Wolfram Koepf:

Mathematik mit DERIVE als didaktischem Hilfsmittel

MNU-Tagung

26. März 2002, Hannover

1. Wahrscheinlichkeit

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen von 100 Münzen genau 50 mal Kopf zu erhalten?

#1: $\mathrm{COMB}(100,\ 50)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

#2: $\frac{12611418068195524166851562157}{158456325028528675187087900672}$

#3: 0.07958923738

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen von 100 Münzen zwischen 45 und 55

mal Kopf zu erhalten?

#4: $$\sum_{k=45}^{55} \text{COMB}(100,\ k)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

#5: $$\frac{288686419202284514212693899993}{396140812571321687967719751680}$$

#6: 0.7287469759

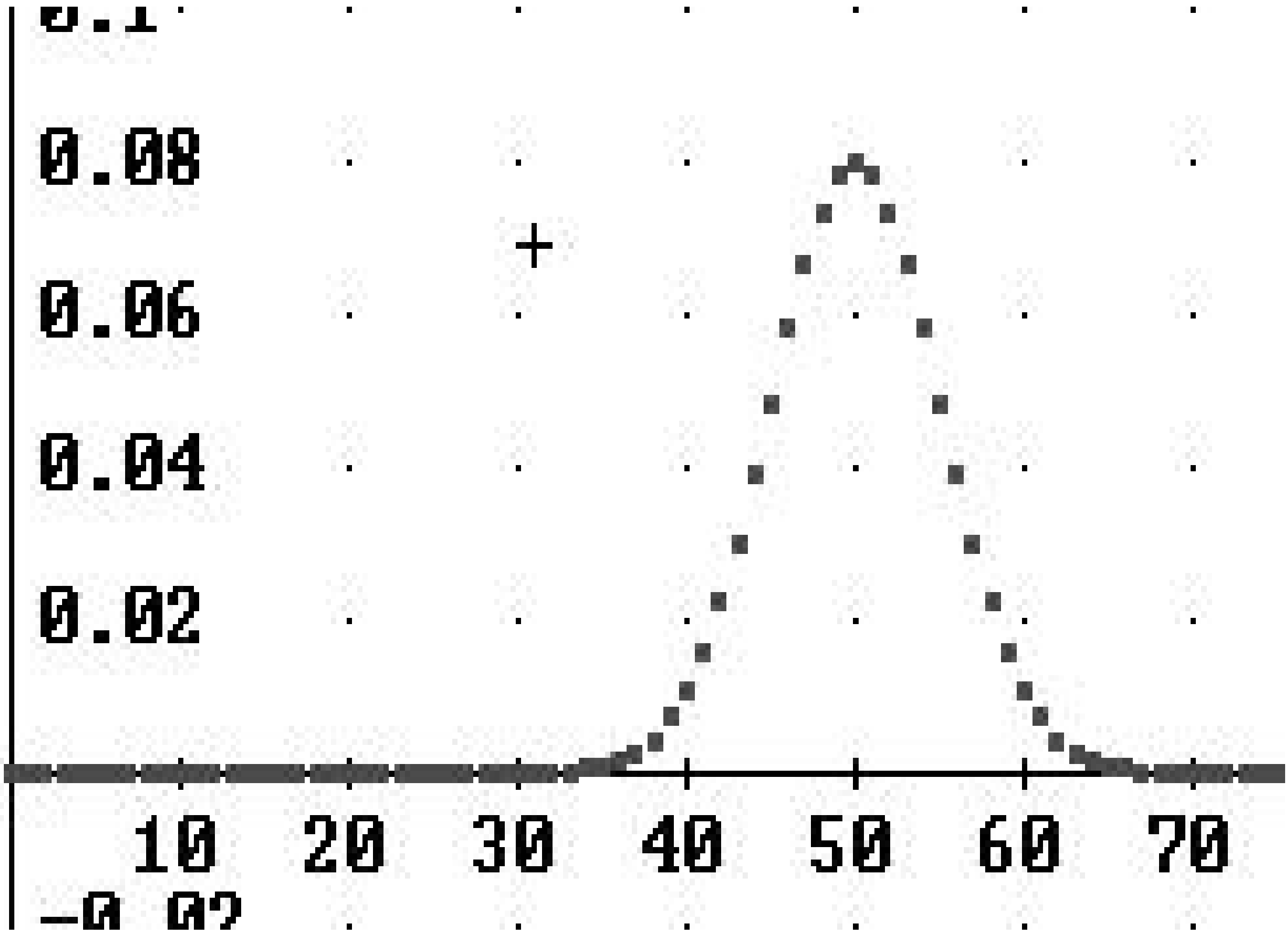
Um dieses Ergebnis besser zu verstehen, berechnen wir die Standardabweichung

