MATHEMATIK-KOMMISSION
Übergang Schule–Hochschule

Mathematik-Kommission „Übergang Schule–Hochschule“
Netzwerkbüro · FU Berlin · Arnimallee 7 · 14195 Berlin

Ministerialdirektor Udo Michallik
Generalsekretär der Kultusministerkonferenz
Postfach 11 03 42
10833 Berlin

Kopie an
Prof. Dr. Petra Stanat, Direktorin des IQB
Frank Weigand, IQB

Mathematik-Kommission
„Übergang Schule–Hochschule“

Sprecher: Prof. Dr. Wolfram Koepf (DMV)
Stellvertreter: Prof. Dr. Gilbert Greefrath (GDM)
Hans-Jürgen Elschenbroich (MNU)

Geschäftsstelle: Stephanie Schiemann
Netzwerkbüro Schule–Hochschule der DMV
Freie Universität Berlin
Arnimallee 7
14195 Berlin

URL: www.mathematik-schule-hochschule.de
E-Mail: schule-hochschule@mathematik.de

Datum: 11. Januar 2012

Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik
Gemeinsame Stellungnahme der Verbände „Deutsche Mathematiker-Vereinigung“ (DMV), „Gesellschaft für Didaktik der Mathematik“ (GDM) und „Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts“ (MNU)

Sehr geehrter Herr Michallik,

vielen Dank für die Einladung, an der Entwicklung der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife mitzuwirken. Die mathematischen Fachgesellschaften DMV, GDM und MNU nehmen Ihr Angebot gerne an und haben die Mathematik-Kommission „Übergang Schule-Hochschule“ der mathematischen Fachgesellschaften mit der inhaltlichen Arbeit beauftragt. Die Fachgesellschaften würden es sehr begrüßen, wenn möglichst viele Anregungen der Kommission aufgenommen würden.

Unsere Stellungnahme umfasst kritische Anmerkungen entlang des Aufbaus der Standards, zu denen Sie einzelne konkrete Textvorschläge im Anhang finden. Unserer Meinung nach würden die Standards an Gehalt gewinnen, wenn sie detaillierter formuliert würden. Für Rückfragen stehen wir selbstverständlich jederzeit zur Verfügung.

Den Lernaufgaben kommt für die Konkretisierung der Bildungsstandards eine entscheidende Rolle zu. Die bisher vorgelegten Aufgaben weisen teilweise Mängel auf und sind in der Auswahl einseitig. Wir bedanken uns daher für die beim Treffen in Berlin gegebene Zusage, zur letztlich gefällten Auswahl der Lernaufgaben rechtzeitig vor der endgültigen Veröffentlichung Gelegenheit zu bekommen, diese kritisch-konstruktiv zu analysieren und Verbesserungsvorschläge zu unterbreiten.

Mit freundlichen Grüßen

Wolfram Koepf

Prof. Dr. Wolfram Koepf, Sprecher der Kommission

Ch. Bär

Prof. Dr. Christian Bär, Präsident der DMV

H.-G. Weigand

Prof. Dr. Hans-Georg Weigand, Vorsitzender der GDM

J. Langlet

Jürgen Langlet, Bundesvorsitzender der MNU

Stellungnahme von DMV, GDM und MNU zum Entwurf vom 25.08.2011 der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik.

Insgesamt stimmen wir der Kompetenzorientierung und der vorliegenden Struktur der vorgelegten Bildungsstandards zu, bezüglich der folgenden Punkte sehen wir allerdings Änderungsbedarf:

• Wir sehen die Anschlussfähigkeit an die Standards zum mittleren Bildungsabschluss gewährleistet. Die von allen Beteiligten gewünschte und geforderte Nachhaltigkeit des Gelernten aus der Sekundarstufe I wird durch den Satz „Im Sinne kumulativen Lernens werden sie (die Inhalte und erworbenen Kompetenzen aus der Sekundarstufe I) beständig vertieft und erweitert und können damit auch Gegenstand der Abiturprüfung sein" erfreulich klar zum Ausdruck gebracht. Leider wird dies im Weiteren allerdings nicht wieder aufgegriffen. Es wäre wünschenswert – auch wenn Redundanzen entstehen – wenn diese Nachhaltigkeit sowohl bei den einzelnen Kompetenzen und Leitideen als auch bei den Aufgaben konkretisiert würde.

