_{m+2} \,.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Ist $\bar c = 0$, dann gilt die Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned}
0 \;=\; & (\bar d + \bar a + 2\bar a m)(\bar d + 2\bar a m)(-n + m)C_m(n) \\
& -(\bar a n + \bar d + \bar a m)(m + 1)(\bar a m^2 + m\bar d + m\bar b + \bar e)C_{m+1}(n) \,.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Beweis: Wir haben zu Beginn des Abschnittes bereits drei essentiell verschiedene Kreuzregeln hergeleitet. Um nun den Beweis durchführen zu können, modifizieren wir die Methode hier. Nach Voraussetzung erfüllt $Q_m(x)$ die Differenzengleichung

$$\bar\sigma(x)\Delta\nabla Q_m(x) + \bar\tau(x)\Delta Q_m(x) + \bar\lambda_m Q_m(x) = 0$$

mit $\overline{\sigma}(x) = \overline{a}x^2 + \overline{b}x + \overline{c}$. Außerdem erfüllt erfüllt $Q_m(x)$ eine Differenzenregel der Form

$$(\overline{\sigma}(x) + \overline{\tau}(x)\Delta Q_m(x) = \overline{\alpha}_m Q_{m+1}(x)(\overline{\beta}_m - \overline{\lambda}_m)Q_m(x) + \overline{\gamma}_m Q_{m-1}(x) \ .$$

Andererseits erfüllt $P_n(x) = x^{\underline{n}}$ wegen

$$\begin{aligned}(\overline{\sigma}(x) + \overline{\tau}(x)\Delta P_n(x) &= (\overline{a}x^2 + (\overline{b} + \overline{d})x + \overline{c} + \overline{e})n \cdot x^{\underline{n-1}} && (3.71)\\ &= \overline{a}n \cdot x^2 x^{\underline{n-1}} + n(\overline{b} + \overline{d})x x^{\underline{n-1}} + n(\overline{c} + \overline{e})x^{\underline{n-1}}\\ &= n\overline{a}(x^{\underline{n+1}} + (2n-1)x^{\underline{n}} + (n-1)^2 x^{\underline{n-1}}) + n(\overline{b} + \overline{d})(x^{\underline{n}} + (n-1)x^{\underline{n-1}})\\ &\quad + n(\overline{c} + \overline{e})x^{\underline{n-1}}\\ &= \overline{a}nP_{n+1}(x) + n(\overline{a}(2n-1) + \overline{b} + \overline{d})P_n(x)\\ &\quad + n((n-1)(\overline{a}(n-1) + \overline{b} + \overline{d}) + \overline{c} + \overline{e})P_{n-1}(x) && (3.72)\end{aligned}$$

jede Differenzenregel dieser Form. In Unserer Situation erhalten wir also die 1. Kreuzregel (3.64) mit $a_n = 1$, $b_n = c_n = 0$

$$C_m(n+1) = \overline{a}_{m-1}C_{m-1}(n) + \overline{b}_m C_m(n) + \overline{c}_{m+1}C_{m+1}(n) \qquad (3.73)$$

und die 3. Kreuzregel (3.66) mit $\hat{a}_n = \frac{1}{n+1}$ und $\hat{b}_n = \hat{c}_n = 0$

$$\frac{1}{n+1}C_m(n+1) = \hat{\overline{a}}_{m-1}C_{m-1}(n) + \hat{\overline{b}}_m C_m(n) + \hat{\overline{c}}_{m+1}C_{m+1}(n) \ . \qquad (3.74)$$

Mit (3.72) erhalten wir dann noch eine dritte Kreuzregel

$$\begin{aligned}\overline{a}nC_m(n+1) &+ n(\overline{a}(2n-1) + \overline{b} + \overline{d})C_m(n) + n((n-1)(\overline{a}(n-1) + \overline{b} + \overline{d}) + \overline{c} + \overline{e})C_m(n-1)\\ &= \overline{\alpha}_{m-1}C_{m-1}(n) + \overline{\beta}_m C_m(n) + \overline{\gamma}_{m+1}C_{m+1}(n) \ . && (3.75)\end{aligned}$$

```
In[55]:= kreuz1 = C_m[n + 1] == oa[m - 1] * C_{m-1}[n] + ob[m] * C_m[n] +
             oc[m + 1] * C_{m+1}[n];

         kreuz2 = 1/(n + 1) * C_m[n + 1] == oahut[m - 1] * C_{m-1}[n] + obhut[m] * C_m[n] +
             ochut[m + 1] * C_{m+1}[n];

         kreuz3 = ā * n * C_m[n + 1] + n * (ā * (2n - 1) + b̄ + d̄) * C_m[n] +
             n * ((n - 1) (ā * (n - 1) + b̄ + d̄) + c̄ + ē) * C_m[n - 1] ==
           oα[m - 1] * C_{m-1}[n] + oβ[m] * C_m[n] + oγ[m + 1] * C_{m+1}[n];
```

Nach der Eingabe der Kreuzregeln, eliminieren wir die Variablen $C_m(n+1)$ und $C_m(n-1)$ mit Hilfe der drei Kreuzregeln.

```
In[56]:= rek1 = Eliminate[
           {kreuz1, kreuz2, kreuz3}, {C_m[n + 1], C_m[n - 1]}][[1]]
```

Out[56]= $\text{oa}(m-1)\, C_{m-1}(n) == n\, \text{oahut}(m-1)\, C_{m-1}(n) + \text{oahut}(m-1)\, C_{m-1}(n) -$
$\text{ob}(m)\, C_m(n) + n\, \text{obhut}(m)\, C_m(n) + \text{obhut}(m)\, C_m(n) -$
$\text{oc}(m+1)\, C_{m+1}(n) + n\, \text{ochut}(m+1)\, C_{m+1}(n) + \text{ochut}(m+1)\, C_{m+1}(n)$

An dieser Stelle können wir nun die Koeffizienten $\overline{a}_{m-1}$, $\overline{b}_m$, $\overline{c}_{m+1}$, $\overline{\hat{a}}_{m-1}$, $\overline{\overline{b}}_m$, $\overline{\hat{c}}_{m+1}$, $\overline{\alpha}_{m-1}$, $\overline{\beta}_m$ und $\overline{\gamma}_{m+1}$ eingeben (dabei erhalten wir schließlich nur Terme in Abhängigkeit von $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ und $\overline{e}$). Anschließend shiften wir m.

```
In[57]:= rek2 = rek1/.m → m + 1;
```

