16 Fachvortraege boten Gelegenheit, für die weitere Arbeit der Fachgesellschaften auf dem Gebiet der IuK die erforderliche wissenschaftliche Fundierung und die Diskussion über die weitere Vorgehensweise zu befördern. Das wissenschaftliche Programm des Workshops und die intensiven Diskussionsrunden werden sicher zur weiteren Qualifizierung der von den Fachgesellschaften vorbereiteten und beim BMBF zur Förderung beantragten Projekte zur Entwicklung fachbezogener Informationssysteme beitragen.

Karl Hantzschmann (Rostock)

Themen und Anwendungen der Computeralgebra

Algebraische Darstellung transzendenter Funktionen

Wolfram Koepf

Ich möchte in diesem Bericht algorithmische Methoden vorstellen, die im wesentlichen in diesem Jahrzehnt Einzug in die Computeralgebra gefunden haben. Die hauptsächlichen Ideen gehen auf Stanley [34] und Zeilberger [46]–[49] zurück, vgl. die Beschreibung [35], und haben ihre Wurzeln teilweise bereits im letzten Jahrhundert (siehe z. B. [6]–[7]), gerieten aber auf Grund der Komplexität der auftretenden Algorithmen wieder in Vergessenheit.

Eine der Kernfragen kann hierbei so formuliert zu werden: Worin liegt der wesentliche Unterschied zwischen der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ und beispielsweise der Funktion $g(x) = e^x + |x|/10^{1000}$, der dazu führt, daß alle Mathematiker die Exponentialfunktion f als elementare Funktion auffassen und nicht g, obwohl sich diese beiden Funktionen auf einem großen Bereich der reellen Achse numerisch kaum unterscheiden?

Oder ein Beispiel aus der diskreten Mathematik: Warum erhält die Fakultätsfunktion $a_n = n!$ den Vorzug gegenüber $b_n = n! + n/10^{1000}$ oder irgendeiner anderen diskreten Funktion?

Obwohl die Beispiele die bekanntesten stetigen bzw. diskreten **transzendenten** (nicht-algebraischen) Funktionen betreffen, ist die Antwort auf diese Fragen rein **algebraischer Natur**: Die Exponentialfunktion f ist nämlich charakterisiert durch die folgende algebraische Eigenschaft:

- f ist differenzierbar, und $f'(x) = f(x)$ sowie $f(0) = 1$

und die Fakultätsfunktion wird charakterisiert durch:

- $a_0 = 1$, und für alle $n \geq 0$ gilt $a_{n+1} = (n+1)\, a_n$.

In der Folge will ich aufzeigen, in welcher Form diese Eigenschaften dazu geeignet sind, transzendente Funktionen in der Computeralgebra darzustellen.

Die gegebenen Eigenschaften sind **Strukturaussagen** für die betreffenden Funktionen. Bei der geringsten Änderung geht diese Struktur verloren. Beispielsweise kann die Funktion $g(x) = e^x + |x|/10^{1000}$ durch keine analoge Vorschrift charakterisiert werden. Dagegen ist die Funktion $h(x) = e^x + x/10^{1000}$ beispielsweise durch die Differentialgleichung $(x-1)\, h''(x) - x\, h'(x) + h(x) = 0$ mit den Anfangsbedingungen $h(0) = 1$ und $h'(0) = 1 + 10^{-1000}$ gegeben.

Das Besondere (und Gemeinsame) an Exponential- bzw. Fakultätsfunktion besteht also darin, daß diese eine homogene lineare Differentialgleichung und jene eine homogene lineare Rekursionsgleichung erfüllt, wobei Differentialgleichung sowie Rekursionsgleichung Polynomkoeffizienten haben und beide erster Ordnung sind.

Verallgemeinern wir diesen Sachverhalt nun zunächst auf stetige Funktionen einer Variablen und nennen eine Funktion $f(x)$ **holonom**, falls sie eine homogene lineare Differentialgleichung mit Polynomkoeffizienten in x erfüllt. Stanley [34] zeigte, daß Summe und Produkt holonomer Funktionen sowie die Komposition mit algebraischen Funktionen wieder holonome Funktionen liefern. Beke [6]–[7] hat bereits vor 100 Jahren Algorithmen beschrieben, mit welchen die Differentialgleichung für Summe bzw. Produkt von f und g aus den Differentialgleichungen für f und g bestimmt werden können!

