Wolfram Koepf:

Notwendige Änderungen im Curriculum bei der Einführung von Computeralgebrasystemen

1. CAS-Tagung

des Landesinstituts für Schule und Ausbildung Mecklenburg-Vorpommern

25. Juli 2001, Schwerin

1. Wahrscheinlichkeit

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen von 100 Münzen genau 50 mal Kopf zu erhalten?

#1: $\text{COMB}(100,\ 50)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

#2: $\frac{12611418068195524166851562157}{158456325028528675187087900672}$

#3: 0.07958923738

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen von 100 Münzen zwischen 45 und 55 mal Kopf zu erhalten?

#4: $\sum_{k=45}^{55} \mathrm{COMB}(100, k) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

#5: $\frac{288686419202284514212693899993}{396140812571321687967719751168}$

#6: 0.7287469759

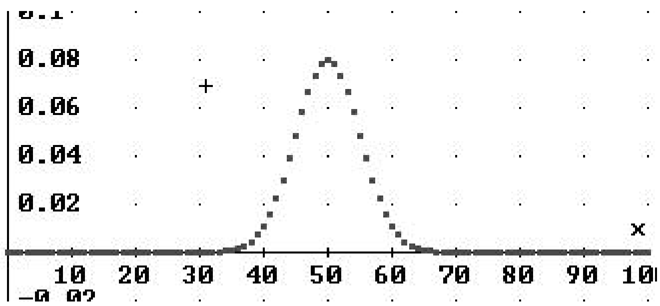
Um dieses Ergebnis besser zu verstehen, berechnen wir die Standardabweichung

#7: $\sigma := \sqrt{\left(100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)}$

#8: 5

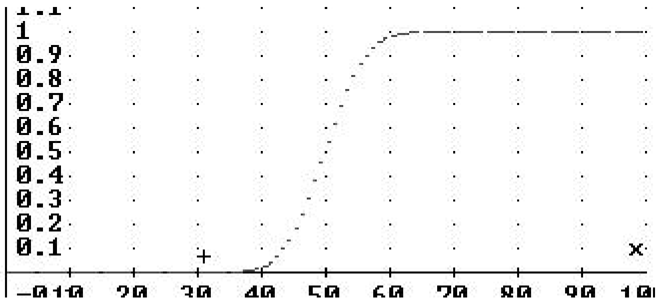
und stellen die Binomialverteilung graphisch dar

#9: $\mathrm{VECTOR}\left(\left[k, \mathrm{COMB}(100, k) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right], k, 0, 100\right)$



Darstellung der Verteilungsfunktion

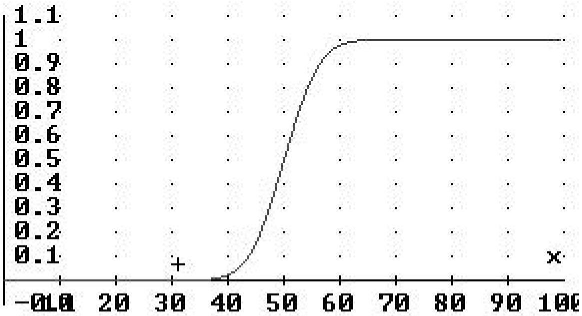
#10: $\sum_{k=0}^{100} \mathrm{COMB}(100, k) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \cdot \mathrm{CHI}(k, x, \infty)$



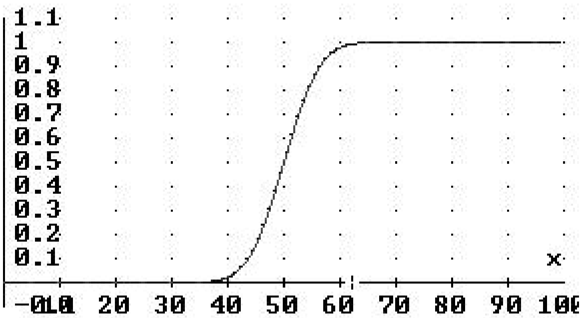
Vergleich mit der Normalverteilung

#11: $$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{(2\cdot\pi)}}\cdot \mathrm{EXP}\left(-\frac{(t-50)^2}{2\cdot\sigma^2}\right) dt$$

#12: $$\frac{\mathrm{ERF}\left(\frac{\sqrt{2}\cdot x}{10} - 5\cdot\sqrt{2}\right) + 1}{2}$$



Überlagerung der beiden Verteilungsfunktionen



Schließlich betrachten wir die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen von n Münzen genau n/2 mal Kopf zu erhalten, bei

variablem n.

