Bieberbachsche Vermutung und Algorithmen der Computeralgebra – Eine Geschichte des 20. Jahrhunderts

Prof. Dr. Wolfram Koepf

Fachbereich Mathematik/Informatik

Universität Kassel

koepf@mathematik.uni-kassel.de

http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf

Schlichte Funktionen

- Sei

$$S := \{f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \text{ analytisch und injektiv}\}.$$

- Zu jedem einfach-zusammenhängenden Gebiet $G \neq \mathbb{C}$ gibt es wegen des Riemannschen Abbildungssatzes eine schlichte Funktion $f \in S$ mit einem zu G ähnlichen Bildgebiet.

Kompaktheit von S

- Riemann hatte den Abbildungssatz bereits 1851 formuliert, aber sein Beweis war noch unvollständig. Koebe bewies um 1909 den Abbildungssatz. Außerdem zeigte er, dass S bzgl. der Topologie der lokal-gleichmäßigen Konvergenz kompakt ist.
- Da a_n ein stetiges Funktional ist, existiert also

$$k_n := \max \{|a_n(f)| \mid f \in S\}.$$

Bieberbachsche Vermutung

- Bieberbach bewies 1916 in seinem Artikel
  - Über die Potenzen derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. Semesterberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 38, 940-955

  die Beziehung $k_2 = 2$, und in einer Fußnote schrieb er:
  - Vielleicht ist überhaupt $k_n = n$.
- Dies war also die Bieberbachsche Vermutung.

B 2 3 3

Prof. Dr. Hecke

Überreicht vom Verfasser.

SITZUNGSBERICHTE

1916.

XXXVIII.

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Gesamtsitzung vom 20. Juli.
Mitteilung vom 6. Juli.

Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln.

Von Prof. Dr. Ludwig Bieberbach
in Frankfurt a. M.

haben damit nicht nur unseren Satz IV bewiesen, sondern darüber hinaus auch erkannt, daß die Zahl r_2 des Satzes IV die 2 ist, und daß für a_2 auch wirklich alle Werte dieses Kreises $|a_2| \leq 2$ vorkommen. Wenn es mir auch nicht gelungen ist, für die andern Koeffizienten ein ähnlich abschließendes Resultat zu erreichen, so möchte ich doch noch zeigen, daß *auch der Wertevorrat jedes andern Koeffizienten gerade einen Kreis erfüllt.* Das folgt einfach daraus, daß für $|k| \leq 1$ mit $f(z)$ stets auch $\frac{1}{k} f(kz)$ für $|z| < 1$ regulär und schlicht ist. Der $n$te Koeffizient dieser Funktion ist aber $a_n k^{n-1}$. Ist also $a_n^{(0)}$ $n$ter Koeffizient einer schlichten Abbildung, so auch alle a_n aus dem Kreis $|a_n| \leq |a_n^{(0)}|$. Darin liegt bekanntermaßen unsere Behauptung[1]. Man muß sich indessen hüten, dies Resultat in zu starkem Maße umzukehren. Es bildet ganz und gar nicht jede Funktion schlicht ab, deren Koeffizienten den gefundenen Kreisen angehören. Z. B. bildet schon die Funktion $w = z + 2z^2$ den Kreis $|z| \leq 1$ nicht auf einen schlichten Bereich ab, denn wir haben gesehen, daß $\sum n z^n$ die einzige schlicht abbildende Funktion mit $a_2 = 2$ ist[2].

Wir ziehen noch eine Folgerung aus diesen Betrachtungen:

Satz V. Wenn $|z| > 1$ durch $w = F(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \cdots$ schlicht abgebildet wird, so liegen alle Randpunkte des Bildbereiches im Kreise $|w| \leq 2$, und es finden sich auf diesem Kreise nur dann Randpunkte des Bildbereiches, wenn es sich um die durch die Funktion $F(z) = z + \frac{1}{z}$ vermittelte Abbildung von $|z| > 1$ auf die von -1 bis $+1$ aufgeschlitzte Ebene handelt, oder wenn die Abbildungsfunktionen $\frac{1}{e^{i\varphi}} F(e^{i\varphi} z)$ vorliegen, die gleichfalls auf Schlitzbereiche abbilden, welche aus den eben genannten durch Drehung hervorgehen[3,4].

