

ganzzahlige Arithmetik

```

#1: 50!

#2: 30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000

#3: 
$$\frac{50!}{2^{100}}$$


#4: 
$$\frac{216105129892080882169214875191192738017616943359375}{9007199254740992}$$


```

größte gemeinsame Teiler und Faktorisierung

```

#5: GCD(50!, 2100)

#6: 140737488355328

#7: 50!

#8: 247 · 322 · 512 · 78 · 114 · 133 · 172 · 192 · 232 · 29 · 31 · 37 · 41 · 43 · 47

#9: 267 - 1

#10: 147573952589676412927

#11: 193707721 · 761838257287

#12: 1051 - 1

#13: 33 · 37 · 613 · 210631 · 2071723 · 52986961 · 5363222357 · 13168164561429877

#14: p := RANDOM(10100)

#15: 44319720119187781194394655952354193511980913744605627783386026926803~
      89897078375109904592978071037598

#16: FACTOR(p)

#17: PRIME(p)

#18: false

```

Wie stellt man fest, dass Zahlen keine Primzahlen sind, ohne ihre Faktoren zu bestimmen?

```

#19: NEXT_PRIME(10100)

#20: 1000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000~
      000000000000000000000000000000000267

```

Folie Fermat

```
#21: 2p
#22: 4431972011918778119439465595235419351198091374460562778338602692680~
      389897078375109904592978071037598
```

Fermattest

```
#23: MOD(2p, p)
#24: 35140272538806810162639887747290966320818694406457450231389034638826~
      56715118680475636519543687054586
```

Folie Euklidischer Algorithmus

```
      ggt(a, b) :=
      If a < b
      ggt(b, a)
#25: If b = 0
      a
      ggt(b, MOD(a, b))
#26: ggt(50!, 2100)
#27: 140737488355328
```

Folie Potenzen

```
      powermod(a, n, p) :=
      If n = 0
      1
#28: If EVEN?(n)
      MOD(powermod(a, n/2, p)^2, p)
      MOD(powermod(a, n - 1, p)·a, p)
#29: powermod(2, p, p)
#30: 35140272538806810162639887747290966320818694406457450231389034638826~
      56715118680475636519543687054586
```

Rechnen mit Dezimalzahlen in beliebiger Stellenzahl

```
#31: π
#32: 3.14159
#33: PrecisionDigits := 100
#34: 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307~
      816406286208998628034825342117067
```

Rechnen mit algebraischen Zahlen

$$\#35: \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

$$\#36: \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\#37: \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$$

$$\#38: -\frac{\sqrt{30}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\#39: \sqrt{(11 + 6 \cdot \sqrt{2})} + \sqrt{(11 - 6 \cdot \sqrt{2})}$$

$$\#40: 6$$

Folie algebraische Zahlen

Auftreten algebraischer und komplexer Zahlen beim Lösen von Polynomgleichungen

$$\#41: \text{SOLVE}(x^2 + x + 1 = 0, x)$$

$$\#42: x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2} \vee x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}$$

Auftreten trigonometrischer Ausdrücke beim Lösen von Polynomgleichungen

$$\#43: \text{SOLVE}(x^3 - 3 \cdot x - 1 = 0, x)$$

$$\#44: x = -2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{9}\right) \vee x = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \vee x = -2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$$

$$\#45: \text{SOLVE}(x^3 + 3 \cdot x - 1 = 0, x)$$

$$\begin{aligned} \#46: x &= \left(\frac{\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{16}\right)^{1/3} - \left(\frac{\sqrt{5}}{16} + \frac{1}{16}\right)^{1/3} - i \cdot \left(\left(\frac{3 \cdot \sqrt{15}}{16} - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16}\right)^{1/3} + \right. \\ &\left. \left(\frac{3 \cdot \sqrt{15}}{16} + \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16}\right)^{1/3}\right) \vee x = \left(\frac{\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{16}\right)^{1/3} - \left(\frac{\sqrt{5}}{16} + \frac{1}{16}\right)^{1/3} + \\ &i \cdot \left(\left(\frac{3 \cdot \sqrt{15}}{16} - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16}\right)^{1/3} + \left(\frac{3 \cdot \sqrt{15}}{16} + \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16}\right)^{1/3}\right) \vee x = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \right. \\ &\left. \frac{1}{2}\right)^{1/3} - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)^{1/3} \end{aligned}$$