Analog nennt man eine diskrete Funktion a_n holonom, falls sie eine homogene lineare Rekursionsgleichung mit Polynomkoeffizienten in n erfüllt. Summe und Produkt holonomer diskreter Funktionen sind wieder holonom, und es gibt Algorithmen zur Berechnung der entsprechenden Rekursionen (s. [33], [26]).

Was haben wir hiermit nun gewonnen? Ignorieren wir einmal, daß $e^x, \sin x, \cos x, \arctan x, \arcsin x$ etc. transzendente Funktionen sind, und stellen wir lediglich ihre holonomen Differentialgleichungen $f' = f$, $f'' = -f$, $f'' = -f$, $(1+x^2)f'' + 2xf' = 0$, $(x^2-1)f'' + xf' = 0$ etc. in Rechnung, so können wir nun aus diesen Differentialgleichungen mit reiner Polynomarithmetik (wir brauchen eigentlich nur lineare Algebra, vgl. [33], [26]) holonome Differentialgleichungen für Summen und Produkte solcher Funktionen, beispielsweise für $f(x) = \arcsin^2 x$ (nämlich $(x^2-1)f''' + 3xf'' + f' = 0$), erzeugen. Doch damit nicht genug: Für die Koeffizienten a_n der formalen Potenzreihe von $\arcsin^2 x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ folgt dann automatisch die holonome Rekursionsgleichung $n(1+n)(2+n)a_{n+2} = n^3 a_n$, welche (glücklicherweise) nur die zwei Terme a_{n+2} und a_n enthält, sich daher lösen läßt und zu der Darstellung

$$\arcsin^2 x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n\, n!^2}{(1+n)\,(1+2n)!} x^{2n+2}$$

führt (vgl. [17], [40], [19]–[20]).

Oder notieren wir uns lediglich die holonomen Rekursionen rationaler Funktionen sowie die der Funktionen

$$(mn+b)!\,, \qquad \frac{1}{(mn+b)!} \qquad (m \in \mathbb{Z}) \qquad \text{sowie} \qquad a^n \tag{1}$$

(d. h. wir geben sie unserem favorisierten Computeralgebrasystem in geeigneter Form bekannt), so lassen sich nun für alle möglichen durch Addition und Multiplikation erzeugten Funktionen holonome Rekursionen herleiten, beispielsweise die beiden Rekursionen

$$nF(n+2,k) - (1+3n+n^2)F(n+1,k) + (1+n)^2 F(n,k) = 0$$

und

$$k(2+k)^2 F(n,k+2) - (1+k)(1+3k+k^2)(3+3k+k^2)F(n,k+1) + k(1+k)^3 F(n,k) = 0$$

für $F(n,k) = \frac{n!+k!^2}{k}$. Die beschriebenen Algorithmen zur Bestimmung der holonomen Differential- und Rekursionsgleichungen wurden von Salvy und Zimmermann implementiert und stehen in dem Package `gfun` der Maple Share Library zur Verfügung [33]. Ich habe diese Algorithmen in einer automatisierten Form in Mathematica implementiert, bei der die holonome Gleichung einer Eingabefunktion ausgehend von den holonomen Gleichungen primitiver Funktionen – zu denen auch beispielsweise Funktionen wie `BesselJ[n,x]` oder `LegendreP[n,x]` gehören – durch rekursives Durchlaufen des darstellenden Baumes berechnet wird [25]. Dieses Package erzielt obige Ergebnisse durch die Aufrufe `HolonomicDE[ArcSin[x]^2,x]`, `HolonomicRE[(n!+k!^2)/k,n]` bzw. `HolonomicRE[(n!+k!^2)/k,k]`.

Eine wichtige Fragestellung der Kombinatorik ist, zu einer gegebenen Funktion $F(n,k)$ die Summe

$$s(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(n,k)$$

zu berechnen, wobei über alle $k \in \mathbb{Z}$ zu summieren ist. (In der Praxis sind jedoch häufig nur endlich viele Terme von Null verschieden.) Die Idee, aus Rekursionsgleichungen des Summanden $F(n,k)$ eine Rekursion für $s(n)$ herzuleiten, stammt von Sister Celine Fasenmyer ([13], siehe [32], Kapitel 14), und Zeilberger [46] griff diese Idee wieder auf.