#7: $$\sigma := \sqrt{\left(100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)}$$

#8: 5

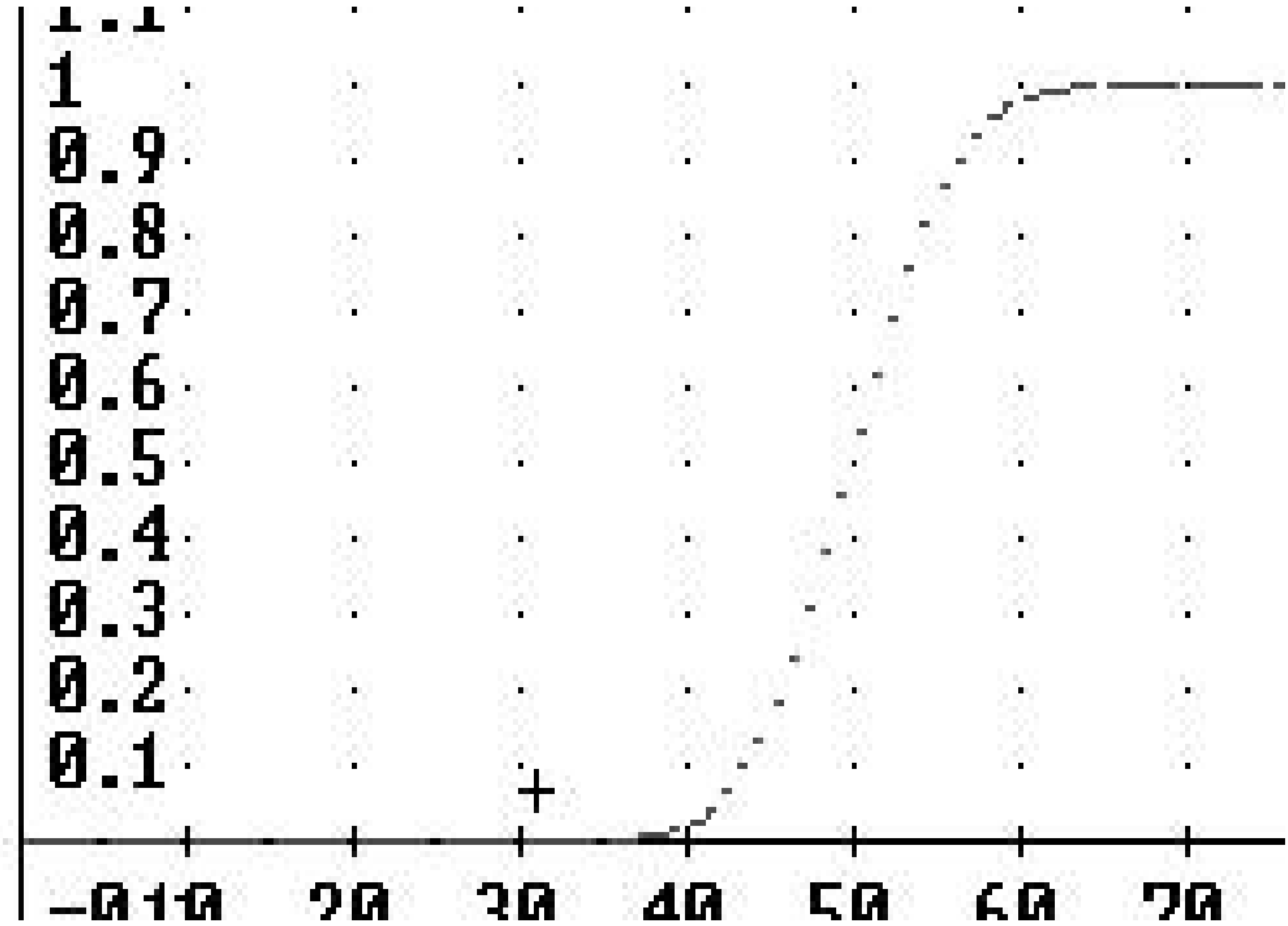
und stellen die Binomialverteilung graphisch dar