• Die Winterschen Grunderfahrungen bekommen in der Umformulierung stellenweise eine etwas andere Ausrichtung und sollten daher näher am Original formuliert werden.

Konkreter Änderungsvorschlag im Anhang A1 (eng an Winter angelehnt)

• Wir begrüßen die Ausführungen zu elektronischen Werkzeugen im Mathematikunterricht einschließlich der Bezugnahme auf die KMK-Empfehlung vom 7.5.2009 (S. 6). Wir sind aber der Meinung, dass sie bezogen auf Sinn und unterrichtlichen Nutzen noch weiter ausgeführt werden sollten.

• Auf die Formulierung „Taschenrechner aller Art" (S. 6) sollte verzichtet werden. Statt der Bezeichnung „elektronische Werkzeuge" erscheint uns der Begriff „digitale Mathematik-Werkzeuge" präziser und griffiger zu sein.

Digitale Mathematik-Werkzeuge ersetzen nicht das händische Rechnen, sondern ergänzen dies in geeigneter Weise. Es wäre wünschenswert, dass die Länder in ihren Lehrplänen rechnerfreie Anteile und einen inhaltlichen Mindestkanon für das jeweilige Bundesland formulieren, um den Übergang zur beruflichen Ausbildung und zur Hochschule genauer zu definieren. Hierzu sollte die KMK die zuständigen Ministerien auffordern.

Konkreter Änderungsvorschlag im Anhang A2

• Die Visualisierung eines Kompetenzmodells halten wir für sinnvoll und wünschenswert, hier vor allem auch das Aufgreifen der drei Anforderungsbereiche, die den Lehrkräften aus dem Abitur vertraut sind. Einige Rückmeldungen haben aber ergeben, dass die vorgelegte Fassung zu Missverständnissen führen kann. Zum einen kann das Schema auf S. 7 dazu führen, dass Inhalte nicht mit Kompetenzen in Verbindung gebracht werden. Deshalb präferieren wir, von prozessbezogenen und inhaltsbezogenen Kompetenzen zu sprechen.

Auch wenn allgemeine/prozessbezogene Kompetenzen, inhaltsbezogene Kompetenzen/Leitideen, Anforderungsbereiche und Anforderungsniveau eigentlich zu einem vierdimensionalen Schema führen, halten wir das vorliegende dreidimensionale Schema für hinreichend. Es sollte allerdings deutlicher gemacht werden, dass Anforderungsbereiche und Anforderungsniveaus verschiedene Aspekte darstellen und Anforderungsniveaus in der Grafik nicht erfasst sind.

Konkreter Änderungsvorschlag im Anhang A3

• Es sollten Grundvorstellungen in den Standards konkret ausgewiesen werden (z. B. Änderungsrate als eine Grundvorstellung der Ableitung; (Re-)Konstruktion von Beständen aus Änderungen als eine Grundvorstellung des Integrals), um die Bedeutung und das Verstehen der mathematischen Inhalte zu betonen.

• Die Realisierung des erhöhten Niveaus sollte nicht nur durch zusätzliche Inhalte, sondern insbesondere auch durch den Grad der Präzisierung der zentralen mathematischen Begriffe und Argumentationen geleistet werden.

Konkreter Änderungsvorschlag im Anhang A4

• Bei der Unterscheidung zwischen grundlegendem und erhöhtem Niveau sollte mit mehr Details gearbeitet werden. Hier wäre es an einigen Stellen äußerst wichtig festzulegen, welche Teile des Anforderungsbereichs III (Verallgemeinern und Reflektieren) auch im grundlegenden Niveau erreicht werden sollen.

Konkreter Änderungsvorschlag im Anhang A5 (exemplarisch eine Fassung für K1).

Anmerkungen zu den Leitideen:

Algorithmus und Zahl (L1): Approximation und Algorithmus sind als mathematische Begriffe untrennbar miteinander verbunden.