Ist $F(n,k)$ speziell ausgedrückt als Produkt von Termen der Form (1), so ist $F(n,k)$ ein **hypergeometrischer Term**, d. h., sowohl $F(n+1,k)/F(n,k)$ als auch $F(n,k+1)/F(n,k)$ sind rational bzgl. beider Variablen n und k. In dieser Situation findet der (schnelle) Zeilberger-Algorithmus ([47], s. auch [27] und [30]) eine holonome Darstellung, d. h. eine holonome Rekursion, für $s(n)$. Eine Verallgemeinerung für Quotienten rational-linearer Fakultätsterme wurde in [23] gegeben.

Der Zeilberger-Algorithmus baut auf dem von Gosper [16] gefundenen Entscheidungsalgorithmus für die unbestimmte Summation auf. Für $s(n) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n}{k}^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ findet der Zeilberger-Algorithmus beispielsweise die holonome Rekursion $(1+n)\,s(n+1) = 2(1+2n)\,s(n)$, welche (glücklicherweise) wieder nur zwei Terme hat. Daher erhalten wir die Darstellung

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!^2}\,.$$

Im allgemeinen wird die resultierende Rekursion bzw. Differentialgleichung natürlich mehr als zwei Terme enthalten. Aber auch dann enthält diese zum einen eine interessante Strukturinformation (z. B. über die Orthogonalität eines Polynomsystems [48]) und kann zudem eine für numerische Zwecke nützliche Vorschrift darstellen (vgl. [11]–[12]).

Die gefundene Strukturinformation kann insbesondere zur **Identifikation** transzendenter Funktionen herangezogen werden. Um z. B. die Identität

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{2k}{n}$$

(vgl. [36]) zu überprüfen – diese ist nicht trivial, da die beiden *Summanden* **nicht** dieselben Rekursionen bzgl. k und n erfüllen! – brauchen wir nur zu zeigen, daß beide *Summen* derselben Rekursion

$$(n+2)^2 s(n+2) - (16+21n+7n^2)s(n+1) - (n+1)^2 s(n) = 0$$

genügen – dies macht der Zeilberger-Algorithmus – sowie dieselben Anfangswerte $s(0) = 1$ und $s(1) = 2$ haben (dies ist trivial).

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Funktion ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0$)

$$\begin{aligned} V(\alpha,\beta,\gamma) &= (-1)^{\alpha+\beta+\gamma} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-d)\Gamma(d/2-\gamma)\Gamma(\alpha+\gamma-d/2)\Gamma(\beta+\gamma-d/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(d/2)\Gamma(\alpha+\beta+2\gamma-d)M^{\alpha+\beta+\gamma-d}} \\ &\quad \cdot {}_2F_1\left(\left.\begin{array}{c} \alpha+\beta+\gamma-d\,, \quad \alpha+\gamma-d/2 \\ \alpha+\beta+2\gamma-d \end{array}\right| z\right) \end{aligned}$$

(${}_2F_1$ stellt hierbei die Gaußsche hypergeometrische Reihe dar, s. z. B. [1], Kapitel 15), welche bei der Berechnung von Feynman-Diagrammen eine Rolle spielt [14][1], für die wir die Rekursion

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & (\alpha+\beta-d+\gamma)\,(2\,\alpha-d+2\,\gamma)\,V(\alpha,\beta,\gamma) + 2\,\alpha\,(1+\alpha)\,M^2\,(z-1)\,z\,V(\alpha+2,\beta,\gamma) \\ & + \alpha\,M\,(2\,\alpha+2\,\beta-2\,d+4\,\gamma-2\,z-4\,\alpha\,z-2\,\beta\,z+3\,d\,z-4\,\gamma\,z)\,V(\alpha+1,\beta,\gamma) \end{aligned}$$

sowie analoge Rekursionen bzgl. der Variablen β und γ erhalten. Diese können dann beispielsweise zur numerischen Berechnung herangezogen werden.