#9: $$\text{VECTOR}\left(\left[k,\ \text{COMB}(100,\ k)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right],\ k,\ 0,\ 100\right)$$



Darstellung der Verteilungsfunktion

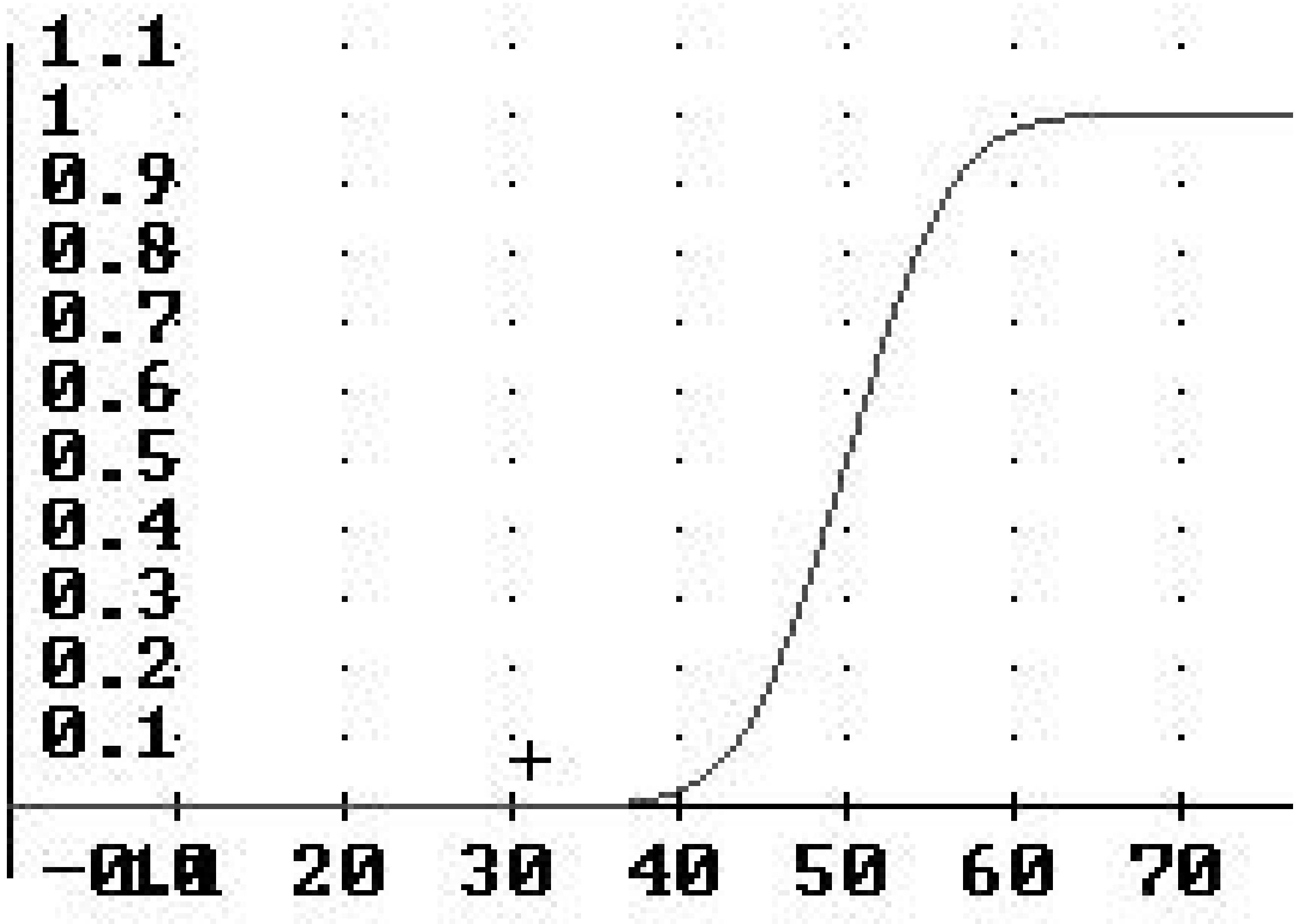
#10: $\sum_{k=0}^{100} \mathrm{COMB}(100,\ k)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\cdot \mathrm{CHI}(k,\ x,\ \infty)$