Rechnen mit Polynomen

#47: $(x + y)^{10} - (x - y)^{10}$

#48: $\text{EXPAND}((x + y)^{10} - (x - y)^{10}, \text{Rational}, x, y)$

#49: $20 \cdot x^9 \cdot y + 240 \cdot x^7 \cdot y^3 + 504 \cdot x^5 \cdot y^5 + 240 \cdot x^3 \cdot y^7 + 20 \cdot x \cdot y^9$

#50: $\text{FACTOR}(20 \cdot x^9 \cdot y + 240 \cdot x^7 \cdot y^3 + 504 \cdot x^5 \cdot y^5 + 240 \cdot x^3 \cdot y^7 + 20 \cdot x \cdot y^9,$

Trivial, x)

#51: $4 \cdot x \cdot y \cdot (5 \cdot x^8 + 60 \cdot x^6 \cdot y^2 + 126 \cdot x^4 \cdot y^4 + 60 \cdot x^2 \cdot y^6 + 5 \cdot y^8)$

#52: $\text{FACTOR}(4 \cdot x \cdot y \cdot (5 \cdot x^8 + 60 \cdot x^6 \cdot y^2 + 126 \cdot x^4 \cdot y^4 + 60 \cdot x^2 \cdot y^6 + 5 \cdot y^8),$

Rational, x)

#53: $5 \cdot x^8 + 60 \cdot x^6 \cdot y^2 + 126 \cdot x^4 \cdot y^4 + 60 \cdot x^2 \cdot y^6 + 5 \cdot y^8$

#54: $\text{SUBST}(\text{SUBST}(5 \cdot x^8 + 60 \cdot x^6 \cdot y^2 + 126 \cdot x^4 \cdot y^4 + 60 \cdot x^2 \cdot y^6 + 5 \cdot y^8, x, \sqrt{u}),$

y, \sqrt{v})

#55: $5 \cdot u^4 + 60 \cdot u^3 \cdot v + 126 \cdot u^2 \cdot v^2 + 60 \cdot u \cdot v^3 + 5 \cdot v^4$

#56: $\text{FACTOR}(5 \cdot u^4 + 60 \cdot u^3 \cdot v + 126 \cdot u^2 \cdot v^2 + 60 \cdot u \cdot v^3 + 5 \cdot v^4, \text{Rational}, u, v)$

#57: $(u^2 + 10 \cdot u \cdot v + 5 \cdot v^2) \cdot (5 \cdot u^2 + 10 \cdot u \cdot v + v^2)$

Folie Polynomfaktorisierung

Leibniz-Beispiel Integration

#58: $1 + x^4$

#59: $\text{FACTOR}(1 + x^4, \text{Rational}, x)$

#60: $x^4 + 1$

#61: $(x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1)$

$$\begin{aligned} \#62: & \int \frac{1}{1+x^4} dx \\ \#63: & \frac{\sqrt{2} \cdot \text{ATAN}(\sqrt{2} \cdot x - 1)}{4} + \frac{\sqrt{2} \cdot \text{ATAN}(\sqrt{2} \cdot x + 1)}{4} - \frac{\sqrt{2} \cdot \text{LN} \left(\frac{x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1}{x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1} \right)}{8} \end{aligned}$$

Folie zweiter Pol

$$\#64: f := \frac{1000 \cdot (x - 1)}{(101 \cdot x - 100) \cdot (100 \cdot x - 99)}$$

$$\#65: \frac{d}{dx} \frac{1000 \cdot (x - 1)}{(101 \cdot x - 100) \cdot (100 \cdot x - 99)}$$

$$\#66: - \frac{1000 \cdot (10100 \cdot x^2 - 20200 \cdot x + 10099)}{(100 \cdot x - 99)^2 \cdot (101 \cdot x - 100)^2}$$

