Integralrechnung und Computeralgebra

Wolfram Koepf

In diesem Artikel wird die historische Entwicklung der Flächen- und Volumenmessung beschrieben, die zum heutigen Integralbegriff führte.

Während diese Fragestellungen bereits im Altertum untersucht wurden, ist die Differentialrechnung erst 350 Jahre alt. Aber erst mithilfe der Differentialrechnung lassen sich die heute unterrichteten Integrationstechniken gewinnen.

Während die Differentialrechnung vom algorithmischen Standpunkt recht einfach ist – vgl. [5] und [6, Abschn. 2.7] – ist das Integrieren oft beschwerlich und kompliziert. Falls man kein Ergebnis findet, weiß man nicht, ob man sich nur ungeschickt angestellt hat oder ob es prinzipiell „nicht geht“ und man also vergeblich nach einer „einfachen“ Integralfunktion sucht.

Es ist weniger bekannt, dass auch diese Fragestellung bereits im 19. Jahrhundert von Liouville untersucht wurde und ebenfalls beantwortet werden kann. Auf dem Satz von Liouville aufbauend hat Risch in den 1960er-Jahren einen Algorithmus angegeben, mit dem das Integrieren automatisiert wird und einem Computeralgebrasystem überlassen werden kann.

Flächen und Volumina in der Antike

In der Blüte der griechischen Mathematik wurde die Geometrie auf eine solide Grundlage gestellt. Das gesamte geometrische Wissen wurde auf wenige entscheidende Prinzipien zurückgeführt. Wir sprechen heute von *Axiomen*. Diese Erkenntnisse wurden in den Elementen des Euklid verewigt. Von dieser Basis aus war es vor allem Archimedes (282–212 v. Chr.), der die Flächen- und Volumenbestimmung, die die Grundlage für die Integralrechnung darstellt, voranbrachte (Abb. 1).

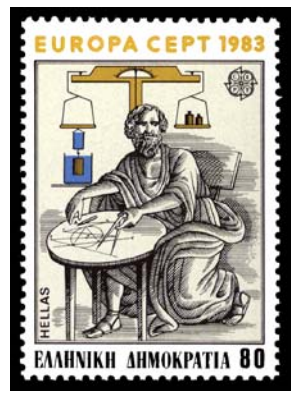

***Abb. 1** Archimedes von Syrakus*

Mit ihrer Beweistechnik der doppelten *reductio ad absurdum* konnten die Griechen zeigen, dass

(a) der Umfang eines Kreises proportional zum Durchmesser ist: $U = \pi d = 2\pi r$;
(b) der Flächeninhalt eines Kreises proportional zum Quadrat des Radius ist: $F = \sigma r^2$.

Es war die Erkenntnis von *Archimedes von Syrakus*, dass die beiden Proportionalitätskonstanten übereinstimmen: $\sigma = \pi$. Diese Zahl π ist eine der berühmtesten Naturkonstanten.

Archimedes approximierte die Zahl π, indem er den Flächeninhalt eines Kreises von innen und von

DOI 10.1007/s00287-008-0302-9

Prof. Dr. Wolfram Koepf
Fachbereich Mathematik, Universität Kassel,
Heinrich-Plett-Straße 40, 34132 Kassel
E-Mail: koepf@mathematik.uni-kassel.de