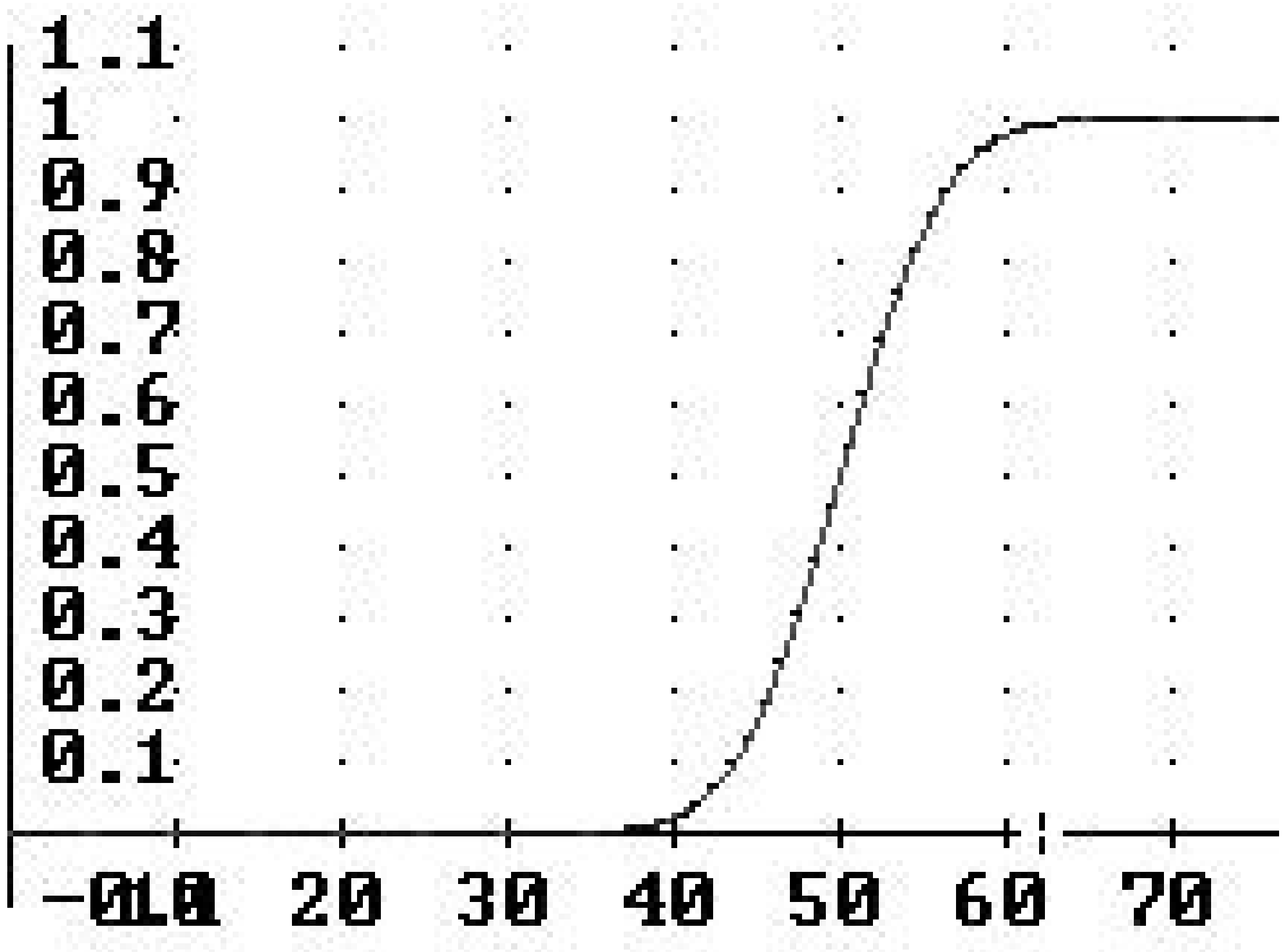
Vergleich mit der Normalverteilung

#11: $$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{(2\cdot\pi)}}\cdot \mathrm{EXP}\left(-\frac{(t-50)^2}{2\cdot\sigma^2}\right) dt$$

#12: $$\frac{\mathrm{ERF}\left(\frac{\sqrt{2}\cdot x}{10} - 5\cdot\sqrt{2}\right) + 1}{2}$$



Überlagerung der beiden Verteilungsfunktionen



Schließlich betrachten wir die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen von n Münzen genau n/2 mal Kopf zu erhalten, bei variablem n.

#13: $\mathrm{VECTOR}\left(\mathrm{COMB}\left(n, \frac{n}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n, n, 100, 1000, 100\right)$

#14: [0.07958923738, 0.056348479, 0.04602751441, 0.03986930196, 0.03566464555, 0.03255993133, 0.03014643325, 0.02820066509, 0.02658876523, 0.02522501817]

#15: $\lim_{n\to\infty} \mathrm{COMB}\left(n, \frac{n}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

#16: 0

#17: $\lim_{n\to\infty} n\cdot\mathrm{COMB}\left(n, \frac{n}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

#18: ∞

#19: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot \mathrm{COMB}\left(n, \frac{n}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

#20: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$

Dies korrespondiert damit, dass die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n}/2$ wie $\sqrt{n}$ wächst.