[1] Daß $k_n \geq n$ zeigt das Beispiel $\sum n z^n$. Vielleicht ist überhaupt $k_n = n$.

[2] Die hier gefundene Tatsache, daß 2 die genaue Schranke für $|a_2|$ ist, erlaubt es, gewisse Untersuchungen über den Koebeschen Verzerrungssatz zu Ende zu führen, welche schon Hr. Plemelj auf der Wiener Naturforscherversammlung vorgetragen hat, und die unabhängig davon kürzlich Hr. Pick angestellt und (Leipz. Ber. 1916) veröffentlicht hat.

[3] Man vgl. zu diesem Satz einen von Koebe, Göttinger Nachrichten 1908, S. 348. Der hier bewiesene Satz V liefert zugleich den Koebeschen und zeigt, daß der genaue Wert der Konstanten, deren Existenz dort bewiesen ist, die 4 ist, und daß diese Konstante nur bei Schlitzabbildungen erreicht wird.

[4] Der Satz ist ferner nahe verwandt mit dem Satz I, den ich auf S. 153 von Bd. 77 der Math. Ann. aufgestellt habe, besagt aber ersichtlich noch etwas mehr als dieser.

Woher kommt die Vermutung?

- Bieberbach zeigte außerdem, dass für $n = 2$ im Wesentlichen nur die Koebefunktion

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^n,$$

welche die Einheitskreisscheibe auf ein Gebiet mit geradlinigem Schlitz abbildet, eine Lösung des Koeffizientenproblems ist. Er vermutete also, dass dasselbe auch für $n > 2$ gilt.

Die Löwner-Methode

- Löwner hatte 1923 die Idee, schlichte Funktionen zu parametrisieren. Er zeigte, dass es zu jeder Funktion $f \in S$ eine Familie $\{f(z,t) \mid t \geq 0\}$ mit

$$f(z,t) = e^t z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) z^n \ ,$$

gibt, deren Anfangsterm $f(z,0) = f(z)$ ist und die der Löwnerschen Differentialgleichung genügt.

Die Löwnersche Differentialgleichung

- Dies ist die Gleichung $\operatorname{Re} p(z,t) > 0$, wobei

$$p(z,t) = \frac{\dot{f}(z,t)}{z\, f'(z,t)}.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass die Bildgebiete $f(\mathbb{D}_r,t)$ für alle $r \leq 1$ mit wachsendem t wachsen. Löwner bewies mit dieser Methode $k_3 = 3$.

Logarithmische Koeffizienten

- Es zeigte sich, dass es sehr schwer war, Aussagen über die Koeffizienten $a_n(f)$ schlichter Funktionen zu gewinnen.
- Leichter schien es, Aussagen über die Koeffizienten $d_n(f)$ der Funktion

$$\varphi(z) = \ln \frac{f(z)}{z} =: \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n$$

zu gewinnen. Diese heißen die logarithmischen Koeffizienten von f.

Die Milinsche Vermutung

- Lebedev und Milin zeigten 1965 durch Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, dass aus der Ungleichung
$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left(k|d_k|^2-\frac{4}{k}\right)\leq 0$$
für ein $n \in \mathbb{N}$ die Bieberbachsche Vermutung für den Index $n+1$ folgt. Dies war die Milinsche Vermutung.

Der Satz von de Branges

- Im Jahr 1984 bewies Louis de Branges die Milinsche und damit die Bieberbachsche Vermutung für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Lenard Weinstein gab 1991 einen vollständig unabhängigen Beweis der Milinschen Vermutung.
- Es zeigt sich aber, dass die beiden Beweise doch eng miteinander zusammenhängen.

Beweis von de Branges

- de Branges betrachtete die Funktion

$$\psi(t) := \sum_{k=1}^{n} \tau_{kn}(t)\left(k\left|d_k(t)\right|^2 - \frac{4}{k} \right).$$

Durch Anwendung der Löwnertheorie konnte er zeigen, dass für geeignet gewählte Funktionen $\tau_{kn}(t)$ die Beziehung $\dot{\psi}(t) \geq 0$ und damit $\psi(0) = -\int_0^\infty \dot{\psi}(t)\, dt \leq 0$, also die Milinsche Vermutung gilt.