Implementierungen des Zeilberger-Algorithmus gibt es von Zeilberger [47] und Koornwinder [27] in Maple und von Paule/Schorn [30] in Mathematica. Immer, wenn die Eingabefunktion eine Summe `Sum[f,{k,k1,k2}]` oder eine hypergeometrische Funktion enthält, ruft meine Implementierung [25] die Paule-Schorn-Implementierung auf. Die in [23] gegebene Verallgemeinerung steht in Implementierungen in REDUCE [22] und Maple zur Verfügung.

Zeilberger betrachtete in [46] die allgemeinere Situation von Funktionen F mehrerer diskreter und stetiger Variabler. Sind es d Variablen und hat man d (unabhängige) möglicherweise gemischte homogene partielle Differential-Differenzengleichungen mit Polynomkoeffizienten (bzgl. aller Variablen) für F, nennen wir F ein holonomes System (vgl. Dann legen diese Gleichungen F zusammen mit geeigneten Anfangswerten bereits eindeutig fest.

Insbesondere gilt dies also, wenn das gegebene System holonomer Gleichungen separiert ist, d. h., wenn in jeder der Gleichungen nur Ableitungen bzgl. einer der stetigen Variablen bzw. nur Shifts bzgl. einer der diskreten Variablen vorkommen. Beispielsweise bilden die Legendre-Polynome $F(n,x) = P_n(x)$ ([1], Kapitel 22) auf Grund ihrer Differentialgleichung

$$(x^2-1)F''(n,x) + 2xF'(n,x) - n(1+n)F(n,x) = 0 \tag{2}$$

sowie ihrer Rekursionsgleichung

$$(n+2)F(n+2,x) - (3+2n)xF(n+1,x) + (n+1)F(n,x) = 0 \tag{3}$$

zusammen mit den Anfangsbedingungen

$$F(0,0) = 1\,, \quad F(1,0) = 0\,, \quad F'(0,0) = 0\,, \quad F'(1,0) = 1$$

[1] Jochem Fleischer hat mich auf einen Druckfehler in Formel (31) aufmerksam gemacht.

Faßt man die auftretenden (partiellen) Differentiationen und Indexverschiebungen als Operatoren und die Differenzen-Differentialgleichungen als Operatorengleichungen auf, so stellen diese ein **polynomiales Gleichungssystem** in einem nichtkommutativen Polynomring dar. Ist nämlich x eine stetige Variable und D_x der zugehörige Ableitungsoperator, so ist wegen der Produktregel $D_x(xf) - xD_xf = f$, und folglich hat man den Kommutator $D_xx - xD_x = 1$. Ist andererseits k eine diskrete Variable und K der zugehörige Indexverschiebungsoperator $Ka_k = a_{k+1}$ (Aufwärtsshift), so gilt $K(ka_k) - kKa_k = (k+1)a_{k+1} - ka_{k+1} = a_{k+1} = Ka_k$, und folglich die Kommutatorregel $Kk - kK = K$. Entsprechendes gilt für die restlichen Variablen, während alle anderen Kommutatoren verschwinden.

Das Umformen eines durch gemischte Differenzen-Differentialgleichungen gegebenen holonomen Systems stellt sich in dem betrachteten nichtkommutativen Polynomring als ein polynomiales Eliminationsproblem dar, welches mit nichtkommutativen Gröbnerbasen-Methoden gelöst werden kann ([5], [15], [18], [46], [49], [37]–[39], [24]–[25]). Als Beispiel diene $F(n,k) = \binom{n}{k}$. Hierfür gilt die Pascalsche Dreiecksbeziehung $F(n+1,k+1) = F(n,k)+F(n,k+1)$ sowie die reine Rekursion $(n+1-k)F(n+1,k)-(n+1)F(n,k) = 0$ bzgl. n, welche in Operatornotation $(KN-1-K)F(n,k) = 0$ sowie $((n+1-k)N-(n+1))F(n,k) = 0$ lauten, wobei $NF(n,k) = F(n+1,k)$ den Verschiebungsoperator bzgl. n bezeichne. Somit erhält man das darstellende Polynomsystem

$$KN - 1 - K \qquad \text{sowie} \qquad (n+1-k)N - (n+1)\ .$$

Die Gröbnerbasis des erzeugten Linksideals bzgl. der Termordnung (k,n,K,N) (lexikographisch) ist

$$\Big\{(k+1)K + k - n, (n+1-k)N - (n+1), KN - 1 - K\Big\}\ ,$$

d. h. also, daß auf diesem Wege automatisch die reine Rekursion $(k+1)F(n,k+1) + (k-n)F(n,k) = 0$ bzgl. k erzeugt wurde.