2. Faktorisierung

Eine rationale Funktion, über deren elementare Integrierbarkeit sich Leibniz nicht sicher war

#21: $g := \frac{1}{1 + x^4}$

#22: FACTOR(g)

#23: $\frac{1}{x^4 + 1}$

#24: FACTOR(g, raDical)

#25: $\frac{1}{(x^2 + \sqrt{2}\cdot x + 1)\cdot(x^2 - \sqrt{2}\cdot x + 1)}$

#26: EXPAND(g, raDical, x)

#27: $-\frac{\sqrt{2}\cdot x}{4\cdot(x^2 - \sqrt{2}\cdot x + 1)} + \frac{1}{2\cdot(x^2 - \sqrt{2}\cdot x + 1)} + \frac{\sqrt{2}\cdot x}{4\cdot(x^2 + \sqrt{2}\cdot x + 1)} + \frac{1}{2\cdot(x^2 + \sqrt{2}\cdot x + 1)}$

Diese Berechnungen erklären die Integration

#28: $\int g\ dx$

#29: $$\frac{\sqrt{2}\cdot ATAN(\sqrt{2}\cdot x - 1)}{4} + \frac{\sqrt{2}\cdot ATAN(\sqrt{2}\cdot x + 1)}{4} - \frac{\sqrt{2}\cdot LN\left(\dfrac{x^2 - \sqrt{2}\cdot x + 1}{x^2 + \sqrt{2}\cdot x + 1}\right)}{8}$$

3. Polarkoordinatendarstellung von Kegelschnitten (sehr wichtig beim Studium der Planetenbewegung)

Wir starten mit der kartesischen Darstellung einer Ellipse, deren linker Brennpunkt im Koordinatenursprung liegt (e^2 = a^2-b^2)

#30: $$\frac{(x - e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Wir substitutieren b durch √(a^2-e^2)

#31: $$\frac{(x - e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{\sqrt{(a^2 - e^2)}^2} - 1 = 0$$