Die de Branges-Funktionen

- Das von de Branges gewählte Funktionen-system $\tau_{kn}(t)$, $k = 0,\ldots,n$ wird erklärt durch das gekoppelte Differentialgleichungs-system

$$\tau_{kn}(t) - \tau_{(k+1)n}(t) = -\frac{1}{k}\dot{\tau}_{kn}(t) - \frac{1}{k+1}\dot{\tau}_{(k+1)n}(t)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\tau_{kn}(0) = n + 1 - k\,.$$

Eigenschaften der de Branges-Funktionen

- Hierdurch ist das Funktionensystem $\tau_{kn}(t)$ bereits eindeutig festgelegt. Damit der Beweis von de Branges funktioniert, müssen allerdings zusätzlich gelten:

$$\lim_{t\to\infty} \tau_{kn}(t) = 0$$

sowie

$$\dot{\tau}_{kn}(t) \leq 0\,.$$

Die Askey-Gasper-Ungleichung

- Während der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} \tau_{kn}(t) = 0$ leicht bestimmt werden kann, konnte de Branges die Beziehung $\dot{\tau}_{kn}(t) \leq 0$ nicht beweisen. Es stellte sich heraus, dass dies eine kurz vorher, nämlich 1976, von Askey und Gasper bewiesene Ungleichung war. Hierfür benötigte de Branges eine explizite Darstellung der Funktionen $\tau_{kn}(t)$.

Der Beweis von Weinstein

- Im Jahr 1991 gelang Weinstein ein völlig anderer Beweis der Milinschen Vermutung.
- Während de Branges immer ein $n \in \mathbb{N}$ fest-hält, betrachtet Weinstein die Vermutung für alle $n \in \mathbb{N}$ gleichzeitig.
- Für den Beweis von Weinstein benötigt man die folgende Löwnerkette der Koebe-funktion.

Löwnerkette der Koebefunktion

- Diese Funktionenschar ist gegeben durch

$$w(z,t) := K^{-1}(e^{-t}K(z)).$$

Das Bildgebiet dieser Funktionen ist die Einheitskreisscheibe mit einem radialen Schlitz ist, welcher mit wachsendem $t > 0$ ebenfalls wächst. Vorführung

Weinsteins Beweis

- Weinstein berechnet nun die erzeugende Funktion des Milinschen Ausdrucks:

$$M(z) := \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left(\frac{4}{k}-k|d_k(0)|^2\right)\right)z^{n+1}$$

$$= \frac{z}{(1-z)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{k}-k|d_k(0)|^2\right)z^k$$

$$= -\int_0^{\infty}\frac{e^t w(z,t)}{(1-w(z,t))^2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{k}-k|d_k(t)|^2\right)w(z,t)^k\right)dt\,.$$

Weinsteins Rechnung

- Mit der Löwnerschen Differentialgleichung zeigt Weinstein dann, dass sich für die erzeugende Funktion $M(z)$ die Gleichung

$$M(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_{kn}(t)A_k(t)dt\right)z^{n+1}$$

ergibt, wobei $A_k(t)\geq 0$ und

$$\frac{e^t w(z,t)^{k+1}}{1-w(z,t)^2}=:\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_{kn}(t)z^{n+1}\ .$$

Beweisschluss

- Die Milinsche Vermutung ist also richtig, wenn für die Koeffizienten der Funktion

$$W_k(z,t) := \frac{e^t w(z,t)^{k+1}}{1 - w(z,t)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{kn}(t) z^{n+1}$$

gilt: $\Lambda_{kn}(t) \geq 0$.

- Dies zeigt Weinstein mithilfe einer weiteren geschickten Umformung sowie dem Additionstheorem der Legendrepolynome (1893).

de Branges versus Weinstein

- Es wurde die Frage nach der Identifizierung der Funktionen $\Lambda_{kn}(t)$ gestellt.
- Todorov (1992) und Wilf (1994) bewiesen den überraschenden Zusammenhang

$$\dot{\tau}_{kn}(t) = -k\Lambda_{kn}(t)\,.$$

Dies zeigt, dass die de Branges - Funktionen und die Weinsteinfunktionen im Prinzip übereinstimmen.