#13: $\text{VECTOR}\left(\text{COMB}\left(n, \frac{n}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n, n, 100, 1000, 100\right)$

#14: [0.07958923738, 0.056348479, 0.04602751441, 0.03986930196, 0.03566464555, 0.03255993133, 0.03014643325, 0.02820066509, 0.02658876523, 0.02522501817]

#15: $\lim_{n\to\infty} \text{COMB}\left(n, \frac{n}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

#16: 0

#17: $\lim_{n\to\infty} n\cdot\text{COMB}\left(n, \frac{n}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

#18: ∞

#19: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot\text{COMB}\left(n, \frac{n}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

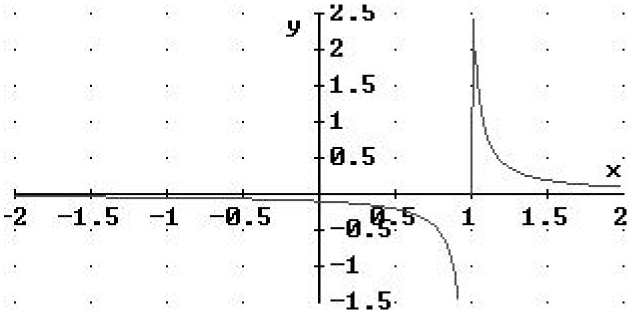
#20: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$

Dies korrespondiert damit, dass die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n}/2$ wie $\sqrt{n}$ wächst.

2. Graphische Darstellungen

Wo ist der zweite Pol?

#21: $f := \frac{1000\cdot(x - 1)}{(101\cdot x - 100)\cdot(100\cdot x - 99)}$



#22: $\text{SOLVE}\left(\frac{d}{dx} f, x\right)$

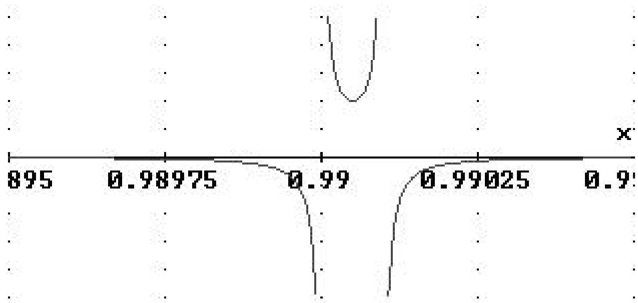
#23: $x = \pm\infty \lor x = 1 - \frac{\sqrt{101}}{1010} \lor x = \frac{\sqrt{101}}{1010} + 1$

#24: $x = \pm\infty \lor x = 1.009950371 \lor x = 0.990049628$

#25: $\text{SUBST}\left(f, x, 1 - \frac{\sqrt{101}}{1010}\right)$

#26: $20000\cdot\sqrt{101} + 201000$

#27: $4.019975124\cdot 10^{5}$



3. Faktorisierung

Eine rationale Funktion, über deren elementare Integrierbarkeit sich Leibniz nicht sicher war

#28: $g := \frac{1}{1 + x^{4}}$

#29: FACTOR(g)

#30: $\frac{1}{x^{4} + 1}$

#31: FACTOR(g, raDical)

#32: $\frac{1}{(x^{2} + \sqrt{2}\cdot x + 1)\cdot(x^{2} - \sqrt{2}\cdot x + 1)}$

#33: EXPAND(g, raDical, x)

$$\#34: \quad -\frac{\sqrt{2}\cdot x}{4\cdot(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1)}+\frac{1}{2\cdot(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1)}+\frac{\sqrt{2}\cdot x}{4\cdot(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1)}+\frac{1}{2\cdot(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1)}$$

