KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker/Mechatroniker

23.3.2011

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 6 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 15 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Die Differenzialgleichung:

$$y' = a(x)\, y + b(x)$$

besitzt die Lösungen $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = e^x$.
Wie lautet die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung?
Bestimmen Sie $a(x)$ und $b(x)$.

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung:

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = (x+1)\,e^x\,.$$

Verwenden Sie die Ansatzmethode zur Bestimmung einer partikulären Lösung.

3. Gegeben ist das Differenzialgleichungssystem:

$$Y'(x) = A\,Y\,, \quad A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\,.$$

Berechnen Sie ein Fundamentalsystem.

4. Gegeben ist die Funktion:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

Welche Bilder entstehen, wenn man die Kurven $\arg(z) = \phi_0$ unter f abbildet?

5. Gegeben ist erneut die Funktion:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int\limits_{|z|=r_0} f(z)\,dz$. Entwickeln Sie die Funktion $f(z)$ in eine Taylorreihe um $z_0 = 1$.

Lösungen

1.) Die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Gleichung ergibt eine Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_1(x) - y_2(x) = x - e^x \, .$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet:

$$c\,(x - e^x)$$

mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet:

$$y(x) = c\,(x - e^x) + x \, .$$

Einsetzen von $y_1(x)$ und $y_2(x)$ in die inhomogene Gleichung ergibt:

$$y_1'(x) = 1 = a(x)\,x + b(x) \, ,$$

$$y_2'(x) = e^x = a(x)\,e^x + b(x) \, .$$

Damit bekommen wir:

$$a(x) = \frac{1 - e^x}{x - e^x} \, , \quad b(x) = 1 - a(x)\,x \, .$$

2.) Das charakteristische Polynom (der homogenen Gleichung) lautet:

$$\lambda^2 - 3\,\lambda + 2 = 0$$

mit den Nullstellen $\lambda = 1, 2$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet:

$$y_h(x) = c_1\,e^x + c_2\,e^x \, .$$

Nach der Ansatzmethode gibt es eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung der Gestalt:

$$y_p(x) = x\,(a\,x + b)\,e^{2\,x} \, .$$

Wir bekommen:

$$y_p'(x) = (a\,x^2 + (2\,a + b)\,x + b)\,e^{2\,x} \, ,$$

$$y_p''(x) = (a\,x^2 + (4\,a + 2\,b)\,x + 2\,a + 2\,b)\,e^{2\,x} \, .$$

Einsetzen und Koeffizientenvergleich ergibt:

$$2\,a = -1\,, \quad 2\,a - b = 1\,,$$

bzw. $a = -\frac{1}{2}$, $b = -2$. Die allgemeine Lösung lautet:

$$y(x) = c_1\,e^{x} + c_2\,e^{2\,x} - \frac{1}{2}\,(x^2 + 4\,x)\,e^{2\,x}\,.$$

3) Das charakteristische Polynom lautet:

$$\det(A - \lambda\,E) = A = \det\begin{pmatrix}\sqrt{3}-\lambda & 1\\ 1 & \sqrt{3}-\lambda\end{pmatrix} = (\lambda - \sqrt{3})^2 - 1 = 0\,.$$

Die Matrix A besitzt folgende Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}\,, \quad \lambda_2 = -1 + \sqrt{3}\,.$$

Wir bekommen

$$A - \lambda_1\,E = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\,, \quad A - \lambda_2\,E = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\,,$$

und zugehörige Eigenvektoren $(1,1)$, $(-1,1)$. Damit ergibt sich ein Fundamentalsystem:

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\,e^{1+\sqrt{3}\,x}\,, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\,e^{-1+\sqrt{3}\,x}\,.$$

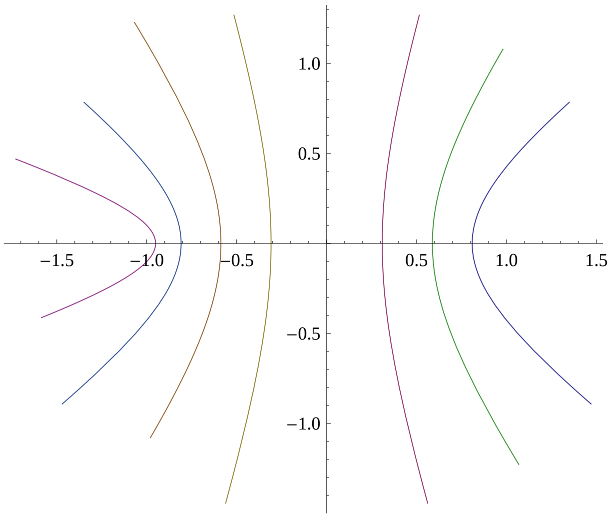
4) Wir parametrisieren die Strahlen:

$$\arg(z) = \phi_0\,, \quad z = r\,e^{\phi_0\,i}\,, \quad 0 < r\,,$$

und bekommen:

$$f\left(r\,e^{\phi_0\,i}\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos(\phi_0) + \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin(\phi_0)\,i\,.$$

Wegen $r + \dfrac{1}{r} > 0$ nimmt $\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos(\phi_0) = x$ entweder positive oder negative Werte an. Das Bild eines Strahls ergibt also einen Hyperbelast.



Hyperbeläste:
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,
$a = |\cos(\phi_0|)$,
$b = |\sin(\phi_0)|$,
Brennpunkte: $(\pm 1, 0)$,
$(a^2 + b^2 = 1)$.

5) Das Integral über die holomorphe Funktion $z \to z$ ergibt Null. Insgesamt bekommen wir:

$$\int\limits_{|z|=r_0} f(z)\, dz = \frac{1}{2}\, 2\, \pi\, i = \pi\, i\,.$$

Wir schreiben:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(1 + z - 1 + \frac{1}{1 + z - 1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + z - 1 + \frac{1}{1 - (-(z-1))}\right)$$

und bekommen mit der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\left(1 + z - 1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}\, (z-1)^{\nu}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\,(z-1)^2 - \frac{1}{2}\,(z-1)^3 + \frac{1}{2}\,(z-1)^4 - \frac{1}{2}\,(z-1)^5 + \cdots\,. \end{aligned}$$