

Wolfram Koepf:

Mathematik mit DERIVE als didaktischem Hilfsmittel

Wahrscheinlichkeit

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen von 100 Münzen genau 50 mal Kopf zu erhalten?

#1: $\text{COMB}(100, 50) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

#2:
$$\frac{12611418068195524166851562157}{158456325028528675187087900672}$$

#3: 0.07958923738

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen von 100 Münzen zwischen 45 und 55 mal Kopf zu erhalten?

#4: $\sum_{k=45}^{55} \text{COMB}(100, k) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

#5:
$$\frac{28868641920228451421269389993}{39614081257132168796771975168}$$

#6: 0.7287469759

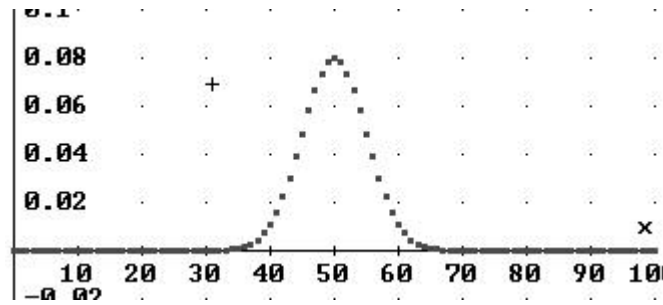
Um dieses Ergebnis besser zu verstehen, berechnen wir die Standardabweichung

#7: $\sigma := \sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$

#8: 5

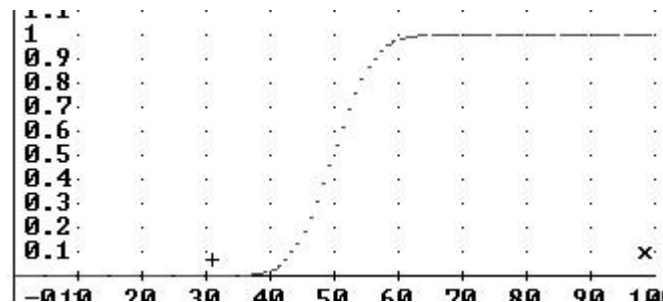
und stellen die Binomialverteilung graphisch dar

#9: $\text{VECTOR}\left(\left[\left[k, \text{COMB}(100, k) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right], k, 0, 100\right]\right)$



Darstellung der Verteilungsfunktion

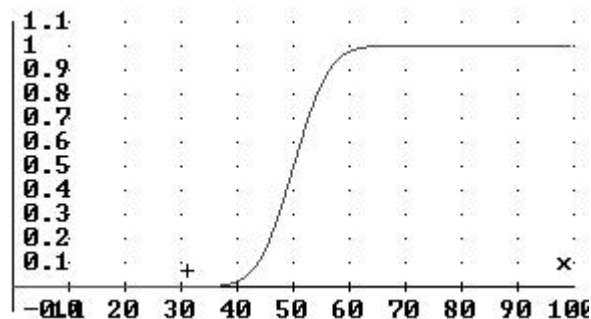
$$\#10: \sum_{k=0}^{100} \text{COMB}(100, k) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \cdot \text{CHI}(k, x, \infty)$$



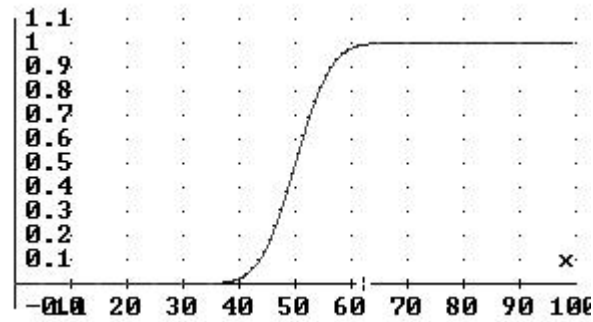
Vergleich mit der Normalverteilung

$$\#11: \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \text{EXP}\left(-\frac{(t - 50)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) dt$$

$$\#12: \frac{\text{ERF}\left(\frac{\sqrt{2} \cdot x}{10} - 5 \cdot \sqrt{2}\right) + 1}{2}$$