Diese Berechnungen erklären die Integration

$$\#35: \quad \int g\ dx$$

$$\#36: \quad \frac{\sqrt{2}\cdot \mathrm{ATAN}(\sqrt{2}\cdot x-1)}{4}+\frac{\sqrt{2}\cdot \mathrm{ATAN}(\sqrt{2}\cdot x+1)}{4}-\frac{\sqrt{2}\cdot \mathrm{LN}\left(\dfrac{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}\right)}{8}$$

4. Polarkoordinatendarstellung von Kegelschnitten (sehr wichtig beim Studium der Planetenbewegung)

Wir starten mit der kartesischen Darstellung einer Ellipse, deren linker Brennpunkt im Koordinatenursprung liegt (e^2 = a^2-b^2)

$$\#37: \quad \frac{(x-e)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

Wir substitutieren b durch √(a^2-e^2)

$$\#38: \quad \frac{(x-e)^2}{a^2}+\frac{y^2}{\sqrt{(a^2-e^2)}^2}-1=0$$

$$\#39: \quad \frac{x^2\cdot(a^2-e^2)+2\cdot e\cdot x\cdot(e^2-a^2)+a^2\cdot y^2-(a^2-e^2)^2}{a^2\cdot(a^2-e^2)}=0$$

Einführung von Polarkoordinaten

#40: $$\frac{(r\cdot \mathrm{COS}(\varphi))^2\cdot(a^2 - e^2) + 2\cdot e\cdot(r\cdot \mathrm{COS}(\varphi))\cdot(e^2 - a^2) + a^2\cdot(r\cdot \mathrm{SIN}(\varphi))^2 - (a^2 - e^2)^2}{a^2\cdot(a^2 - e^2)} = 0$$

#41: $$\frac{e^2\cdot r^2\cdot \mathrm{COS}(\varphi)^2 + 2\cdot e\cdot r\cdot(a^2 - e^2)\cdot \mathrm{COS}(\varphi) + a^4 - a^2\cdot(2\cdot e^2 + r^2) + e^4}{a^2\cdot(e^2 - a^2)} = 0$$

#42: $$\mathrm{FACTOR}\left(\frac{e^2\cdot r^2\cdot \mathrm{COS}(\varphi)^2 + 2\cdot e\cdot r\cdot(a^2 - e^2)\cdot \mathrm{COS}(\varphi) + a^4 - a^2\cdot(2\cdot e^2 + r^2) + e^4}{a^2\cdot(e^2 - a^2)} = 0,\ \mathrm{Rational}\right)$$

#43: $$\frac{(e\cdot r\cdot \mathrm{COS}(\varphi) + a^2 + a\cdot r - e^2)\cdot(e\cdot r\cdot \mathrm{COS}(\varphi) + a^2 - a\cdot r - e^2)}{a^2\cdot(a + e)\cdot(e - a)} = 0$$

#44: $$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{(e\cdot r\cdot \mathrm{COS}(\varphi) + a^2 + a\cdot r - e^2)\cdot(e\cdot r\cdot \mathrm{COS}(\varphi) + a^2 - a\cdot r - e^2)}{a^2\cdot(a + e)\cdot(e - a)} = 0,\ r\right)$$

#45: $$r = \frac{e^2 - a^2}{e\cdot \mathrm{COS}(\varphi) - a} \vee r = \frac{e^2 - a^2}{e\cdot \mathrm{COS}(\varphi) + a}$$