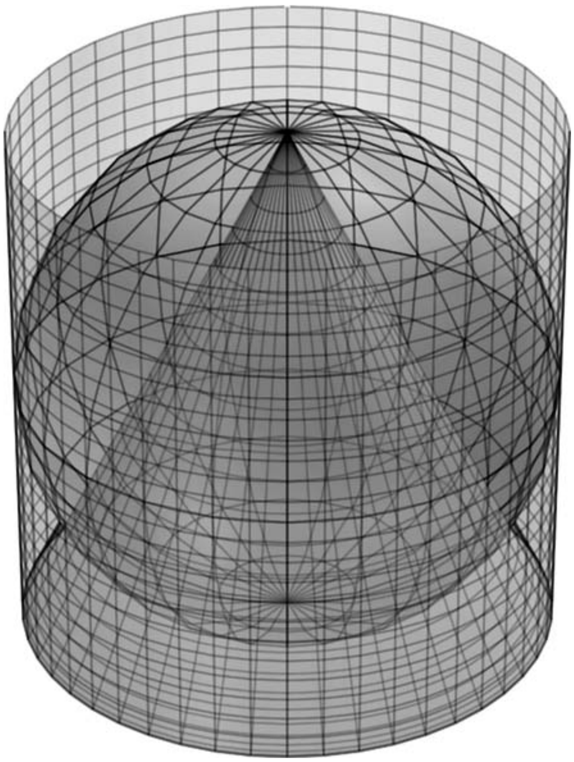

Abb. 2 Das Verhältnis der Volumina von Kegel, Kugel und Zylinder

außen durch den Flächeninhalt regelmäßiger Vielecke annäherte. Durch Betrachtung des regelmäßigen 96-Ecks (!) fand er heraus, dass

$$3{,}140845\ldots = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = 3{,}142857\ldots .$$

Archimedes war völlig überwältigt von seiner Erkenntnis, dass die Volumeninhalte von Kegel, Kugel und Zylinder bei gleichem Radius (s. Abb. 2) im Verhältnis 1 : 2 : 3 zueinander stehen.

Das Integral als Flächeninhalt

Erst die Einführung des Differentiationskalküls, der im Artikel [5] beschrieben wurde, durch Isaac Newton (1642–1727) und Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz[1] (1646–1716) im 17. Jahrhundert und die Erkenntnis, dass Differentiation und Integration zueinander inverse Operationen sind, hat die Integralrechnung wieder einen entscheidenden Schritt vorangebracht.

[1] Jurist, Naturwissenschaftler, Politiker, Philosoph, Historiker, Theologe und Diplomat. Er wird von manchen als einer der *letzten Universalgelehrten* bezeichnet.

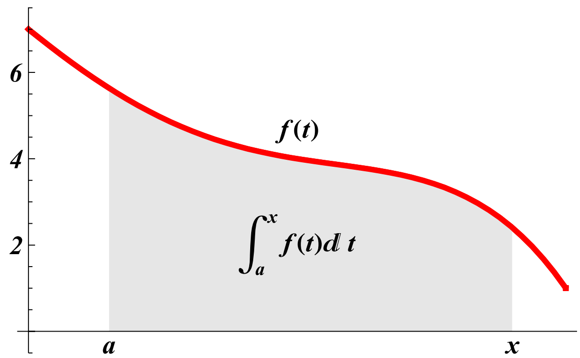

Abb. 3 Das Integral als Flächeninhalt mit variabler oberer Grenze

Wenn für eine nichtnegative Funktion $f(t)$ durch

$$\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

der Flächeninhalt im Intervall $[a, b]$ zwischen dem Graphen von $f(t)$ und der t-Achse bezeichnet wird (Abb. 3), so ist die Einführung der *Integralfunktion*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

mit variabler oberer Grenze x relevant, und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,.$$

Diese Erkenntnis wurde zuerst von Newtons Lehrer Isaac Barrows ausgesprochen, der sie aus physikalischen Erwägungen herleitete (wie im Übrigen auch Archimedes die Volumenformel für die Kugel!).

Mit dem Hauptsatz wird nämlich aus der *Produktregel*

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

durch Integration sofort die *Regel der partiellen Integration*

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int v'(x)u(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

eine Integrationstechnik, die sich – bei Kenntnis eines der Integrale – zur Berechnung des zweiten Integrals auf der rechten Seite eignet. Ebenso folgt aus der Kettenregel die *Substitutionstechnik für Integrale*.