Als weiteres Beispiel betrachte ich die Legendre-Polynome, für die die Beziehungen (2)–(3) gelten. Hier haben wir also das Polynomsystem

$$(x^2-1)D_x^2 + 2xD_x - n(1+n) \qquad \text{sowie} \qquad (n+2)N^2 - (3+2n)xN + (n+1)\ .$$

Die Gröbnerbasis des erzeugten Linksideals bzgl. der Termordnung (D_x, N, n, x) enthält die Beziehungen

$$\begin{aligned}(x^2-1)P'_{n+1}(x) &= (1+n)\left(xP_{n+1}(x) - P_n(x)\right)\\ (x^2-1)P'_n(x) &= (1+n)\left(P_{n+1}(x) - xP_n(x)\right)\end{aligned} \tag{4}$$

zwischen den Legendre-Polynomen und ihren ersten Ableitungen, wobei die D_x-Potenzen weitestgehend eliminiert wurden. Man sieht also, daß auf diesem Wege neue Beziehungen (zwischen den Binomialkoeffizienten bzw. zwischen den Ableitungen der Legendre-Polynome) **hergeleitet** wurden.

Analog lassen sich mit dieser Methode Rekursionen für **holonome Summen** herleiten. Betrachten wir beispielsweise

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n} F(n,k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k(x)\ ,$$

dann findet man mit dem Produktalgorithmus zunächst die holonomen Rekursionen

$$(n-k+1)F(n+1,k) - (1+n)F(n,k) = 0$$

sowie

$$(2+k)^2F(n,k+2) - (3+2k)(n-k-1)xF(n,k+1) + (n-k)(n-k-1)F(n,k) = 0$$

für den Summanden $F(n,k)$. In der Gröbnerbasis des von den zugehörigen Polynomen

$$(n-k+1)N - (1+n) \qquad \text{sowie} \qquad (2+k)^2K^2 - (3+2k)(n-k-1)xK + (n-k)(n-k-1)$$

bzgl. der Termordnung (k,n,K,N) erzeugten Linksideals liegt das k-freie Polynom

$$(2+n)^2K^2N^2 - K(2+n)(3+2n)(K+x)N + (1+n)(2+n)(1+K^2+2Kx)\ ,$$

welches einer k-freien Rekursion für $F(n,k)$ entspricht. Da bei der Summation über $k \in \mathbb{Z}$ die verschobenen Summen

$$s(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(n,k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(n,k+1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(n,k+2)$$

alle dieselbe Summenfunktion $s(n)$ liefern, liefert die Substitution $K := 1$ (nach Division durch $2+n$) die gültige holonome Rekursion

$$(2+n)s(n+2) - (3+2n)(1+x)s(n+1) + 2(1+n)(1+x)s(n) = 0$$

für $s(n)$.

Die beschriebene Methode hat ein nicht-diskretes Analogon zur Bestimmung einer holonomen Differentialgleichung bestimmter Integrale [2].

Die Berechnung nichtkommutativer Gröbnerbasen wird von den Systemen FELIX [3], MAS [28], Bergman [4] sowie REDUCE [29] unterstützt. Eine Maple-Implementierung liegt mit dem Package `Mgfun` [10] vor. Die Resultate dieses Berichts wurden mit [29] erzielt.

Die gezeigte Methode ist zur Generierung von Identitäten im Prinzip universell einsetzbar (vgl. [24]–[25]), benötigt jedoch den komplizierten Apparat des (nichtkommutativen) Buchberger-Algorithmus und erbt die damit verbundenen Nachteile. Eine wesentliche Hürde stellt die Komplexität bei Problemen mit vielen Variablen dar.