#32: $$\frac{x^2\cdot(a^2 - e^2) + 2\cdot e\cdot x\cdot(e^2 - a^2) + a^2\cdot y^2 - (a^2 - e^2)^2}{a^2\cdot(a^2 - e^2)} = 0$$

Einführung von Polarkoordinaten

#33: $$\frac{(r\cdot COS(\varphi))^2\cdot(a^2 - e^2) + 2\cdot e\cdot(r\cdot COS(\varphi))\cdot(e^2 - a^2) + a^2\cdot(r\cdot SIN(\varphi))^2 - (a^2 - e^2)^2}{a^2\cdot(a^2 - e^2)} = 0$$

#34: $$\frac{e^2\cdot r^2\cdot \text{COS}(\varphi)^2 + 2\cdot e\cdot r\cdot (a^2 - e^2)\cdot \text{COS}(\varphi) + a^4 - a^2\cdot (2\cdot e^2 + r^2) + e^4}{a^2\cdot (e^2 - a^2)} = 0$$

#35: $$\text{FACTOR}\left(\frac{e^2\cdot r^2\cdot \text{COS}(\varphi)^2 + 2\cdot e\cdot r\cdot (a^2 - e^2)\cdot \text{COS}(\varphi) + a^4 - a^2\cdot (2\cdot e^2 + r^2) + e^4}{a^2\cdot (e^2 - a^2)} = 0,\ \text{Rational}\right)$$

#36: $$\frac{(e\cdot r\cdot \text{COS}(\varphi) + a^2 + a\cdot r - e^2)\cdot (e\cdot r\cdot \text{COS}(\varphi) + a^2 - a\cdot r - e^2)}{a^2\cdot (a + e)\cdot (e - a)} = 0$$

#37: $$\text{SOLVE}\left(\frac{(e\cdot r\cdot \text{COS}(\varphi) + a^2 + a\cdot r - e^2)\cdot (e\cdot r\cdot \text{COS}(\varphi) + a^2 - a\cdot r - e^2)}{a^2\cdot (a + e)\cdot (e - a)} = 0,\ r\right)$$

#38: $$r = \frac{e^2 - a^2}{e\cdot \text{COS}(\varphi) - a} \vee r = \frac{e^2 - a^2}{e\cdot \text{COS}(\varphi) + a}$$