Konkreter Änderungsvorschlag im Anhang A6

Deshalb sollte das Ziel der Konstruktion einer Approximation (z. B. einer reellen Zahl, der lokalen Änderungsrate) als Zweck eines Algorithmus deutlicher gemacht werden.

Konkreter Änderungsvorschlag im Anhang A7

Raum und Form (L3): Die Vernetzung zwischen Analytischer Geometrie und Analysis fehlt völlig. Eine Vernetzungsmöglichkeit bieten Parameterdarstellungen von Geraden mit Aspekten funktionalen Denkens (L3 und L4). Wir sehen außerdem die Gefahr, dass die Reduzierung der analytischen Geometrie auf „Hieb- und Stichaufgaben" (Fokus auf Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen) dem Ziel, räumliches Vorstellungsvermögen zu entwickeln, nicht dienlich ist.

Konkreter Änderungsvorschlag im Anhang A8

Funktionaler Zusammenhang (L4): Die Begriffe Grenzwert und Approximation sollten in den Standards deutlicher herausgehoben werden. Der Begriff des Grenzwertes ist das zentrale Charakteristikum der Analysis und bietet die Gelegenheit, die Grenzen der Anschauung argumentativ zu erkunden. Die Approximation komplizierter Funktionen durch einfachere ist ein zentrales Ziel der Analysis. So liefert die Ableitung einer Funktion an einem Punkt eine lokale Approximation um diesen Punkt durch eine lineare Funktion, die Krümmung liefert eine lokale Approximation durch einen Kreis, u.s.w.

Konkreter Änderungsvorschlag im Anhang A9

Es sollte explizit genannt werden, dass einfache Stammfunktionen auch mit Hilfe von Integrationsregeln ermittelt werden können.

Konkreter Änderungsvorschlag im Anhang A10

Es ist wichtig, die Funktionenklassen aus den MSA konkret noch einmal zu benennen (lineare, quadratische, Sinus-, Exponentialfunktion). Dabei ist Ziel, dass für diese Funktionenklassen Grundkenntnisse vertiefend wiederholt werden (Funktionsgraph händisch skizzieren können, typische Eigenschaften wie z. B. Wachstumsverhalten kennen). Die explizite Erarbeitung der jeweiligen Regeln und Verfahren sollte für zwei Funktionenklassen, ganzrationale und eine weitere (z. B. Exponentialfunktion), durchgeführt werden.

Durch den Einsatz digitaler Mathematik-Werkzeuge ist es möglich, das Spektrum der Funktionenklassen zu erhöhen.

Daten und Zufall (L5): Der Modellierungsaspekt und die Bedeutung von Simulationen als zentraler Weg, stochastisches Denken und Verständnis aufzubauen (z. B. bei Hypothesentest), sollten stärker betont werden. Die Unterscheidung in B1 (Konfidenzintervalle) und B2 (Hypothesentests) sollte so verändert werden, dass bei der Wahl von B1 auch Grundkenntnisse im Sinne B2 gelegt werden (und umgekehrt).

Konkreter Änderungsvorschlag im Anhang A11

Insgesamt ist das erhöhte Anforderungsniveau bei der Leitidee L5 im Vergleich zu den anderen Leitideen besonders stark vertreten. Dieses Ungleichgewicht erscheint uns problematisch.

Zu den Lernaufgaben:

Es wird ausdrücklich begrüßt, dass Lernaufgaben in die Bildungsstandards aufgenommen wurden und der Fokus nicht auf zentralen Prüfungsaufgaben liegt. Allerdings sollten neben beispielhaften Lernaufgaben auch beispielhafte Prüfungsaufgaben vorgestellt werden, um den Unterschied zwischen beiden zu verdeutlichen.

Die Verwendung der digitalen Werkzeuge in den drei im Entwurf vom August 2011 integrierten Lernaufgaben erscheint einseitig und es besteht die Gefahr, dass der Eindruck einer „Knopf-Druck-Mathematik" entstehen könnte, der wir entgegenwirken möchten. Insbesondere sollten im Erwartungshorizont keine Werkzeugbeschreibungen auftreten, sondern es sollte eine sprachliche Kommentierung auf mathematischer Basis erfolgen. Die Vielfalt der auf dem Markt vertretenen Geräte und Software sollte ebenfalls zum Ausdruck kommen. Durch die Verwendung einer zu kleinen Auswahl von Soft- und Hardware könnte der Eindruck entstehen, dass andere Produkte nicht geeignet sind.