Die positive Lösung ist gegeben durch

#46: $$r = \frac{e^2 - a^2}{e \cdot \cos(\varphi) - a}$$

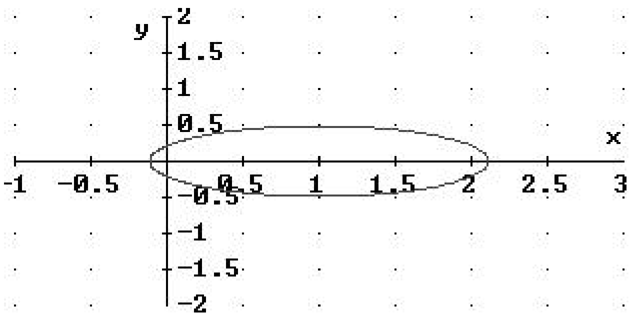
und nach Einführung der Exzentrität ε=e/a erhalten wir

#47: $$r = \frac{e^2 - \left(\frac{e}{\varepsilon}\right)^2}{e \cdot \cos(\varphi) - \frac{e}{\varepsilon}}$$

#48: $$r = \frac{e \cdot (\varepsilon^2 - 1)}{\varepsilon \cdot (\varepsilon \cdot \cos(\varphi) - 1)}$$

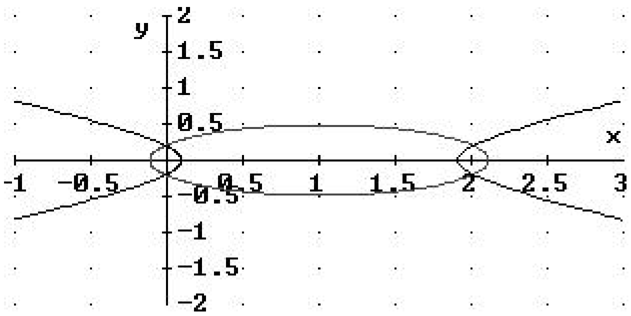
Graph einer Ellipse in Polarkoordinaten

#49: $$r = \frac{1 \cdot (0.9^2 - 1)}{0.9 \cdot (0.9 \cdot \cos(\varphi) - 1)}$$



und einer Hyperbel

#50: $$r = \frac{1 \cdot (1.1^2 - 1)}{1.1 \cdot (1.1 \cdot \cos(\varphi) - 1)}$$



6. Einige Ergebnisse von DERIVE, welche vielleicht Kopfschmerzen bereiten, oder - besser - zum Nachdenken veranlassen

#51: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx$

#52: 0

#53: $\text{SOLVE}(x^2 + x + 1 = 0,\ x)$

#54: $x = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\cdot \hat{\imath}}{2} \vee x = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\cdot \hat{\imath}}{2}$

#55: $\text{SOLVE}(x^3 - 3\cdot x - 1 = 0,\ x)$

#56: $x = -\ 2\cdot \text{COS}\left(\dfrac{2\cdot \pi}{9}\right) \vee x = 2\cdot \text{COS}\left(\dfrac{\pi}{9}\right) \vee x = -\ 2\cdot \text{SIN}\left(\dfrac{\pi}{18}\right)$

#57: $\displaystyle\int \text{EXP}(-\ x^2)\, dx$

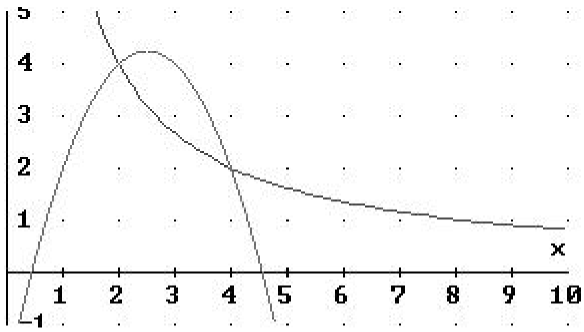
#58: $\dfrac{\sqrt{\pi}\cdot \text{ERF}(x)}{2}$

#59: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$

#60: $n!$

#61: $\text{SOLVE}\left(\left[x\cdot y - 8 = 0,\ x^2 - 5\cdot x + y + 2 = 0\right],\ [x,\ y]\right)$

#62: $[x = -1 \wedge y = -8,\ x = 2 \wedge y = 4,\ x = 4 \wedge y = 2]$



5
4
3
2
1
−1
x
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10