Die positive Lösung ist gegeben durch

#39: $$r = \frac{e^2 - a^2}{e\cdot \text{COS}(\varphi) - a}$$

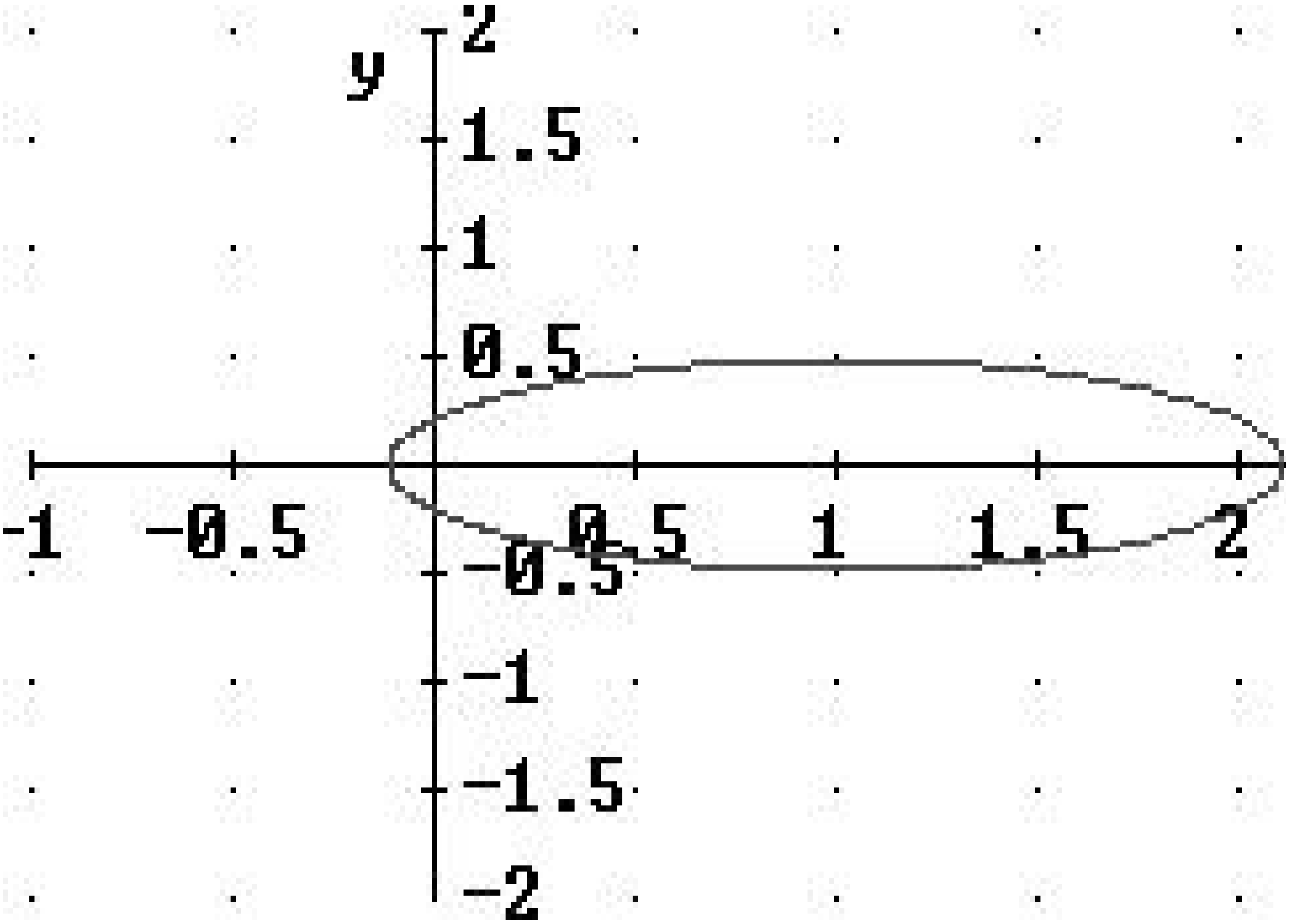
und nach Einführung der Exzentrität ε=e/a erhalten wir

$$\#40: \quad r = \frac{e^2 - \left(\frac{e}{\varepsilon}\right)^2}{e\cdot\cos(\varphi) - \frac{e}{\varepsilon}}$$

$$\#41: \quad r = \frac{e\cdot(\varepsilon^2 - 1)}{\varepsilon\cdot(\varepsilon\cdot\cos(\varphi) - 1)}$$