$$\#67: \text{SOLVE} \left(- \frac{1000 \cdot (10100 \cdot x^2 - 20200 \cdot x + 10099)}{(100 \cdot x - 99)^2 \cdot (101 \cdot x - 100)^2}, x \right)$$

$$\#68: x = \pm\infty \vee x = 1 - \frac{\sqrt{101}}{1010} \vee x = \frac{\sqrt{101}}{1010} + 1$$

$$\#69: \text{SUBST} \left(f, x, 1 - \frac{\sqrt{101}}{1010} \right)$$

$$\#70: 20000 \cdot \sqrt{101} + 201000$$

$$\#71: 4.01997 \cdot 10^5$$

Lösen linearer Gleichungssysteme

$$\#72: [780 \cdot x + 563 \cdot y = 217, 913 \cdot x + 659 \cdot y = 254]$$

$$\#73: \text{SOLVE}([780 \cdot x + 563 \cdot y = 217, 913 \cdot x + 659 \cdot y = 254], [x, y])$$

$$\#74: [x = 1 \wedge y = -1]$$

$$\#75: \text{SOLVE}([781 \cdot x + 563 \cdot y = 217, 913 \cdot x + 659 \cdot y = 254], [x, y])$$

$$\#76: [x = 0.00151515 \wedge y = 0.383333]$$

$$\#77: \text{PrecisionDigits} := 3$$

$$\#78: [913 \cdot x + 659 \cdot y = 254]$$

Folie lineare Gleichungssysteme

Folie Kondition

#79: $\text{NORM}(A) := \text{MAX}(\text{MAX}(A))$

$\text{COND}(A) :=$
If $\text{DET}(A) = 0$
#80: ∞
 $\text{NORM}(A) \cdot \text{NORM}(A^{-1})$

#81: $\text{NORM} \begin{bmatrix} 780 & 563 \\ 913 & 659 \end{bmatrix}$

#82: 913

#83: $\text{COND} \begin{bmatrix} 780 & 563 \\ 913 & 659 \end{bmatrix}$

#84: 712140

#85: $\text{COND} \begin{bmatrix} 780 & 563 \\ 913 & -659 \end{bmatrix}$

#86: $\frac{833569}{1028039}$

#87: 0.81

#88: $[780 \cdot x + 563 \cdot y = 217, 913 \cdot x - 659 \cdot y = 254]$

Folie Hilbertmatrix

#89: $\text{hilbertmatrix}(n) := \text{VECTOR} \left(\text{VECTOR} \left(\frac{1}{j+k-1}, j, 1, n \right), k, 1, n \right)$

#90: $\text{hilbertmatrix}(8)$

#91:
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1
7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	1	1	1	1	1
8	9	10	11	12	13	14	15

#92: DET(hilbertmatrix(8))

#93: $\frac{1}{365356847125734485878112256000000}$

#94: $2.73 \cdot 10^{-33}$

#95: hilbertmatrix(8)⁻¹

#96:

64	-2016	20160	-92400	221760
-2016	84672	-952560	4656960	-11642400
20160	-952560	11430720	-58212000	149688000
-92400	4656960	-58212000	304920000	-800415000
221760	-11642400	149688000	-800415000	2134440000
-288288	15567552	-204324120	1109908800	-2996753760
192192	-10594584	141261120	-776936160	2118916800
-51480	2882880	-38918880	216216000	-594594000
-288288	192192	-51480		
15567552	-10594584	2882880		
-204324120	141261120	-38918880		
1109908800	-776936160	216216000		
-2996753760	2118916800	-594594000		
4249941696	-3030051024	856215360		
-3030051024	2175421248	-618377760		
856215360	-618377760	176679360		

#97: COND(hilbertmatrix(8))