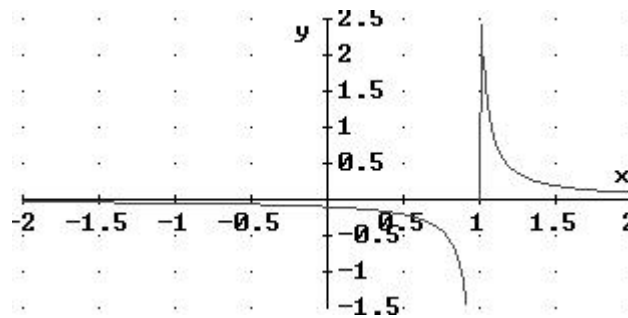
Überlagerung der beiden Verteilungsfunktionen



Graphische Darstellungen

Wo ist der zweite Pol?

$$\#13: f := \frac{1000 \cdot (x - 1)}{(101 \cdot x - 100) \cdot (100 \cdot x - 99)}$$



$$\#14: \text{SOLVE} \left(\frac{d}{dx} f, x \right)$$

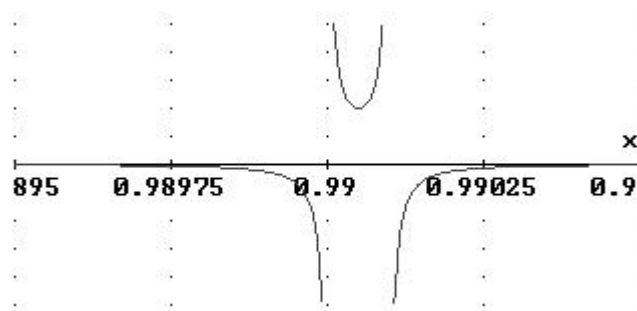
$$\#15: x = \pm\infty \vee x = 1 - \frac{\sqrt{101}}{1010} \vee x = \frac{\sqrt{101}}{1010} + 1$$

$$\#16: x = \pm\infty \vee x = 1.009950371 \vee x = 0.990049628$$

$$\#17: \text{SUBST} \left(f, x, 1 - \frac{\sqrt{101}}{1010} \right)$$

$$\#18: 20000 \cdot \sqrt{101} + 201000$$

$$\#19: 4.019975124 \cdot 10^5$$



Faktorisierung

Eine rationale Funktion, über deren elementare Integrierbarkeit sich Leibniz nicht sicher war

$$\#20: \quad g := \frac{1}{1 + x^4}$$

#21: FACTOR(g)

$$\#22: \quad \frac{1}{x^2 + 1}$$

#23: FACTOR(g, raDical)

$$\#24: \quad \frac{1}{(x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1)}$$

#25: EXPAND(g, raDical, x)

$$\#26: \quad -\frac{\sqrt{2} \cdot x}{4 \cdot (x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1)} + \frac{1}{2 \cdot (x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1)} + \frac{\sqrt{2} \cdot x}{4 \cdot (x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1)} + \frac{1}{2 \cdot (x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1)}$$

Diese Berechnungen erklären die Integration

$$\#27: \quad \int g \, dx$$

$$\#28: \quad \frac{\sqrt{2} \cdot \text{ATAN}(\sqrt{2} \cdot x - 1)}{4} + \frac{\sqrt{2} \cdot \text{ATAN}(\sqrt{2} \cdot x + 1)}{4} - \frac{\sqrt{2} \cdot \text{LN} \left(\frac{x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1}{x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1} \right)}{8}$$

Polarkoordinatendarstellung von Kegelschnitten (sehr wichtig beim Studium der Planetenbewegung)

Wir starten mit der kartesischen Darstellung einer Ellipse, deren linker Brennpunkt im Koordinatenursprung liegt ($e^2 = a^2 - b^2$)

$$\#29: \frac{(x - e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Wir substituieren b durch $\sqrt{a^2 - e^2}$

$$\#30: \frac{(x - e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{\sqrt{(a^2 - e^2)}^2} - 1 = 0$$

$$\#31: \frac{x^2 \cdot (a^2 - e^2) + 2 \cdot e \cdot x \cdot (e^2 - a^2) + a^2 \cdot y^2 - (a^2 - e^2)^2}{a^2 \cdot (a^2 - e^2)} = 0$$