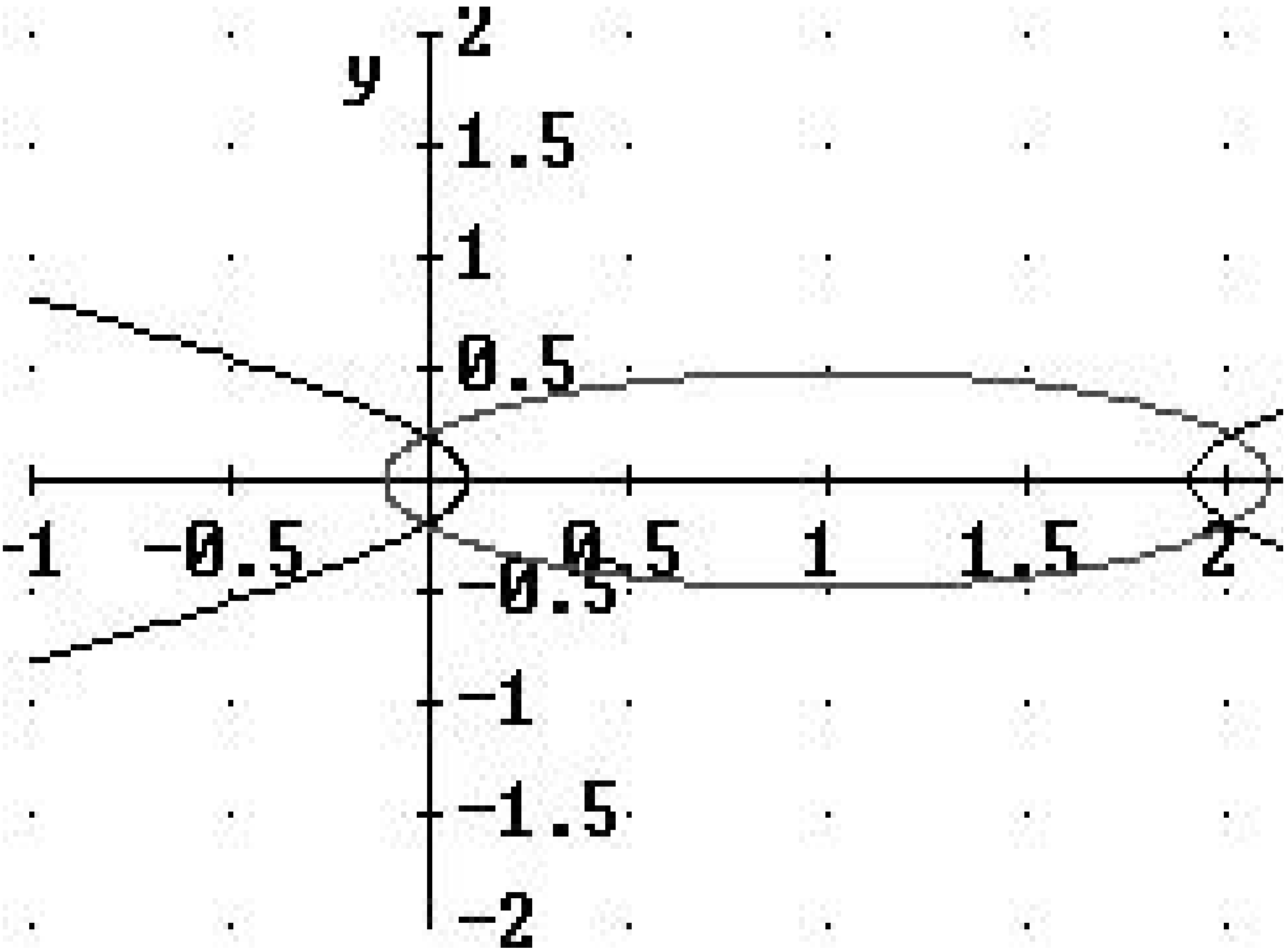
Graph einer Ellipse in Polarkoordinaten

$$\#42: \quad r = \frac{1\cdot(0.9^2 - 1)}{0.9\cdot(0.9\cdot\cos(\varphi) - 1)}$$



und einer Hyperbel

$$\#43: \quad r = \frac{1\cdot(1.1^2 - 1)}{1.1\cdot(1.1\cdot\cos(\varphi) - 1)}$$



5. Einige Ergebnisse von DERIVE, welche vielleicht Kopfschmerzen bereiten, oder - besser - zum Nachdenken veranlassen

#44: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx$

#45: 0

#46: SOLVE($x^2 + x + 1 = 0$, x)

#47: $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot \hat{\imath}}{2} \vee x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot \hat{\imath}}{2}$

#48: SOLVE($x^3 - 3\cdot x - 1 = 0$, x)

#49: $x = -2\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{9}\right) \vee x = 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \vee x = -2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$

#50: $\int \mathrm{EXP}(-x^2)\,dx$

#51: $\frac{\sqrt{\pi}\cdot\mathrm{ERF}(x)}{2}$

#52: $\prod_{k=1}^{n} k$

#53: $n!$

#54: $\mathrm{SOLVE}([x\cdot y - 8 = 0,\ x^2 - 5\cdot x + y + 2 = 0],\ [x,\ y])$

#55: $[x = -1 \wedge y = -8,\ x = 2 \wedge y = 4,\ x = 4 \wedge y = 2]$