Somit erhalten wir schließlich unsere Gleichung (3.69):

```
In[58]:= rek3 = Map[Factor, Collect[
            Simplify[Numerator[Together[rek2[[1]] - rek2[[2]]]]],
            {Cm[n], Cm+1[n], Cm+2[n]}]]
```

Out[58]=
$$
\begin{aligned}
&(m-n)\left(2\,m\,\overline{a}+\overline{d}\right)\left(2\,m\,\overline{a}+\overline{a}+\overline{d}\right)\left(2\,m\,\overline{a}+3\,\overline{a}+\overline{d}\right)\mathrm{C}_m(n)\left(2\,m\,\overline{a}+2\,\overline{a}+\overline{d}\right)^2+\\
&(m+1)\left(2\,m\,\overline{a}+\overline{a}+\overline{d}\right)\left(2\,m\,\overline{a}+3\,\overline{a}+\overline{d}\right)\\
&\left(2\,n\,(\overline{a})^2\,m^2+2\,(\overline{a})^2\,m^2-2\,\overline{a}\,\overline{b}\,m^2-\overline{a}\,\overline{d}\,m^2+2\,n\,(\overline{a})^2\,m+2\,(\overline{a})^2\,m-\right.\\
&\left(\overline{d}\right)^2 m-2\,\overline{a}\,\overline{b}\,m+2\,n\,\overline{a}\,\overline{d}\,m+\overline{a}\,\overline{d}\,m-2\,\overline{b}\,\overline{d}\,m+n\left(\overline{d}\right)^2+n\,\overline{a}\,\overline{d}+\\
&\left.\overline{a}\,\overline{d}+n\,\overline{b}\,\overline{d}-\overline{b}\,\overline{d}-2\,n\,\overline{a}\,\overline{e}-\overline{d}\,\overline{e}\right)\mathrm{C}_{m+1}(n)\left(2\,m\,\overline{a}+2\,\overline{a}+\overline{d}\right)-\\
&(m+1)\,(m+2)\left(2\,m\,\overline{a}+\overline{d}\right)\left(m\,\overline{a}+n\,\overline{a}+\overline{a}+\overline{d}\right)\\
&\left((\overline{a})^3\,m^4+4\,(\overline{a})^3\,m^3+2\,(\overline{a})^2\,\overline{d}\,m^3+6\,(\overline{a})^3\,m^2-\overline{a}\left(\overline{b}\right)^2 m^2+\overline{a}\left(\overline{d}\right)^2 m^2+4\,(\overline{a})^2\,\overline{c}\,m^2+\right.\\
&6\,(\overline{a})^2\,\overline{d}\,m^2-\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d}\,m^2+2\,(\overline{a})^2\,\overline{e}\,m^2+4\,(\overline{a})^3\,m-2\,\overline{a}\left(\overline{b}\right)^2 m+2\,\overline{a}\left(\overline{d}\right)^2 m-\\
&\overline{b}\left(\overline{d}\right)^2 m+8\,(\overline{a})^2\,\overline{c}\,m+6\,(\overline{a})^2\,\overline{d}\,m-\left(\overline{b}\right)^2\overline{d}\,m-2\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d}\,m+4\,\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{d}\,m+\\
&4\,(\overline{a})^2\,\overline{e}\,m+2\,\overline{a}\,\overline{d}\,\overline{e}\,m+(\overline{a})^3-\overline{a}\left(\overline{b}\right)^2+\overline{a}\left(\overline{d}\right)^2-\overline{b}\left(\overline{d}\right)^2+\overline{c}\left(\overline{d}\right)^2+\overline{a}\,(\overline{e})^2+4\,(\overline{a})^2\,\overline{c}+\\
&\left.2\,(\overline{a})^2\,\overline{d}-\left(\overline{b}\right)^2\overline{d}-\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d}+4\,\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{d}+2\,(\overline{a})^2\,\overline{e}+2\,\overline{a}\,\overline{d}\,\overline{e}-\overline{b}\,\overline{d}\,\overline{e}\right)\mathrm{C}_{m+2}(n)
\end{aligned}
$$

Im Falle $\overline{c} = 0$ hat die Rekursionsgleichung immer noch drei Terme. Aber wir finden für $\overline{c} = 0$ eine weitere Kreuzregel. Betrachten wir die Differenzenregel (3.47), so erhalten wir

$$\overline{\sigma}(x)\nabla Q_m(x) = \overline{\alpha}_m Q_{m+1}(x) + \overline{\beta}_m Q_m(x) + \overline{\gamma}_m Q_{m-1}(x)\ .$$

Nutzen wir nun aus, dass $\overline{c} = 0$ gilt, so erhalten wir für $P_n(x) = x^{\underline{n}}$ mit einfachen Umformungen die Differenzenregel

$$\overline{\sigma}(x)\nabla P_n(x) = \overline{a}nP_{n+1}(x) + n(\overline{a}n + \overline{b})P_n(x)\ .$$

Es gilt also eine vierte Kreuzregel

$$\overline{a}nC_m(n+1) + n(\overline{a}n + \overline{b})C_m(n) = \overline{\alpha}_{m-1}C_{m-1}(n) + \overline{\beta}_m C_m(n) + \overline{\gamma}_{m+1}C_{m+1}(n)\ . \qquad (3.76)$$

```
In[59]:= kreuz4 = a * n * Cm[n + 1] + n * (a * n + b) * Cm[n] ==
           oα[m - 1] * Cm-1[n]  + oβ[m] * Cm[n]  + oγ[m + 1]  * Cm+1[n];
```

Wir erhalten eine Rekursionsgleichung, indem wir aus den vier Kreuzregeln $C_m(n+1)$, $C_{m+1}(n)$ und $C_{,}(n-1)$ eliminieren:

```
In[60]:= rek4 = Eliminate[{kreuz1, kreuz2, kreuz3, kreuz4},
           {Cm[n + 1], Cm+1[n], Cm[n - 1]}][[1]]
```