Einführung von Polarkoordinaten

$$\#32: \frac{(r \cdot \cos(\varphi))^2 \cdot (a^2 - e^2) + 2 \cdot e \cdot (r \cdot \cos(\varphi)) \cdot (e^2 - a^2) + a^2 \cdot (r \cdot \sin(\varphi))^2}{a^2 \cdot (a^2 - e^2)} - 1 = 0$$

$$\frac{(a^2 - e^2) \cdot r^2}{a^2 \cdot (a^2 - e^2)} = 0$$

$$\#33: \frac{e^2 \cdot r^2 \cdot \cos^2(\varphi) + 2 \cdot e \cdot r \cdot (a^2 - e^2) \cdot \cos(\varphi) + a^4 - a^2 \cdot (2 \cdot e^2 + r^2) + e^4}{a^2 \cdot (e^2 - a^2)}$$

$$= 0$$

$$\#34: \text{FACTOR} \left(\frac{e^2 \cdot r^2 \cdot \cos^2(\varphi) + 2 \cdot e \cdot r \cdot (a^2 - e^2) \cdot \cos(\varphi) + a^4 - a^2 \cdot (2 \cdot e^2 + r^2) + e^4}{a^2 \cdot (e^2 - a^2)} \right)$$

$$\frac{4}{+ e} = 0, \text{ Rational}$$

$$\#35: \frac{(e \cdot r \cdot \cos(\varphi) + a^2 + a \cdot r - e^2) \cdot (e \cdot r \cdot \cos(\varphi) + a^2 - a \cdot r - e^2)}{a^2 \cdot (a + e) \cdot (e - a)} = 0$$

$$\#36: \text{SOLVE} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(e \cdot r \cdot \cos(\varphi) + a^2 + a \cdot r - e^2) \cdot (e \cdot r \cdot \cos(\varphi) + a^2 - a \cdot r - e^2)}{a^2 \cdot (a + e) \cdot (e - a)} = \\ 0, r \end{array} \right.$$

$$\#37: r = \frac{e^2 - a^2}{e \cdot \cos(\varphi) - a} \vee r = \frac{e^2 - a^2}{e \cdot \cos(\varphi) + a}$$

Die positive Lösung ist gegeben durch

$$\#38: r = \frac{e^2 - a^2}{e \cdot \cos(\varphi) - a}$$

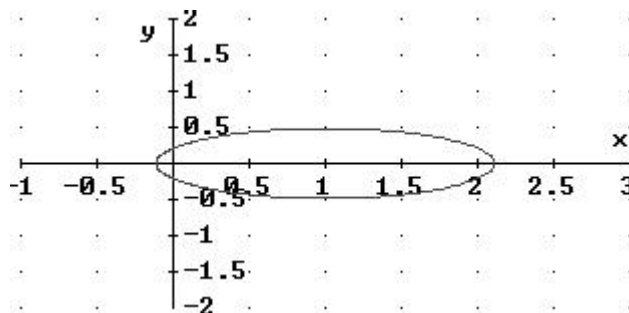
und nach Einführung der Exzentrizität $\varepsilon=e/a$ erhalten wir

$$\#39: r = \frac{e^2 - \left(\frac{e}{\varepsilon}\right)^2}{e \cdot \cos(\varphi) - \frac{e}{\varepsilon}}$$

$$\#40: r = \frac{e \cdot (\varepsilon^2 - 1)}{\varepsilon \cdot (\varepsilon \cdot \cos(\varphi) - 1)}$$

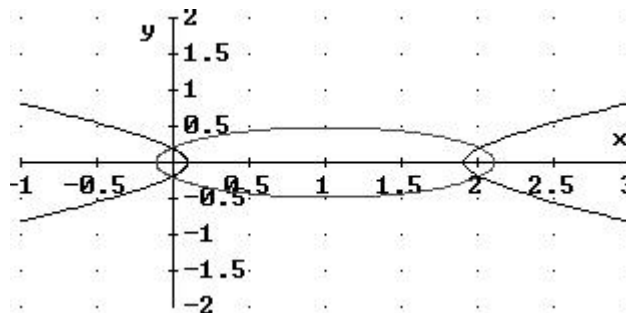
Graph einer Ellipse in Polarkoordinaten

$$\#41: r = \frac{1 \cdot (0.9^2 - 1)}{0.9 \cdot (0.9 \cdot \cos(\varphi) - 1)}$$



und einer Hyperbel

$$\#42: r = \frac{1 \cdot (1.1^2 - 1)}{1.1 \cdot (1.1 \cdot \cos(\varphi) - 1)}$$