Interessiert man sich speziell lediglich für die Erzeugung von Identitäten zwischen den Ableitungen $F^{(j)}(n+k,x)$ $(j,k \in \mathbb{N}_0)$ eines holonomen Systems $F(n,x)$, muß dies aber nicht unbedingt sein. Es geht in vielen Fällen bereits mit **linearer Algebra**! Dazu muß man aber mehr Information hineinstecken. Die geeignete über die holonomen Beziehungen hinausgehende Information besteht in einer **Ableitungsregel** für $F(n,x)$, sofern erhältlich, wie sie etwa für die Legendre-Polynome durch (4) gegeben ist. Es zeigt sich, daß in der Praxis holonome Systeme (wie beispielsweise Systeme orthogonaler Polynome etc., s. z. B. [1], 22.8, und [21]) so strukturstark sind, daß eine Ableitungsregel verfügbar ist. Man kann zeigen, daß Summe und Produkt solcher Systeme in der Regel auch wieder holonome Systeme mit Ableitungsregel darstellen [24], und Abhängigkeiten zwischen den Ableitungen $F^{(j)}(n+k,x)$ $(j,k \in \mathbb{N}_0)$ können mit reiner linearer Algebra gefunden werden.

Auf diese Weise wurde z. B. die Beziehung

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= -\frac{2(\alpha+n)(\beta+n)}{(\alpha+\beta+n)(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)} P_{n-1}^{(\alpha,\beta)\prime}(x) \\ &\quad + \frac{2(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)} P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x) + \frac{2(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)} P_{n+1}^{(\alpha,\beta)\prime}(x) \end{aligned}$$

für die Jacobi-Polynome $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ([1], Kapitel 22) automatisch erzeugt [24]. Hierbei war die Zielsetzung, daß die auftretenden Koeffizientenfunktionen von $P_{n+k}^{(\alpha,\beta)\prime}(x)$ nicht von x abhängen sollen. Dies ist für Fragestellungen aus der Spektralapproximation (s. [9], § 2.3.2) von Bedeutung. Außerdem ergibt sich durch Integration eine geschlossene Darstellung der Stammfunktion von $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Zuletzt will ich darauf verweisen, daß die vorliegende Beschreibung natürlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben kann. Ich konnte weder auf den Gosper-Algorithmus ([16], s. auch [23]) noch auf die Wilf-Zeilberger-Theorie der WZ-Paare und rationalen Zertifikate eingehen ([41]–[45], [23]). Auch Petkovšeks Algorithmus [31], der alle hypergeometrischen Termlösungen holonomer Rekursionsgleichungen berechnet, konnte keine Berücksichtigung finden.

Mein Dank gilt Prof. Peter Deuflhard, der mich ermutigt hat, mich mit dem vorliegenden Thema zu beschäftigen, sowie Herbert Melenk, mit dem ich wichtige Gespräche über nichtkommutative Gröbnerbasen führen konnte.

Literatur

[1] Abramowitz, M. und Stegun, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publ., New York, 1964.

[2] Almkvist, G. und Zeilberger, D.: The method of differentiating under the integral sign. J. Symbolic Computation **10**, 1990, 571–591.

[3] Apel, J. und Klaus, U.: FELIX. In: Computeralgebra in Deutschland: Bestandsaufnahme, Möglichkeiten, Perspektiven. Herausgegeben von der Fachgruppe Computeralgebra der GI, DMV, GAMM, Passau und Heidelberg, 1993, 198–206.

[4] Backelin, J. und Fröberg, R.: How we proved that there are exactly 924 cyclic 7-roots. Proc. of ISSAC 91, ACM Press, New York, 1991, 103–111.

[5] Becker, Th. und Weispfenning, V.: *Gröbner bases. A computational approach to commutative algebra.* Springer, New York, 1991.

[6] Beke, E.: Die Irreducibilität der homogenen linearen Differentialgleichungen. Math. Ann. **45**, 1894, 278–294.

[7] Beke, E.: Die symmetrischen Functionen bei linearen homogenen Differentialgleichungen. Math. Ann. **45**, 1894, 295–300.

[8] Björk, J.-E.: *Rings of Differential Operators.* North-Holland Mathematical Library **21**, Amsterdam, 1979.

[9] Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. und Zang, T. A.: *Spectral methods in fluid dynamics.* Springer Series in Computational Physics, New York–Berlin, 1988.

[10] Chyzak, F.: Holonomic systems and automatic proofs of identities. Rapport de Recherche **2371**, INRIA Research Report, Rocquencourt, 1994, available via anonymous ftp on `ftp.inria.fr`.

[11] Deuflhard, P.: On algorithms for the summation of certain special functions. Computing **17**, 1976, 37–48.