Out[60]= $\mathrm{oa}(m-1)\left(-\mathrm{ochut}(m+1)\,\bar{a}\,n^2-\mathrm{ochut}(m+1)\,\bar{a}\,n+\mathrm{o}\gamma(m+1)\right)\mathrm{C}_{m-1}(n)==$
$\mathrm{ochut}(m+1)\,\bar{a}\,\mathrm{C}_m(n)\,n^3-\mathrm{oahut}(m-1)\,\mathrm{oc}(m+1)\,\bar{a}\,\mathrm{C}_{m-1}(n)\,n^2-$
$\mathrm{obhut}(m)\,\mathrm{oc}(m+1)\,\bar{a}\,\mathrm{C}_m(n)\,n^2-\mathrm{oc}(m+1)\,\bar{a}\,\mathrm{C}_m(n)\,n^2+$
$\mathrm{ob}(m)\,\mathrm{ochut}(m+1)\,\bar{a}\,\mathrm{C}_m(n)\,n^2+\mathrm{ochut}(m+1)\,\bar{a}\,\mathrm{C}_m(n)\,n^2+$
$\mathrm{ochut}(m+1)\,\bar{b}\,\mathrm{C}_m(n)\,n^2-\mathrm{oahut}(m-1)\,\mathrm{oc}(m+1)\,\bar{a}\,\mathrm{C}_{m-1}(n)\,n-$
$\mathrm{ochut}(m+1)\,\mathrm{o}\alpha(m-1)\,\mathrm{C}_{m-1}(n)\,n+\mathrm{oahut}(m-1)\,\mathrm{o}\gamma(m+1)\,\mathrm{C}_{m-1}(n)\,n-$
$\mathrm{obhut}(m)\,\mathrm{oc}(m+1)\,\bar{a}\,\mathrm{C}_m(n)\,n+\mathrm{ob}(m)\,\mathrm{ochut}(m+1)\,\bar{a}\,\mathrm{C}_m(n)\,n-$
$\mathrm{oc}(m+1)\,\bar{b}\,\mathrm{C}_m(n)\,n+\mathrm{ochut}(m+1)\,\bar{b}\,\mathrm{C}_m(n)\,n-\mathrm{ochut}(m+1)\,\mathrm{o}\beta(m)\,\mathrm{C}_m(n)\,n+$
$\mathrm{obhut}(m)\,\mathrm{o}\gamma(m+1)\,\mathrm{C}_m(n)\,n+\mathrm{oc}(m+1)\,\mathrm{o}\alpha(m-1)\,\mathrm{C}_{m-1}(n)-$
$\mathrm{ochut}(m+1)\,\mathrm{o}\alpha(m-1)\,\mathrm{C}_{m-1}(n)+\mathrm{oahut}(m-1)\,\mathrm{o}\gamma(m+1)\,\mathrm{C}_{m-1}(n)+$
$\mathrm{oc}(m+1)\,\mathrm{o}\beta(m)\,\mathrm{C}_m(n)-\mathrm{ochut}(m+1)\,\mathrm{o}\beta(m)\,\mathrm{C}_m(n)-$
$\mathrm{ob}(m)\,\mathrm{o}\gamma(m+1)\,\mathrm{C}_m(n)+\mathrm{obhut}(m)\,\mathrm{o}\gamma(m+1)\,\mathrm{C}_m(n)$

Nach Eingabe der Koeffizienten shiften wir m wieder um 1:

```
In[61]:= rek5 = rek4/.m → m + 1;
```

Wir erhalten dann durch Faktorisieren und Zusammenfassen:

```
In[62]:= rek6 =
    Map[Factor,
    Collect[
    Simplify[Numerator[Together[rek5[[1]] - rek5[[2]]]]],
    {C_m[n], C_{m+1}[n]}]]
```

Out[62]= $(m+2)\,(m-n)\left(2\,m\,\bar{a}+\bar{d}\right)\left(2\,m\,\bar{a}+\bar{a}+\bar{d}\right)\left(m\,\bar{a}+n\,\bar{a}+\bar{a}+\bar{d}\right)$
$\left((\bar{a})^3\,m^4+4\,(\bar{a})^3\,m^3+2\,(\bar{a})^2\,\bar{d}\,m^3+6\,(\bar{a})^3\,m^2-\bar{a}\left(\bar{b}\right)^2 m^2+\bar{a}\left(\bar{d}\right)^2 m^2+4\,(\bar{a})^2\,\bar{c}\,m^2+\right.$
$6\,(\bar{a})^2\,\bar{d}\,m^2-\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{d}\,m^2+2\,(\bar{a})^2\,\bar{e}\,m^2+4\,(\bar{a})^3\,m-2\,\bar{a}\left(\bar{b}\right)^2 m+2\,\bar{a}\left(\bar{d}\right)^2 m-$
$\bar{b}\left(\bar{d}\right)^2 m+8\,(\bar{a})^2\,\bar{c}\,m+6\,(\bar{a})^2\,\bar{d}\,m-\left(\bar{b}\right)^2\bar{d}\,m-2\,\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{d}\,m+4\,\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{d}\,m+$
$4\,(\bar{a})^2\,\bar{e}\,m+2\,\bar{a}\,\bar{d}\,\bar{e}\,m+(\bar{a})^3-\bar{a}\left(\bar{b}\right)^2+\bar{a}\left(\bar{d}\right)^2-\bar{b}\left(\bar{d}\right)^2+\bar{c}\left(\bar{d}\right)^2+\bar{a}\,(\bar{e})^2+$
$\left.4\,(\bar{a})^2\,\bar{c}+2\,(\bar{a})^2\,\bar{d}-\left(\bar{b}\right)^2\bar{d}-\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{d}+4\,\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{d}+2\,(\bar{a})^2\,\bar{e}+2\,\bar{a}\,\bar{d}\,\bar{e}-\bar{b}\,\bar{d}\,\bar{e}\right)$
$\mathrm{C}_m(n)-(m+1)\,(m+2)\left(m\,\bar{a}+n\,\bar{a}+\bar{a}+\bar{d}\right)$
$\left((\bar{a})^2\,m^3-n\,(\bar{a})^2\,m^2+\bar{a}\,\bar{b}\,m^2+2\,\bar{a}\,\bar{d}\,m^2+2\,n^2\,(\bar{a})^2\,m+\left(\bar{d}\right)^2 m+\right.$
$\left.n\,\bar{a}\,\bar{b}\,m-2\,n\,\bar{a}\,\bar{d}\,m+\bar{b}\,\bar{d}\,m+\bar{a}\,\bar{e}\,m-n\left(\bar{d}\right)^2+n^2\,\bar{a}\,\bar{d}+n\,\bar{a}\,\bar{e}+\bar{d}\,\bar{e}\right)$
$\left((\bar{a})^3\,m^4+4\,(\bar{a})^3\,m^3+2\,(\bar{a})^2\,\bar{d}\,m^3+6\,(\bar{a})^3\,m^2-\bar{a}\left(\bar{b}\right)^2 m^2+\bar{a}\left(\bar{d}\right)^2 m^2+4\,(\bar{a})^2\,\bar{c}\,m^2+\right.$
$6\,(\bar{a})^2\,\bar{d}\,m^2-\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{d}\,m^2+2\,(\bar{a})^2\,\bar{e}\,m^2+4\,(\bar{a})^3\,m-2\,\bar{a}\left(\bar{b}\right)^2 m+2\,\bar{a}\left(\bar{d}\right)^2 m-$
$\bar{b}\left(\bar{d}\right)^2 m+8\,(\bar{a})^2\,\bar{c}\,m+6\,(\bar{a})^2\,\bar{d}\,m-\left(\bar{b}\right)^2\bar{d}\,m-2\,\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{d}\,m+4\,\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{d}\,m+$
$4\,(\bar{a})^2\,\bar{e}\,m+2\,\bar{a}\,\bar{d}\,\bar{e}\,m+(\bar{a})^3-\bar{a}\left(\bar{b}\right)^2+\bar{a}\left(\bar{d}\right)^2-\bar{b}\left(\bar{d}\right)^2+\bar{c}\left(\bar{d}\right)^2+\bar{a}\,(\bar{e})^2+4\,(\bar{a})^2\,\bar{c}+$
$\left.2\,(\bar{a})^2\,\bar{d}-\left(\bar{b}\right)^2\bar{d}-\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{d}+4\,\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{d}+2\,(\bar{a})^2\,\bar{e}+2\,\bar{a}\,\bar{d}\,\bar{e}-\bar{b}\,\bar{d}\,\bar{e}\right)\mathrm{C}_{m+1}(n)$