Kubisches Newtonverfahren

Wir beginnen mit einer Herleitung des Newtonverfahrens durch Linearisierung.

$$\#43: f(x) :=$$

$$\#44: \text{InputMode} := \text{Word}$$

$$\#45: y = f(x_n) + (x - x_n) \cdot f'(x_n)$$

$$\#46: 0 = f(x_n) + (x - x_n) \cdot f'(x_n)$$

$$\#47: \text{SOLVE}(0 = f(x_n) + (x - x_n) \cdot f'(x_n), x)$$

$$\#48: x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Dies ist die wohlbekannte Newtoniteration. Nun starten wir mit einer parabolischen Approximation zweiter Ordnung.

$$\#49: y = \text{TAYLOR}(f(x), x, x_n, 2)$$

$$\#50: y = \frac{(x - x_n)^2 \cdot f''(x_n)}{2} + (x - x_n) \cdot f'(x_n) + f(x_n)$$

Mit der Newtonapproximation $x - x_n = -f(x_n)/f'(x_n)$ können wir den quadratischen Faktor linearisieren

$$\#51: 0 = \frac{(x - x_n) \cdot \left(-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) \cdot f''(x_n)}{2} + (x - x_n) \cdot f'(x_n) + f(x_n)$$

und wieder nach x auflösen

$$\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)$$

$$\#52: \text{SOLVE} \left(\begin{array}{l} 0 = \frac{(x - x_n) \cdot \left(-\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} \right) \cdot f''(x_n)}{2} + (x - x_n) \cdot f'(x_n) + f(x_n), \\ x \end{array} \right)$$

$$\#53: x = \frac{2 \cdot f(x_n) \cdot f'(x_n)}{f(x_n) \cdot f''(x_n) - 2 \cdot f'(x_n)^2} + x_n$$

Wir benutzen diese Formel für $f(x) = x^2 - a$ zur Berechnung der Quadratwurzel von a .

$$\#54: f(x) := x^2 - a$$

$$\#55: x = 3 \cdot x_n - \frac{8 \cdot x_n^3}{a + 3 \cdot x_n^2}$$

$$\#56: \text{FACTOR} \left(\left(\left(3 \cdot x_n - \frac{8 \cdot x_n^3}{a + 3 \cdot x_n^2} \right)^2 - a, \text{Rational} \right) \right)$$

$$\#57: \frac{(x_n^2 - a)^3}{(a + 3 \cdot x_n^2)^2}$$

Wir messen die Konvergenzgeschwindigkeit: Berechnung von $\sqrt{10}$

$$\#58: a := 10$$

$$\#59: \text{ITERATES} \left(3 \cdot x_n - \frac{8 \cdot x_n^3}{a + 3 \cdot x_n^2}, x_n, 1, 5 \right)$$

$$\#60: [1, 2.384615384, 3.144897306, 3.162277527, 3.16227766, 3.16227766]$$

$$\#61: \sqrt{10}$$

$$\#62: 3.16227766$$

und vergleichen mit dem normalen Newtonverfahren

$$\left(f(x_n) \right)$$

#63: ITERATES $\left(x_n - \frac{\quad}{f'(x_n)}, x_n, 1, 5 \right)$

#64: [1, 5.5, 3.659090909, 3.196005081, 3.162455622, 3.162277665]

Zweites Beispiel

#65: a := 100

#66: ITERATES $\left(3 \cdot x_n - \frac{8 \cdot x_n^3}{a + 3 \cdot x_n^2}, x_n, 1, 5 \right)$

#67: [1, 2.922330097, 7.177642752, 9.911681194, 9.999998254, 10]

Vergleich mit dem normalen Newtonverfahren

#68: ITERATES $\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, x_n, 1, 7 \right)$

#69: [1, 50.5, 26.240099, 15.02553011, 10.84043467, 10.03257851,
10.00005289, 10]

Auf ähnliche Weise gewinnt man ein Iterationsverfahren vierter Ordnung zur Berechnung der Quadratwurzel, welche ursprünglich von Dedekind angegeben worden war.

#70: a :=