Mit diesen neuentwickelten Methoden gelang es Newton, aus seinem *Kraftgesetz* $F = ma$ (Kraft = Masse mal Beschleunigung) und dem Gravitationsgesetz über die Anziehungskraft zweier Massen die *Keplerschen Planetengesetze* rein mathematisch herzuleiten! Kepler hatte empirisch beobachtet, dass sich Planeten auf Ellipsen bewegen, wobei sich die Sonne in einem der beiden Brennpunkte befindet, der Radiusvektor eines umlaufenden Planeten in gleichen Zeiten gleiche Flächeninhalte durchläuft und die Quadrate der Umlaufzeiten umgekehrt proportional zu den Kuben der zugehörigen großen Halbachsen sind. Newtons Erfolg zeigt die Mächtigkeit dieser Integrationsverfahren.

Dennoch blieben Fragen offen. Leibniz war natürlich klar, wie man ein Polynom integriert. Er fragte sich, ob sich auch jede gebrochen rationale Funktion elementar integrieren lässt. Hier blieb er sich unsicher, da er die Integralfunktion

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$$

nicht bestimmen konnte. Dies lag daran, dass es ihm nicht gelang, das Nennerpolynom in Faktoren zu zerlegen. Eine Faktorisierung des Nenners in reelle quadratische Faktoren liefert mittels einer Partialbruchzerlegung – einer Darstellung als Summe – sofort das Resultat. Hätte Leibniz mit komplexen Zahlen gerechnet, die damals noch nicht anerkannt waren, so hätte er das Problem lösen können. Die dritte binomische Formel liefert

$$x^4 + 1 = (x^2 + \mathrm{i})(x^2 - \mathrm{i})\ ,$$

wobei i eine Zahl mit der Eigenschaft $\mathrm{i}^2 = -1$ ist. Man nennt i die *imaginäre Einheit*. Aus dieser Darstellung kann man mittels der *pq*-Formel eine Faktorisierung in vier lineare Faktoren bestimmen, die aber ebenfalls die imaginäre Einheit enthalten. Fasst man allerdings jeweils zwei Faktoren wieder geschickt zusammen, so erhält man die reelle Faktorisierung

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)\ ,$$

mit welcher sich Leibniz' Fragestellung lösen lässt: Die Integralfunktion lässt sich nun durch Logarithmen (und inverse Tangensfunktionen), also durch „elementare Funktionen", darstellen. Man teste dies mit einem Computeralgebrasystem! Dies fand Leibniz' „wissenschaftlicher Ziehsohn" Johann Bernoulli (1667–1748) heraus, der auch feststellte, dass man bei *allen* gebrochen rationalen Funktionen so vorgehen kann. Allerdings wollen wir festhalten, dass das Symbol $\sqrt{2}$, welches in der Eingabe nicht vorkam, für die Darstellung der Integralfunktion unverzichtbar ist.

Der Bernoulli-Algorithmus hat aber ein generelles Problem: Er beruht auf der Erkenntnis, dass sich jedes reelle Polynom in lineare und quadratische reelle Faktoren zerlegen lässt. Leider ist hierfür aber kein *Algorithmus* bekannt, und man kann sogar beweisen, dass es einen generellen Algorithmus gar nicht geben kann, falls der Grad des Polynoms größer als 4 ist. Soll ein Computeralgebrasystem jedoch derartige Integrationsprobleme exakt symbolisch lösen können, so müssen wir dies dem System „beibringen", und hierfür wird ein Algorithmus benötigt, der die Lösung berechnet.

Rationale Integration und der Risch-Algorithmus

Zum Glück kann man aber die Fragestellung modifizieren. In der Regel hat ja die gegebene gebrochen rationale Funktion keine beliebigen reellen Koeffizienten, sondern beispielsweise – wie in unserem obigen Fall – ganzzahlige Koeffizienten. In dieser Situation kann man aber – anders als im „allgemeinen reellen Fall" – die Integralfunktion algorithmisch bestimmen! Es stellt sich heraus, dass man in diesem Fall die vollständige Faktorisierung des Nennerpolynoms nicht benötigt, sondern eine sogenannte quadratfreie Faktorisierung genügt, welche man leicht algorithmisch bestimmen kann. Dies hat Ostrogradsky 1845 erkannt.