Schließlich erhalten wir durch Eliminierung der Vielfachen die Gleichung (3.71):

```
In[63]:= Map[Factor,
          Collect[
          1/PolynomialGCD[Coefficient[rek6, {C_m[n], C_{m+1}[n]}][[1]],
          Coefficient[rek6, {C_m[n], C_{m+1}[n]}][[2]]]rek6,
          {C_m[n], C_{m+1}[n]}]]
```

Out[63]= $(m-n)\left(2\,m\,\overline{a}+\overline{d}\right)\left(2\,m\,\overline{a}+\overline{a}+\overline{d}\right)\mathrm{C}_m(n)-$
$(m+1)\left((\overline{a})^2\,m^3-n\,(\overline{a})^2\,m^2+\overline{a}\,\overline{b}\,m^2+2\,\overline{a}\,\overline{d}\,m^2+2\,n^2\,(\overline{a})^2\,m+\left(\overline{d}\right)^2 m+n\,\overline{a}\,\overline{b}\,m-\right.$
$\left.2\,n\,\overline{a}\,\overline{d}\,m+\overline{b}\,\overline{d}\,m+\overline{a}\,\overline{e}\,m-n\left(\overline{d}\right)^2+n^2\,\overline{a}\,\overline{d}+n\,\overline{a}\,\overline{e}+\overline{d}\,\overline{e}\right)\mathrm{C}_{m+1}(n)$

□

Satz 3.22 (Darstellung der fallenden Faktoriellen)
Die fallenden Faktoriellen haben bzgl. der klassischen diskreten OPS die folgenden Darstellungen:

$$x^{\underline{n}} = \sum_{m=0}^{n} \frac{\mu^n(-n)_m}{m!} C_m(x;\mu), \tag{3.77}$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n(\gamma)_n(\frac{\mu}{\mu-1})^n(-n)_m}{(\gamma)_m m!} M_m(x;\gamma,\mu), \tag{3.78}$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n(-N)_n p^{n-m}(-n)_m}{(-N)_m} K_m(x;p,N) \tag{3.79}$$

und

$$x^{\underline{n}} = \sum_{m=0}^{n} \frac{(1+\alpha)_n(-N)_n(-1)^n}{(\alpha+\beta+2)_n} \frac{(\alpha+\beta+1+2m)}{(\alpha+\beta+1)} \frac{(-n)_m(1+\alpha+\beta)_m}{(n+2+\alpha+\beta)_m m!} Q_m(x;\alpha,\beta,N). \tag{3.80}$$

<u>Beweis:</u> Wir wissen, dass die Darstellung der fallenden Faktoriellen die Form (3.68) besitzt. Um nun $C_m(n)$ zu erhalten, betrachten wir das Termverhältnis

$$\frac{C_{m+1}(n)}{C_m(n)} = \frac{(\overline{d}+\overline{a}+2\overline{a}m)(\overline{d}+2\overline{a}m)(-n+n)}{(\overline{a}n+\overline{d}+\overline{a}m)(m+1)(\overline{a}m^2+m\overline{b}+m\overline{d}+\overline{e})}, \tag{3.81}$$

welches wir durch Umformung der Gleichung (3.71) erhalten. Wir werden exemplarisch die Darstellung der Charlierpolynome $C_m(x,\mu)$ herleiten, die anderen Polynome können auf analoge Weise bewiesen werden.
Für die Charlierpolynome gilt mit $\overline{a}=\overline{c}=0$, $\overline{b}=1$, $\overline{d}=-1$ und $\overline{e}=\mu$

$$\frac{C_{m+1}(n)}{C_m(n)} = -\frac{(m-n)}{(m+1)\mu}.$$

Mit 3.13 erhalten wir dann

$$C_m(n) = \frac{\mu^n(-n)_m}{m!}.$$

□

Satz 3.23 (Verbindungskoeffizienten der klassischen diskreten OPS)
Für die Charlierpolynome erhalten wir die folgende Verbindungsbeziehung:

$$C_n(x;\mu) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^n \frac{\nu^m}{\mu^n}(\nu-\mu)^{n-m}\frac{(-n)_m}{m!}C_m(x;\nu). \tag{3.82}$$

Folgende Verbindungsbeziehungen gelten für die Meixnerpolynome:

$$M_n(x;\gamma,\mu) = \sum_{m=0}^{n}\frac{(\gamma-\delta)_n(-n)_m}{(\delta-n+1-\gamma)_m m!}M_m(x;\delta,\mu) \tag{3.83}$$

und

$$M_n(x;\gamma,\mu) = \sum_{m=0}^{n}\left(\frac{\nu-\mu}{\mu(\nu-1)}\right)^n(\gamma)_n\frac{(-n)_m}{(\gamma)_m m!}\left(-\frac{\nu(\mu-1)}{\nu-\mu}\right)^m M_m(x;\gamma,\nu). \tag{3.84}$$