#98: 4249941696

#99: PrecisionDigits := 6

#100: hilbertmatrix(8)⁻¹ • hilbertmatrix(8)

```

#101: [ -5.22181  -5.46805  -4.77427  -4.19673  -3.72412  -3.33614
        149.264   125.235   105.9    92.0398   81.2531   72.6481
       -530.983 -443.394 -379.407 -332.978 -295.995 -266.358
        766.208   649.604   566.08   503.564   452.336   411.487
       -1042.5  -865.698  -746.831 -659.583 -591.024 -537.792
        1294.84   1036.14   870.501   753.732   666.248   598.892
       -831.614  -651.195  -538.44  -460.574 -403.235 -359.079
        232.22    181.244   149.509   127.661   111.613   99.2805
       -3.01331  -2.74412 ]
        65.6335   59.8235 ]
       -242.084 -221.842 ]
        377.55    348.872 ]
       -493.107 -455.551 ]
        542.812   497.373 ]
       -322.934 -295.244 ]
        89.4813   82.4936 ]

```

```

#102: [ 1  0  0  0  0  0  0  0 ]
        [ 0  1  0  0  0  0  0  0 ]
        [ 0  0  1  0  0  0  0  0 ]
        [ 0  0  0  1  0  0  0  0 ]
        [ 0  0  0  0  1  0  0  0 ]
        [ 0  0  0  0  0  1  0  0 ]
        [ 0  0  0  0  0  0  1  0 ]
        [ 0  0  0  0  0  0  0  1 ]

```

```
#103: VECTOR(COND(hilbertmatrix(n)), n, 1, 20)
```

```

#104: [ 1, 12, 192, 6480, 1.79·105, 4.41·106, 1.93·108, 2.05·108, 2.88·108,
        8.07·106, 1.2·107, 4.82·106, 5.4·106, 2.6·106, 3.47·106, 1.26·107,
        1.41·106, 1.89·106, 1.86·106, 1.62·106 ]

```

```

#105: [1, 12, 192, 6480, 179200, 4410000, 133402500, 4249941696,
        122367445200, 3480673996800, 117643011932160, 3659449159080000,

```


106518477825760000, 3521767173114190000, 114708987924290760000,
 3525270042097046880000, 110552468520163390156800,
 3712528469766528569102400, 118439338286744588574720000,
 3613560329006048768624640000]

$$\#106: \left[1, 12, 192, 6480, 1.79 \cdot 10^5, 4.41 \cdot 10^6, 1.33 \cdot 10^8, 4.24 \cdot 10^9, \right. \\
 1.22 \cdot 10^{11}, 3.48 \cdot 10^{12}, 1.17 \cdot 10^{14}, 3.65 \cdot 10^{15}, 1.06 \cdot 10^{17}, 3.52 \cdot 10^{18}, \\
 \left. 1.14 \cdot 10^{20}, 3.52 \cdot 10^{21}, 1.1 \cdot 10^{23}, 3.71 \cdot 10^{24}, 1.18 \cdot 10^{26}, 3.61 \cdot 10^{27} \right]$$

Differentiation

$$\#107: \sin\left(2 \cdot x^2 - \frac{1}{1-x}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

$$\#108: \frac{d}{dx} \left(\sin\left(2 \cdot x^2 - \frac{1}{1-x}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{1+x}\right) \right)$$

$$\#109: \left(4 \cdot x - \frac{1}{(x-1)^2} \right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x-1} + 2 \cdot x^2\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x+1}\right) + \\
 \frac{\sin\left(\frac{1}{x-1} + 2 \cdot x^2\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{x+1}\right)}{(x+1)^2}$$

Folie Differentiation

Folie Integration

$$\#110: \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$\#111: \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$\#112: \int \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

$$\#113: \frac{\sqrt{3} \cdot \text{ATAN} \left(\frac{\sqrt{3} \cdot (2 \cdot x^2 + 1)}{3} \right)}{6} + \frac{\text{LN} \left(\frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2 + x + 1} \right)}{4}$$

$$\#114: \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{3} \cdot \text{ATAN} \left(\frac{\sqrt{3} \cdot (2 \cdot x^2 + 1)}{3} \right)}{6} + \frac{\text{LN} \left(\frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2 + x + 1} \right)}{4} \right)$$

$$\#115: \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)}$$

$$\#116: \text{FACTOR} \left(\frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 + x^2 + 1}, \text{Rational}, x \right)$$

$$\#117: \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)}$$

$$\#118: x \cdot \cos(x) \cdot \sin(2 \cdot x)$$

$$\#119: \int x \cdot \cos(x) \cdot \sin(2 \cdot x) \, dx$$

$$\#120: -\frac{x \cdot \cos(3 \cdot x)}{6} + \frac{\sin(3 \cdot x)}{18} - \frac{x \cdot \cos(x)}{2} + \frac{\sin(x)}{2}$$

$$\#121: \int \frac{\sin(x)}{x} \, dx$$

$$\#122: \int \frac{\sin(x)}{x} \, dx$$

Achtung: ein falsches Ergebnis!