Dieser Algorithmus zerlegt die Integralfunktion jeder gebrochen rationalen Funktion in einen gebrochen rationalen Anteil und einen Teil, welcher als Summe logarithmischer Funktionen dargestellt werden kann, wobei inverse Tangensfunktionen zu den Logarithmen gerechnet werden können. Dieser Algorithmus liefert dann auch beispielsweise automatisch die gesuchte Zahl $\sqrt{2}$, die zur Darstellung der Lösung unseres obigen Beispiels benötigt wird. Die algorithmische Integration gebrochener rationaler Funktionen wird in Kapitel 12 des Lehrbuchs [6] ausführlich behandelt.

Die rationale Integration ist natürlich nur ein Spezialfall. Sehen wir uns die Integration elementarer Funktionen einmal etwas genauer an. Die Integralfunktionen

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x \quad \text{und} \quad \int x e^{x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

kann man leicht ausrechnen. Sucht man nun aber nach der Integralfunktion $\int e^{x^2} \,\mathrm{d}x$ und findet hierfür keine Darstellung, so stellt sich die Frage, ob es eine *elementare* Integralfunktion von e^{x^2} überhaupt gibt, also eine Funktion, die sich mithilfe rationaler Operationen aus Exponential- und Logarithmusfunktionen darstellen lässt. So lange man auch sucht: Bei diesem Beispiel wird man nicht fündig werden! Dies hat Liouville im Jahr 1835 gezeigt. Eine sehr schöne Darstellung des *Satzes von Liouville* und des Beweises, dass e^{x^2} keine „einfache" Integralfunktion hat, findet man in [1, Abschn. 6.6].

Der Satz von Liouville ist viel allgemeiner. Er liefert eine ähnliche Aussage, wie wir am Beispiel der gebrochen rationalen Funktionen bereits kennengelernt haben: Ist die Integralfunktion einer elementaren Funktion $f(x)$ elementar, so besteht sie aus zwei Teilen, einem Anteil, welcher sich rational aus den Funktionen, die in $f(x)$ bereits vorkommen, zusammensetzt, sowie einem Teil, der als Summe von Logarithmusfunktionen dargestellt werden kann.

Risch [7] hat 1969 erkannt, dass man dies zu einem Algorithmus zusammenfügen kann. Der Satz von Liouville liefert einen *Ansatz* für die gesuchte Integralfunktion, deren Bestandteile man dann mithilfe einer Art Koeffizientenvergleich bestimmen kann. Die gesuchten Logarithmen erfüllen eine Differentialgleichung, deren Lösung algorithmisch bestimmt werden kann. Die Details sind natürlich wesentlich komplizierter als im rationalen Fall.

Anders als bei einer Serie von Substitutionen und partiellen Integrationen liefert dieser Algorithmus nach endlich vielen Schritten entweder einen *Beweis* dafür, dass keine elementare Integralfunktion existiert, oder die Integralfunktion wird berechnet und kann ausgegeben werden. Der *Risch-Algorithmus* zur Integration elementarer Funktionen ist beispielsweise in *Maple* eingebaut.

Zusammenfassung

Dieser Artikel gibt einen Einstieg in die Theorie der algorithmischen Integration. Weiterführende Bücher zum Thema sind [2] und [4]. Viele der historischen Bemerkungen stammen aus dem sehr lesenswerten Buch von Edwards [3].

Literatur

1. Behrends E (2004) Analysis, Bd. 2. Vieweg, Wiesbaden
2. Bronstein M (1997) Symbolic Integration I. Springer, Berlin
3. Edwards Jr CH (1979) The Historical Development of the Calculus. Springer, New York
4. Geddes KO, Czapor SR, Labahn G (1992) Algorithms for Computer Algebra. Kluwer, Boston Dordrecht London
5. Koepf W (1993) Eine Vorstellung von MATHEMATICA und Bemerkungen zur Technik des Differenzierens. Didakt Math 21:125–139
6. Koepf W (2006) Computeralgebra. Eine algorithmisch orientierte Einführung. Springer, Berlin Heidelberg. http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf/CA
7. Risch RH (1969) The problem of Integration in Finite Terms. Trans Am Math Soc 139:167–189