Für die Krawtchoukpolynome erhalten wir die folgenden beiden Verbindungsbeziehungen:

$$K_n(x;p,N) = \sum_{m=0}^{n}(p-q)^{n-m}\frac{(-N)_n(-n)_m(-1)^m}{n!(-N)_m}K_m(x;q,N) \tag{3.85}$$

und

$$K_n(x;p,N) = \sum_{m=0}^{n}\frac{p^{n-m}(M-N)_n(-n)_m}{n!(N-M-n+1)_m}K_m(x;p,M). \tag{3.86}$$

Letztlich erhalten wir schließlich für die Hahnpolynome die Verbindungsdarstellungen

$$Q_n(x;\alpha,\alpha,N = \frac{(\alpha+\frac{1}{2})_n(2\gamma+1)_n}{(\gamma+\frac{1}{2})_n(2\alpha+1)_n}\cdot$$

$$\sum_{k=0}^{[k/2]}\frac{(-n/2)_k(-(n-1)/2)_k(\alpha-\gamma)_k(3/4-\gamma/2-n/2)_k(-\gamma-n-1/2)_k}{(-\gamma-n/2)_k(-\gamma/2-n/2-1/4)_k(-n-\alpha+1/2)_k(-\gamma-n/2+1/2)_k k!}Q_{n-2k}(x;\gamma,\gamma,N), \tag{3.87}$$

$$Q_n(x;\alpha,\beta,N) = \sum_{m=0}^{n}\frac{(\beta-\delta)_n(-1)^n}{(2+\alpha+\delta)_n}\cdot$$

$$\frac{(\alpha+\delta+1+2m)}{(\alpha+\delta+1)}\cdot\frac{(-n)_m(1+\alpha+\delta)_m(n+1+\alpha+\beta)_m(-1)^m}{(\alpha+2+n+\delta)_m(1-\beta+\delta-n)_m m!}Q_m(x;\alpha,\delta,N) \tag{3.88}$$

und

$$Q_n(x;\alpha,\beta,N) = \sum_{m=0}^{n}\frac{(\alpha-\gamma)_n(\beta+1)_n}{(\alpha+1)_n(2+\beta+\gamma)_n)}\cdot$$

$$\frac{(\beta+\gamma+1+2m)}{(\beta+\gamma+1)}\cdot\frac{(-n)_m(1+\beta+\gamma)_m(\gamma+1)_m)(n+1+\alpha+\beta)_m(-1)^m}{(\beta+1)_m(\beta+\gamma+n+2)_m(\gamma-\alpha-n+1)_m m!}Q_m(x;\gamma,\beta,N). \tag{3.89}$$

Beweis: Gesucht sind die Verbindungskoeffizienten $C_m(n)$ der Reihe

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} C_m(n) Q_m(x) \,.$$

Wir erhalten zusammen mit

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j(n) x^{\underline{n}} \quad \text{und} \quad x^{\underline{n}} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(j) Q_m(x)$$

die Darstellung

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_j(n) B_m(j) Q_m(x) \quad .$$

Vertauschen wir die Summationsreihenfolge, so erhalten wir die Beziehung

$$C_m(n) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j(n) B_m(j) \quad .$$

Nun stellt der Summand $F(j,m,n) := A_j(n)B_m(j)$ einen hypergeometrischen Term bzgl. j, m, n dar, also können wir den Zeilbergeralgorithmus[1] anwenden und somit die gesuchte Rekursion für $C_m(n)$ bzgl. n und m herleiten. Damit erhalten wir Rekursionen erster Ordnung und somit mittels des erhaltenen hypergeometrischen Terms die gesuchte Darstellung zeigen.
Nun wollen wir exemplarisch die Darstellung für die Charlierpolynome zeigen. Dazu deklarieren wir mit Satz 3.10

$$A_j(n) := \frac{(-n)_j}{j!}$$

und mit Satz 3.22

$$B_m(j) := \frac{\mu^j (-j)_m}{m!} \quad .$$

Wir wollen den Zeilbergeralgorithmus anwenden. Dazu müssen wir zunächst das Mathematika-Package „SpecialFunctions“ laden. Nach Laden des Packages „Special Functions“ geben wir $A_j(n)$ und $B_m(j)$ ein:

In[64]:= $\mathbf{A} = \frac{\texttt{Pochhammer[-n, j]}}{\texttt{j!}} * \left(-\frac{1}{\mu}\right)^{j};$

In[65]:= $\mathbf{B} = \frac{\nu^{j} * \texttt{Pochhammer[-j, m]}}{\texttt{m!}};$

Mit Anwendung des Zeilbergeralgorithmus erhalten wir die Rekursionsgleichung:

In[66]:= **SumRekursion[A * B, j, S[m]]**

Out[66]= $(m - n)\, \nu\, S(m) - (m + 1)\, (\mu + \nu)\, S(m + 1) == 0$

Aus dieser Rekursionsgleichung erhalten wir das Termverhältnis:

$$\frac{(m-n)\nu}{(m+1)\cdot(\mu+\nu)} \quad .$$

[1] Nachzulesen in [CompAlg], S. 423ff.

Betrachten wir nun den Verbindungskoeffizienten der Charlierpolynome

```
In[67]:= Charlier = (-1)^n ν^m/μ^n * (ν - μ)^(n-m) * Pochhammer[-n, m]/m!
```

$$\text{Out[67]=}\ \frac{(-1)^n\,\mu^{-n}\,\nu^m\,(\nu-\mu)^{n-m}\,(-n)_m}{m!}$$

und bilden das Termverhältnis

```
In[68]:= (Charlier/.m → m + 1)/Charlier //FullSimplify
```

$$\text{Out[68]=}\ \frac{(m-n)\,\nu}{(m+1)\,(\nu-\mu)}$$

so können wir erkennen, dass die Termverhältnisse gleich sind.