Die Auswahl der Lernaufgaben sollte hinsichtlich der Inhalte, Prozesse und Werkzeuge ein repräsentatives Spektrum darstellen. Aktuell liegt der Schwerpunkt bei den Prozesskompetenzen beim „Modellieren", es fehlen innermathematische Beispiele, zentrale Inhalte (z. B. Matrizen) werden nicht angesprochen, und es wird bei den digitalen Mathematik-Werkzeugen hauptsächlich die Tabellenkalkulation verwendet.

Konkrete Detailanalyse im Anhang A12 (exemplarisch für die Aufgabe 3.1.)

Anhang

zur Stellungnahme von DMV, GDM und MNU zum Entwurf vom 25.08.2011 der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik.

Zur Fachpräambel

A1 Wintersche Grunderfahrungen:

- ***Mathematik als nützliche Disziplin:***
  Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
- ***Mathematik als geistige Schöpfung:***
  Mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
- ***Mathematik als Schule des Denkens:***
  in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

A2 Digitale Mathematik-Werkzeuge

***Textvorschlag** (als Ersatz für S. 6, dritt- und viertletzte Zeile):*

In dem Maße, wie Computer unverzichtbarer Teil unseres alltäglichen Lebens geworden sind, sind sie auch zu Werkzeugen in der Mathematik und im Mathematikunterricht geworden.

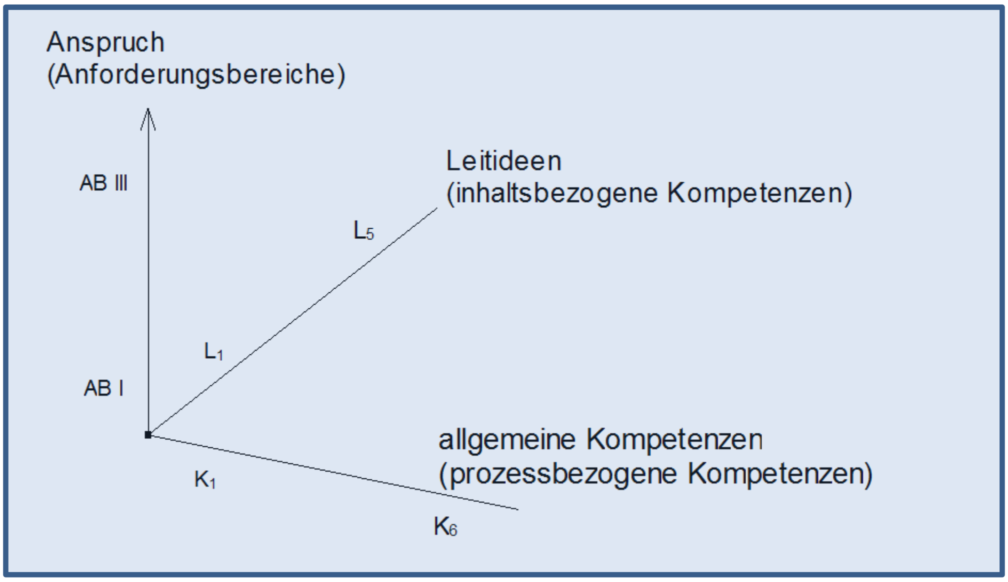
Digitale Mathematik-Werkzeuge haben ihren Sinn und Wert einerseits in der Entlastung von langwierigen und fehleranfälligen Rechnungen sowie andererseits und vor allem in der Unterstützung und Beförderung von Lernprozessen durch dynamische Visualisierungen, sinnvolles Explorieren und erhöhte Schüleraktivitäten. Keinesfalls ist damit eine „Mathematik auf Knopfdruck" intendiert.

Heute übliche digitale Mathematik-Werkzeuge sind Tabellenkalkulation, Geometriesoftware, Funktionenplotter und Computeralgebra. Diese Werkzeuge sind – teilweise in reduzierter Form und manchmal ineinander integriert – in sogenannten „Handhelds" wie Grafiktaschenrechnern oder Computeralgebrasystem-Taschenrechnern vorhanden.