Erzeugende Funktion der de Branges-Funktionen

- Wie stark die de Branges-Funktionen mit der Koebefunktion in Beziehung stehen, zeigt ihre erzeugende Funktion bzgl. n [Koepf, Schmersau 1996]: Vorführung

$$B_k(z,t) := \sum_{n=k}^{\infty} \tau_{kn}(t)\, z^{n+1} = K(z)\, w(z,t)^k$$

$$= \sum_{j=k}^{\infty} (-1)^{j+k} \frac{2k}{j+k} \binom{2j-1}{j-k} K(z)^{j+1} e^{-jt}$$

$$= K(z)^{k+1} e^{-kt}\, {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} k, k+1/2 \\ 2k+1 \end{matrix}\right| -4K(z)e^{-t}\right).$$

Hypergeometrische Funktionen

- Die Potenzreihe

$$ {}_pF_q\left(\left.\begin{matrix} a_1,\cdots,a_p \\ b_1,\cdots,b_q \end{matrix}\right| x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k , $$

deren Koeffizienten a_k ein rationales Term-verhältnis haben

$$ \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+a_1)\cdots(k+a_p)}{(k+b_1)\cdots(k+b_q)} \cdot \frac{x}{k+1} $$

heißt verallgemeinerte hypergeometrische Funktion.

Koeffizienten hypergeometrischer Funktionen

- Für die Koeffizienten der hypergeometrischen Funktion erhält man die Formel

  $$ {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1,\cdots,a_p \\ b_1,\cdots,b_q \end{matrix}\middle| x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{x^k}{k!}, $$

  wobei $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k\text{-}1)$ als Pochhammersymbol (engl: shifted factorial) bezeichnet wird.

Beispiele hypergeometrischer Funktionen

$$e^x = {}_0F_0(x)$$

$$\sin x = x \cdot {}_0F_1\left(\left.\begin{matrix} - \\ 3/2 \end{matrix}\right| -\frac{x^2}{4}\right)$$

Weitere Beispiele: cos(x), arcsin(x), arctan(x), ln(1+x), erf(x), ..., aber beispielsweise nicht tan(x), ...

Bestimmung von Potenzreihen

- In der Arbeit
  - Koepf, Wolfram: Power Series in Computer Algebra, Journal of Symbolic Computation 13, 1992, 581-603

  wurde ein Algorithmus zur Bestimmung der Koeffizienten hypergeometrischer Potenzreihen vorgestellt.
- Vorführung mit Maple

Explizite Darstellung der Weinstein-Funktionen

- Auch die Weinstein-Funktionen $\Lambda_{kn}(t)$ erweisen sich als hypergeometrisch:

$$\Lambda_{kn}(t) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{k+j} \binom{2j}{j-k} \binom{n+j+1}{n-j} e^{-jt}$$

$$= e^{-kt} \binom{n+k+1}{n-k} {}_3F_2\left(\left. \begin{matrix} k+1/2, n+k+2, -n+k \\ k+3/2, 2k+1 \end{matrix} \right| e^{-t} \right).$$

- Den Beweis dieser Darstellung führen wir ebenfalls automatisch.

Darstellung der Weinstein-Funktionen

- Hierzu setzen wir wieder $x{:=}\mathrm{e}^{-t}$ und bestimmen die Doppelreihe

$$W_k(z,x)=\frac{x^{-1}w(z,x)^{k+1}}{1-w(z,x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{jn}(k)x^j z^{n+1}\ ,$$

so dass

$$\Lambda_{kn}(x)=\sum_{j=k}^{\infty}a_{jn}(k)x^j=x^k\binom{n+k+1}{n-k}\,{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}k+1/2,n+k+2,-n+k\\ k+3/2,2k+1\end{matrix}\right|x\right).$$

Weitere Algorithmen

- Weitere Algorithmen zur Arbeit mit hypergeometrischen Funktionen und Implementierungen in Maple findet man in
  - Koepf, Wolfram: Hypergeometric Summation, Vieweg, 1998.
- Insbesondere kann man automatisch Rekursions- und Differentialgleichungen hypergeometrischer Funktionen bestimmen.

Wolfram Koepf

vieweg

Hypergeometric Summation

An Algorithmic Approach to Summation and Special Function Identities

Advanced Lectures in Mathematics

Zusammenfassung

- Die Milinsche und damit die Bieberbach-sche Vermutung (1916-1984) lässt sich also durch geschickte Rechnungen beweisen, wenn man die Löwnerkette der Koebefunktion genauer untersucht.
- Durch Algorithmen der Computeralgebra (ab 1978) lassen sich viele dieser Rechnungen automatisieren.