Auf ähnliche Weise können auch die Verbindungskoeffizienten hergeleitet werden. □

3.9 Erzeugende Funktion

In diesem Abschnitt wollen wir erzeugende Funktionen für die klassischen diskreten OPS betrachten. Die erzeugende Funktion der Polynomfamlien definiert sich durch die Potenzreihe

$$F(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(x)}{k!} z^k \tag{3.90}$$

deren Koeffizienten die Polynome der klassischen diskreten OPS sind. Mittels der Dreitermrekursion für das Polynom $P_n(x)$ lässt sich dann eine Differenzengleichung für $F(z)$ finden. Löst man diese, so erhält man die erzeugende Funktion $F(z)$.

Wir wollen nun die erzeugenden Funktionen der einzelnen Polynomfamilien kennenlernen.

Meixnerpolynome $M_n(x;\gamma,\mu)$:
Um die erzeugende Funktion für die Meixnerpolynome zu erhalten, betrachten wir die Gleichung (3.90)

$$F(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k(x;\gamma,\mu)}{k!} z^k,$$

wobei wir aus (3.44) für $M_k(x;\gamma,\mu)$ mit (3.37) die Darstellung

$$M_k(x;\gamma,\mu) = {}_2F_1\left(\begin{array}{c} -k,-x \\ \\ \gamma \end{array}\middle|\, 1-\tfrac{1}{\mu}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-k)_j(-x)_j}{(\gamma)_j}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^j}{j!}$$

erhalten. Unsere erzeugende Funktion $F(z)$ hat also die Form

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-k)_j(-x)_j}{(\gamma)_j}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^j}{j!}\cdot\frac{z^k}{k!}\,. \tag{3.91}$$

Um diese Formel auflösen zu können, wenden wir den so genannten Fasenmyeralgorithmus[2] an.

```
In[69]:= term = Pochhammer[-k, j] * Pochhammer[-x, j] / Pochhammer[γ, j] *
             (1 - 1/μ)^j / j! * z^k / k!
```

Out[69]= $\dfrac{z^k \left(1-\frac{1}{\mu}\right)^j (-k)_j\,(-x)_j}{j!\,k!\,(\gamma)_j}$

```
In[70]:= FasenmyerRE[term, {k, 1}, {j, 1}]
```

Out[70]= $(j-x)\,z\,(\mu-1)\,S(j)+(j+1)\,(j+\gamma)\,\mu\,S(j+1)==0$

Wir erhalten also für S_j das Termverhältnis

$$\frac{S_{j+1}}{S_j}=-\frac{(j-x)z(\mu-1)}{(j+1)(j+\gamma)\mu} \tag{3.92}$$

und somit reduziert sich (3.91) auf

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-x)_j}{(\gamma)_j\,j!}\cdot\left((1-\frac{1}{\mu})z\right)^j \\ &= {}_1F_1\left(\begin{array}{c|c} -x & \\ & \left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)z \\ \gamma & \end{array}\right). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir insgesamt

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{M_n(x;\gamma,\mu)}{k!}z^k=e^z\cdot{}_1F_1\left(\begin{array}{c|c} -x & \\ & \left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)z \\ \gamma & \end{array}\right), \tag{3.93}$$

wobei e^z ein historisch gegebener Standardisierungsfaktor darstellt.

Analog erhalten wir für die Charlierpolynome und die Krawtchoukpolynome die erzeugene Funktion. **Charlierpolynome $C_n(x;\mu)$:**
Für die erzeugende Funktion der Charlierpolynome gilt die folgende Beziehung

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(x;\mu)}{k!}\cdot z^k=e^z(1-\frac{t}{\mu})^x. \tag{3.94}$$

Krawtchoukpolynome $K_n(x;p,N)$:
Für die Krawtchoukpolynome erhalten wir für die erzeugenden Funktion

$$F(z)=\sum_{k=0}^{N}\frac{K_n(x;p,N)}{k!}z^k=\left[e^z\cdot{}_1F_1\left(\begin{array}{c|c} -x & \\ & \frac{-z}{p} \\ -N & \end{array}\right)\right]_N. \tag{3.95}$$

[2]Kann auf S. 395 von [CompAlg] nachgelesen werden.

3.10 OPS als Lösungen holonomer Rekursionsgleichungen

Wir wollen zum Abschluss nun noch einen Algorithmus kennen lernen, der uns umgekehrt aus einer holonomen Dreitermrekursion ein klassisches diskretes OPS liefert, sofern es existiert.

Satz 3.24 (Algorithmus)
Der folgende Algorithmus entscheidet, ob eine gegebene holonome Dreitermrekursion ein klassisches diskretes OPS als Lösung hat und gibt die Daten der Lösung zurück.

1. ***Eingabe:*** *eine holonome Dreitermrekursion*

$$q_n(x)P_{n+2}(x) + r_nP_{n+1}(x) + s_nP_n(x) = 0 \tag{3.96}$$

2. ***Verschiebung:*** *Verschiebe den Index um*

$$\max\{n \in \mathbb{N}_{\geq 0} | n \textit{ ist eine Nullstelle von } q_{n-1}(x) \textit{ oder } s_n(x)\} + 1\} , \tag{3.97}$$

falls notwendig.

3. ***Umschreiben:*** *Man bringt die Rekursionsgleichung in folgende Form*

$$P_{n+1}(x) = t_n(x)P_n(x) + u_nP_{n-1}(x) \quad (t_n(x), u_n(x) \in \mathbb{Q}(n, x)) .$$

Ist nun $t_n(x)$ kein Polynom vom Grd 1 in x oder ist $u_n(x)$ bzgl. x nicht konstant, so gibt es keine klassische diskrete OPS-Lösung. (Beende den Algorithmus.)

4. ***Lineare Transformation:*** *Wir schreiben die Rekursionsgleichung unter der linearen Transformation $x \mapsto \frac{x-g}{f}$ mit unbestimmten Konstanten f und g auf.*

5. ***Standardisierung:*** *Seien A_n, B_n und C_n gegeben durch*

$$P_{n+1}(x) = (A_nx + B_n)P_n(x) - C_nP_{n-1}(x) \quad (A_n, B_n, C_n \in \mathbb{Q}(n), A_n \neq 0). \tag{3.98}$$

Dann definiert man $v_n, w_n \in \mathbb{Q}[n]$ mit $ggt(v_n, w_n) = 1$ gemäß

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} = A_n = \frac{v_n}{w_n}.$$

6. ***Normalisierung:*** *Setze*

$$\tilde{B}_n := \frac{B_n}{A_n} \in \mathbb{Q}(n) \quad \textit{und} \quad \tilde{C}_n := \frac{C_n}{A_nA_{n-1}} \in \mathbb{Q}(n).$$

Nun kürzt man diese rationalen Funktionen. Ist der Grad vom Zähler oder Nenner von $\tilde{B}_n$ größer als 2 oder ist der Grad vom Zähler oder Nenner von $\tilde{C}_n$ größer als 4, so existiert keine klassische diskrete OPS-Lösung. (Beende den Algorithmus.)