Da von einer weiteren rasanten Hardware- und Software-Entwicklung auszugehen ist, verbietet sich eine Festschreibung eines Produktes an dieser Stelle.

Digitale Mathematik-Werkzeuge unterstützen und ergänzen das mathematische Arbeiten, sie ersetzen es nicht. Bei der Umsetzung in länderspezifische Lehrpläne sollte deshalb insbesondere ausgewiesen werden, welche Fähigkeiten auch hilfsmittelfrei oder ‚händisch' (d.h. ohne digitale Mathematik-Werkzeuge) beherrscht werden sollten. Ein hilfsmittelfreier Prüfungsteil soll Basiskompetenzen abprüfen.

A3 Kompetenzmodell



Ein derartiges Kompetenzmodell muss sowohl für das grundlegende Anforderungsniveau als auch für das erhöhte Anforderungsniveau erstellt werden.

A4 Unterscheidung zwischen grundlegendem und erhöhtem Niveau

Textvorschlag für Vorspann 2 (S. 9):

Das Erreichen des erhöhten Niveaus sollte nicht nur durch zusätzliche Inhalte, sondern insbesondere auch durch den Grad der Präzisierung der zentralen mathematischen Begriffe und Argumentationen angestrebt werden.

A5 Detailliertere Unterscheidung in den Kompetenzbereichen, hier am Beispiel K1

Anforderungsbereich III (grundlegendes Niveau):
Die Schülerinnen und Schüler können ...

- *Beweise und mathematische Argumente nutzen und erläutern*

Anforderungsbereich III (erhöhtes Niveau):
Die Schülerinnen und Schüler können ...

- *Beweise und mathematische Argumentationen nutzen, erläutern und entwickeln*

Zu den Leitideen:

Zur Leitidee Algorithmus und Zahl (L1):

A6 Im Vortext zu L1 sollte folgende Ersetzung vorgenommen werden: *„infinitesimale Methoden“ ersetzen durch „approximative Methoden“.*

A7 Der Punkt „Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral" sollte ersetzt werden durch:
Die Schülerinnen und Schüler können die sukzessive Approximation von Größen und Zahlen (z.B. Ableitung oder bestimmtes Integral) durch geeignete Algorithmen nachvollziehen.

Zur Leitidee Raum und Form (L3)

A8 Vorschlag für Ergänzung vor dem 1. Spiegelpunkt (S. 18):

- *räumliche Vorstellungen für reale geometrische Objekte (z.B. Würfel, Quader, Kugel, platonische Körper) entwickeln*

Zur Leitidee Funktionaler Zusammenhang (L4):

A9 Bzgl. Approximation sollte der folgende Aspekt bei L4 nach dem 2. Spiegelpunkt ergänzt werden:

- *können die Ableitung als Approximation durch lineare Funktionen deuten*

A10 Bzgl. Stammfunktionen:

- Die Kompetenz „Funktionen mittels Stammfunktionen integrieren" sollte erweitert werden durch „*... und in einfachen Fällen Stammfunktionen durch Integrationsregeln ermitteln.*"

Zur Leitidee Daten und Zufall (L5):

Hier sind die Änderungen gegenüber dem Entwurf fett hervorgehoben.

A11 *Die Leitidee vernetzt Begriffe und Methoden zur Aufbereitung und Interpretation von statistischen Daten mit solchen zur **Modellierung** von zufalls**abhängigen** Situationen.*

*In Ausweitung und Vertiefung stochastischer Vorstellungen der Sekundarstufe I umfasst diese Leitidee insbesondere den Umgang mit mehrstufigen Zufallsexperimenten, die Untersuchung und Nutzung von Verteilungen sowie einen Einblick in Methoden der beurteilenden Statistik, **zu deren Zugang Simulationen ein wesentliches Werkzeug darstellen**.*

Die Schülerinnen und Schüler können (grundlegendes und erhöhtes Niveau)