$$\#123: \int_{-1}^1 \frac{1}{x} \, dx$$

$$\#124: 0$$

Folie Vereinfachung

Folie Hofstadter

$$\#125: \begin{bmatrix} \frac{\sin(r \cdot \alpha)}{\sin((1-r) \cdot \alpha)} & \frac{\sin(2 \cdot \alpha)}{\sin((1-2) \cdot \alpha)} & \frac{\sin((2-r) \cdot \alpha)}{\sin((r-1) \cdot \alpha)} \\ \frac{\sin(r \cdot \beta)}{\sin((1-r) \cdot \beta)} & \frac{\sin(2 \cdot \beta)}{\sin((1-2) \cdot \beta)} & \frac{\sin((2-r) \cdot \beta)}{\sin((r-1) \cdot \beta)} \\ \frac{\sin(r \cdot \gamma)}{\sin((1-r) \cdot \gamma)} & \frac{\sin(2 \cdot \gamma)}{\sin((1-2) \cdot \gamma)} & \frac{\sin((2-r) \cdot \gamma)}{\sin((r-1) \cdot \gamma)} \end{bmatrix}$$

$$\#126: \text{DET} \begin{bmatrix} \frac{\sin(r \cdot \alpha)}{\sin((1-r) \cdot \alpha)} & \frac{\sin(2 \cdot \alpha)}{\sin((1-2) \cdot \alpha)} & \frac{\sin((2-r) \cdot \alpha)}{\sin((r-1) \cdot \alpha)} \\ \frac{\sin(r \cdot \beta)}{\sin((1-r) \cdot \beta)} & \frac{\sin(2 \cdot \beta)}{\sin((1-2) \cdot \beta)} & \frac{\sin((2-r) \cdot \beta)}{\sin((r-1) \cdot \beta)} \\ \frac{\sin(r \cdot \gamma)}{\sin((1-r) \cdot \gamma)} & \frac{\sin(2 \cdot \gamma)}{\sin((1-2) \cdot \gamma)} & \frac{\sin((2-r) \cdot \gamma)}{\sin((r-1) \cdot \gamma)} \end{bmatrix}$$

$$\#127: \frac{\sin(\alpha \cdot (r-2)) \cdot \left(\frac{2 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma \cdot r)}{\sin(\gamma \cdot (r-1))} - \frac{2 \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta \cdot r)}{\sin(\beta \cdot (r-1))} \right)}{\sin(\alpha \cdot (r-1))} +$$

$$\frac{\sin(\alpha \cdot r) \cdot \left(\frac{2 \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta \cdot (r-2))}{\sin(\beta \cdot (r-1))} - \frac{2 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma \cdot (r-2))}{\sin(\gamma \cdot (r-1))} \right)}{\sin(\alpha \cdot (r-1))}$$

$$+ \cos(\alpha) \cdot \left(\frac{2 \cdot \sin(\beta \cdot r) \cdot \sin(\gamma \cdot (r-2))}{\sin(\beta \cdot (r-1)) \cdot \sin(\gamma \cdot (r-1))} - \right.$$

$$\left. \frac{2 \cdot \sin(\beta \cdot (r-2)) \cdot \sin(\gamma \cdot r)}{\sin(\beta \cdot (r-1)) \cdot \sin(\gamma \cdot (r-1))} \right)$$

#128: Trigonometry := Expand

#129: 0

Folie Reihenentwicklungen

$$\#130: m \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}} - 1 \right)$$

$$\#131: \text{TAYLOR} \left(m \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right), v, 0, 5 \right)$$

$$\#132: \frac{3 \cdot m \cdot v^4}{8 \cdot c^2} + \frac{m \cdot v^2}{2}$$