7. ***Polynomidentitäten:*** *Setze*

$$\tilde{B}_n = \frac{n(d+2b)(d+an-a)+e(d-2a)}{(2an-2a+d)(d+2an)}$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{C}_n \;=\; & -((n-1)(d+an-a)(and-db-ad+a^2n^2-2a^2n+4ca+a^2+2ea-b^2) \\ & -dbe+d^2c+ae^2)\cdot\frac{(an+d-2a)n)}{(d-a+2an)(d+2an-3a)(2an-2a+d)^2}.\end{aligned}$$

Dabei sind a, b, c, d und e noch unbestimmt. Diese Identitäten werden durch Multiplikation mit dem Hauptnenner in Polynomform gebracht.

8. ***Koeffizientenvergleich:*** *Vergleicht man die Koeffizienten der Potenzen von n in den beiden Gleichungen, so liefert dies ein nicht-lineares Gleichungssystem in den Unbestimmten a, b, c, d, e, f und g.*
Gibt es keine Lösung oder nur eine Lösung mit $d = 0$ des Gleichungssystems, so existiert keine klassische diskrete OPS-Lösung. (Beende den Algorithmus.)

9. ***Ausgabe:*** *Gib das klassische diskrete OPS aus, das der sich ergebenden Differenzengleichung (3.10) gemäß der Tabellen 1 und 2 entspricht.*

Beweis:

Es sei eine Rekursion der Form (3.96) gegeben. Angenommen, weder $q_{n-1}(x)$ noch $s_n(x)$ besitzen nicht-negative ganzzahlige Nullstellen bzgl. n, da andernfalls diese Rekursionsgleichung nicht dazu benutzt werden kann, $P_n(x)$ iterativ beginnend mit $P_0(x)$ (und $P_{-1}(x) \equiv= 0$) für alle $n \geq -1$ zu berechnen oder wertlos in der Rückwärtsrichtung ist. Man setzt nun

$$N := \begin{cases} 0, & \text{falls } q_{n-1}(x) \text{ und } s_n(x) \text{ keine nicht-negative Nullstelle besitzt} \\ \max\{n \in \mathbb{N}_{\geq 0} | n \text{ ist eine Nullstelle von } q_{n-1}(x) \text{ oder } s_n(x)\} + 1, & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.99}$$

Nun betrachtet man $p_n(x) := P_{n+N}(x)$ statt $P_n(x)$. (Man substituiert also an dieser Stelle in (3.96) $n \mapsto n + N$ und ersetzt $P_n(x)$ durch $p_{n-N}(x)$.)
Der Einfachheithalber nimmt man aber hier für den Beweis an, dass die Rekursion (3.96) mit
$q_n(x), r_n(x), s_n(x) \in \mathbb{Q}[n, x]$ erfüllt ist.
Es ist eine Lösung der Form (2.8)

$$P_n(x) = k_n x^n + k'_n x^{n-1} + \ldots \qquad (n \in \mathbb{N}_{\geq 0}, k_n \neq 0)$$

gesucht. Dazu dividiert man (3.96) durch $q_n(x)$ und ersetzt n durch $n - 1$. Man erhält also eine Rekursionsgleichung der Form

$$P_{n+1}(x) = t_n(x)P_n(x) + u_n(x)P_{n-1}(x) \quad (t_n(x), u_n(x) \in \mathbb{Q}(n, x)). \tag{3.100}$$

Es existiert aber wegen Satz 2.6 für jede linear transformierte Familie $P_n(x)$ eines klassischen diskreten OPS eine Rekursionsgleichung der Form (2.10)

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x) \quad (A_n, B_n, C_n \in \mathbb{Q}(n), A_n \neq 0). \tag{3.101}$$

Somit müssen (3.100) und (3.101) übereinstimmem. Da $P_n(x)/P_{n-1}(x) \notin \mathbb{Q}(n,x)$ liegt, kann man folgern, dass $t_n(x) = A_n x + B_n$ und $u_n(x) = -C_n$ gilt. Dies zeigt den 3. Teil des Satzes.
Es sind nun aber Lösungen der Form (2.8) gesucht. Koeffizientenvergleich in (3.101) nach x^{n+1} liefert dazu

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} = A_n = \frac{v_n}{w_n}, \tag{3.102}$$

wobei $v_n, w_n \in \mathbb{Q}[n]$ gilt. Das gegebene $A_n = \frac{v_n}{w_n} \in \mathbb{Q}(n)$ erzeugt also ein Termverhältnis $\frac{k_{n+1}}{k_n}$. Desweiteren liefert uns (3.102) ein hypergeometrischen Term k_n, der bis auf Nomierungskonstante $k_0 = P_0(x)$ eindeutig gegeben ist. Zudem stellt (3.102) sicher, dass k_n für alle $n \in \mathbb{N}$ aus k_0 gegeben sind, da die Nullstellen von w_n eine Teilmenge der Nullstellen von $q_{n-1}(x)$ darstellen.
Indem wir nun eine Rekursionsgleichung für das zugehörige monische OPS $\tilde{P}_n(x) = \frac{P_n(x)}{k_n}$ erzeugen, wird die Abhängigkeit von k_n eliminiert. Für $\tilde{P}_n(x)$ erhalten wir also aus (3.102) die Gleichung

$$\tilde{P}_{n+1}(x) = \left(x + \frac{B_n}{A_n}\right)\tilde{P}_n(x) - \frac{C_n}{A_n A_{n-1}}\tilde{P}_{n-1}(x) = \left(x + \tilde{B}_n\right)\tilde{P}_n(x) - \tilde{C}_n\tilde{P}_{n-1}(x), \tag{3.103}$$

wobei also

$$\tilde{B}_n = \frac{B_n}{A_n} \in \mathbb{Q}(n) \quad \text{und} \quad \tilde{C}_n = \frac{C_n}{A_n A_{n-1}} \in \mathbb{Q}(n).$$