- *exemplarisch statistische Erhebungen planen, **auswerten** und **fremde Auswertungen kritisch** beurteilen*
- *Sachverhalte mit Hilfe von Baumdiagrammen oder Vierfeldertafeln **modellieren,** untersuchen und damit **auch** Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten lösen*
- ***Mehrstufige Zufallsexperimente modellieren und stochastische Unabhängigkeit und Abhängigkeit von Teilvorgängen anhand einfacher Beispiele untersuchen und begründen***
- *die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen **adäquat zur Modellierung realer Situationen** nutzen **und insbesondere prüfen, ob die Modellannahmen gerechtfertigt sind***
- *in einfachen **Sachkontexten unter Beachtung der Rolle des Stichprobenumfangs ($\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz)** aufgrund von Stichproben auf die Gesamtheit schließen*
- *für binomialverteilte Zufallsgrößen Aussagen über die unbekannte Wahrscheinlichkeit sowie die Unsicherheit und Genauigkeit dieser Aussagen begründen (B1) ersetzen durch: **mit Hilfe von Konfidenzintervallen Aussagen über eine unbekannte Wahrscheinlichkeit treffen sowie die Unsicherheit und Genauigkeit dieser Aussagen begründen** (B1)*
- *Hypothesentests **konzeptuell mit Hilfe von Simulationen verstehen, adäquat einsetzen und deren Ergebnisse im Sachkontext** interpretieren (B2)*

- (anstelle der beiden letzten Spiegelpunkte als Ersatz):
  Die Normalverteilung als Beispiel einer stetigen Verteilung zur Modellierung zufälliger Phänomene (z.B. Summen wiederholter Würfelwürfe, Körpergrößen in einer Gruppe) anwenden

Zu den Lernaufgaben:

A 12 Detailanalyse der Aufgabe 3.1.

Die Aufgabenstellung verlangt eine Modellierung mit einer Exponentialfunktion, also hier wohl mit $f(x) = a \cdot \exp(x)$. Dies erfolgt in der vorgelegten Lösung durch eine Regression mit Hilfe einer Tabellenkalkulation. Durch die Vorgabe der Regression ist eine bestimmte Exponentialfunktion festgelegt, die auch in den folgenden Teilaufgaben verwendet wird. Jedoch gibt es noch andere sinnvolle funktionale Modelle.

Aufgabenstellung und Lösungen harmonieren in mehreren Aspekten nicht miteinander:

- Es ist zum einen nicht erkennbar, dass man mit dem Werkzeug Tabellenkalkulation und mit Regressionsfunktionen arbeiten kann bzw. soll.
- Zum anderen wird in der Lösung nicht gezeigt, dass man mit einer Exponentialfunktion den Vorgang „gut modellieren“ kann. Der „mögliche Kommentar“ in den Lösungshinweisen dazu ist zumindest strittig. Die Güte eines Modells zeigt sich nicht am Anfangswert.
- In der Lösung wird mit einem „Streuplot“ gearbeitet, was in der Aufgabenstellung nicht ersichtlich ist.
- Der zweite Teil der Aufgabe (Abweichungen nach 2000) ist nur dann sinnvoll zu bearbeiten, wenn man den vorher angegebenen Lösungsweg mit der Regression kennt!
- In der Lösung zu Teil 03 werden Aufsummieren und Integrieren gleich gesetzt. Das Integrieren ist in diesem Fall aber nicht zwingend, man kann die Lösung auch mit bloßem Aufsummieren erhalten.

Insgesamt sind die Aufgabe und ihr Kontext interessant, aber u. E. im Schwierigkeitsgrad sehr hoch angesetzt. Deshalb muss deutlicher werden, dass sie über Prüfungsanforderungen hinausgeht und außerdem nur für solche Lerngruppen geeignet ist, die sehr spezielle Vorkenntnisse mit Tabellenkalkulation haben (zu Regression).

Es besteht auch die Gefahr, dass der vorgestellte Einsatz von Regressionsfunktionen den Vorwurf der „Knopfdruck-Mathematik“ provozieren kann und dass die Aufgabe ohne weitere Kommentierung daher nicht als positives Beispiel für den intendierten sinnvollen Einsatz digitaler Mathematik-Werkzeuge angesehen wird.