Aus Satz 3.11 erhalten wir also für $\tilde{B}_n$ und $\tilde{C}_n$

$$\tilde{B}_n = \frac{2bn(a(n-1)+d) + e(d-2a)}{(2a(n-1)+d)(2an+d}\tag{3.104}$$

und

$$\tilde{C}_n = \frac{-n(a(n-2)+d)}{(a(2n-1)+d)(a(2n-3)+d)}\left(c + \frac{b(n-1)+e}{(2a(n-1)+d)^2}\left((ae-bd)\,ab(n-1)\right)\right). \tag{3.105}$$

Diese sind unabhängig von k_n, was den 5. und 6. Teil des Satzes beweist.
In den Schritten 7 und 8 des Satzes werden nur arithmetische Umformungen gemacht. Hier bleibt nichts zu beweisen. □

Beispiel 2
Wir betrachten die Rekursionsgleichung

$$p_{n+2}(x) - (x-n-1)p_{n+1}(x) + \alpha(n+1)^2 p_n(x) = 0, \tag{3.106}$$

welche von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängt. Gesucht ist eine klassische diskrete OPS-Lösung.

2. *Wir betrachten die Nullstellen von $q_{n-1}(x) = 1$ und $s_n(x) = \alpha(n+1)^2$. Da beide keine reellen Nullstellen in x haben, setzen wir $N = 1$ und somit müssen wir keine Indexverschiebung durchführen.*

3. Durch Umschreibung der Rekursionsgleichung (3.106) erhalten wir
$$P_{n+1}(x) = (x-n)P_n(x) + \alpha n^2 P_{n-1}(x). \tag{3.107}$$
4. Wir erhalten durch die lineare Transformation $x \mapsto \frac{x-g}{f}$ von (3.107) die Gleichung
$$P_{n+1}\left(\frac{x-g}{f}\right) = \left(\frac{x-g}{f} - n\right)P_n\left(\frac{x-g}{f}\right) - \alpha n^2 P_{n-1}\left(\frac{x-g}{f}\right). \tag{3.108}$$
5. Durch Umformung erhalten wir die Standardisierung
$$P_{n+1}\left(\frac{x-g}{f}\right) = \left(\frac{1}{f}\cdot x - \left(\frac{g}{f} + n\right)\right)P_n\left(\frac{x-g}{f}\right) - \alpha n^2 P_{n-1}\left(\frac{x-g}{f}\right), \tag{3.109}$$
wobei also gilt: $A_n = \frac{1}{f}$, $B_n = -\left(\frac{g}{f} + n\right)$ und $C_n = \alpha n^2$.
6. Durch Normalisierung erhalten wir
$$\tilde{B}_n = \frac{B_n}{A_n} = \frac{-(\frac{g}{f} + n)}{\frac{1}{f}} = -g - fn \tag{3.110}$$
und
$$\tilde{C}_n = \frac{C_n}{A_n A_{n-1}} = \frac{\alpha n^2}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{f}} = f^2 \cdot \alpha n^2. \tag{3.111}$$
7. Wir setzen zudem $\tilde{B}_n$ und $\tilde{C}_n$ wie im Schritt 7 des Algorithmus 3.24.
8. Nun müssen wir Koeffizientenvergleich der Potenzen von n der Gleichungen machen und erhalten ein nicht-lineares System in den Variablen $\{a, b, c, d, e, f, g, \alpha\}$, welches die Lösung
$$\left\{a = 0, b = b, c = -\frac{b(-e+d+b)}{d}, d = d, e = e, f = -\frac{d+2b}{d}, g = -\frac{e}{d},\right.$$
$$\left.\alpha = \frac{b(d+b)}{(d+2b)^2}\right\}$$
besitzt. Nun möchten wir aber α als beliebig voraussetzen, also lösen wir die letzte Gleichung nach b auf und erhalten
$$b = -\frac{d}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-4\alpha}}\right).$$
Anschließendes Einsetzen in die oben erhaltene Lösung liefert uns
$$\left\{a = 0, b = -\frac{d}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-4\alpha}}\right), c = \frac{4\alpha e - e - 2\alpha d}{2(1-4\alpha)} \pm \frac{e}{2}\frac{1}{\sqrt{1-4\alpha}},\right.$$
$$\left. f = \mp\frac{1}{\sqrt{(1-4\alpha)}}, g = -\frac{e}{d}\right\}$$
9. Wir stellen schließlich fest, dass unsere holonome Dreitermrekursion für $1-4\alpha > 0$, also genau $\alpha < \frac{1}{4}$ Lösungen für Meixner- bzw. Krawtchoukpolynome liefert.

Literatur

[ClassOrth] Nikiforov, A. F., Suslov, Uvarov, S. K.,V. B.: *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.

[CompAlg] Koepf, W.: *Computeralgebra. Eine algorithmisch orientierte Einführung*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2006.

[COP] Koepf, W.: *Computeralgebra und orthogonale Polynome.* Universität Kassel. Wintersemester 2005/2006.

[HypSum] Koepf, W.: *Hypergeometric Summation.*Vieweg. Braunschweig / Wiesbaden, 1998.

[Ask] R. Koekoek, R.F. Swarttouw: *The Askey-Scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*

[Les] Lesky, P.: *Über Polynomlösungen von Differentialgleichungen und Differenzengleichungen zweiter Ordnung*. Anzeiger der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, math.-naturwiss. Klasse 121, 1985, 29-33.

[Rai] Earl D. Rainville, Ph D.: *Special Functions*. Chelsea Publishing Company. Bronx, New York, 1971.

[Rep] Koepf, W., Schmersau, D.: *Representations of orthogonal polynomials*. Journal of Computational and Applied Mathematics 90, 1998, 57-94.

[SpecFunc] Nikiforov, A. F., Uvarov, V. B.: *Special Functions of Mathematical Physics*. Birkhäuser, Basel-Boston, 1988.

[Tab] Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühling: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2005, 2006.

[Tri] Tricomi,F. G.: *Vorlesungen über Orthogonalreihen.* Springer, Berlin/ Göttingen/Heidelberg, 1955.

[BAC] Meisrimel, M.: *Klassische orthogonale Polynome*. Bachelorarbeit, Universität Kassel. Juni 2008.

[Stoch1] Henze, N.: *Stochastik für Einsteiger - Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 2006.

[Stoch2] Fischer, G.: *Stochastik einmal anders*. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 2005.

[Stoch3] Krengel, U.: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 2005.

Ich versichere hiermit, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Kirsten Wiesner