[12] Deuflhard, P.: A summation technique for minimal solutions of linear homogeneous difference equations. Computing **18**, 1977, 1–13.

[13] Fasenmyer, M. C.: A note on pure recurrence relations. Amer. Math. Monthly **56**, 1949, 14–17.

[14] Fleischer, J. und Tarasov, O. V.: Calculation of Feynman diagrams from their small momentum expansion, Z. Phys. C64, 1994, 413.

[15] Galligo, A.: Some algorithmic questions on ideals of differential operators. Proceedings EUROCAL 1985, Lecture Notes in Computer Science **204**, 1985, 413–421.

[16] Gosper Jr., R. W.: Decision procedure for indefinite hypergeometric summation. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **75**, 1978, 40–42.

[17] Graham, R. L., Knuth, D. E. und Patashnik, O.: *Concrete Mathematics. A foundation for Computer Science.* Addison-Wesley, Reading, Massachussets, second edition 1994.

[18] Kandri-Rody, A. und Weispfenning, V.: Non-commutative Gröbner bases in algebras of solvable type. J. Symbolic Computation **9**, 1990, 1–26.

[19] Koepf, W.: Power series in Computer Algebra. J. Symb. Comp. **13**, 1992, 581–603.

[20] Koepf, W.: A package on formal power series. Mathematica Journal **4**, 1994, 62–69.

[21] Koepf, W.: Algorithmic work with orthogonal polynomials and special functions. Konrad-Zuse-Zentrum Berlin (ZIB), Preprint SC 94-5, 1994.

[22] Koepf, W.: Reduce package for indefinite and definite summation. Konrad-Zuse-Zentrum Berlin (ZIB), Technical Report TR 94-9, 1994.

[23] Koepf, W.: Algorithms for the indefinite and definite summation. Konrad-Zuse-Zentrum Berlin (ZIB), Preprint SC 94-33, 1994.

[24] Koepf, W.: Identities for families of orthogonal polynomials and special functions. Konrad-Zuse-Zentrum Berlin (ZIB), Preprint SC 95-1, 1995.

[25] Koepf, W.: The identification problem for transcendental functions. Konrad-Zuse-Zentrum Berlin (ZIB), in Vorbereitung.

[26] Koepf, W. und Schmersau, D.: Spaces of functions satisfying simple differential equations. Konrad-Zuse-Zentrum Berlin (ZIB), Technical Report TR 94-2, 1994.

[27] Koornwinder, T. H.: On Zeilberger's algorithm and its q-analogue: a rigorous description. J. of Comput. and Appl. Math. **48**, 1993, 91–111.

[28] Kredel, H.: MAS. In: Computeralgebra in Deutschland: Bestandsaufnahme, Möglichkeiten, Perspektiven. Herausgegeben von der Fachgruppe Computeralgebra der GI, DMV, GAMM, Passau und Heidelberg, 1993, 222–228.

[29] Melenk, H. und Apel, J.: REDUCE package NCPOLY: Computation in non-commutative polynomial ideals. Konrad-Zuse-Zentrum Berlin (ZIB), 1994.

[30] Paule, P. und Schorn, M.: A Mathematica version of Zeilberger's algorithm for proving binomial coefficient identities. J. Symbolic Computation, erscheint.

[31] Petkovšek, M.: Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients. J. Symbolic Comp. **14**, 1992, 243–264.

[32] Rainville, E. D.: *Special functions.* The MacMillan Co., New York, 1960.

[33] Salvy, B. und Zimmermann, P.: GFUN: A package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable. AMS Transactions on Mathematical Software **20**, 1994, 163–177.

[34] Stanley, R. P.: Differentiably finite power series. Europ. J. Combinatorics **1**, 1980, 175–188.

[35] Strehl, V.: Definite Summation. In: Computeralgebra in Deutschland: Bestandsaufnahme, Möglichkeiten, Perspektiven. Herausgegeben von der Fachgruppe Computeralgebra der GI, DMV, GAMM, Passau und Heidelberg, 1993, 56–57.

[36] Strehl, V.: Binomial sums and identities. Maple Technical Newsletter **10**, 1993, 37–49.

[37] Takayama, N.: Gröbner basis and the problem of contigous relations. Japan J. Appl. Math. **6**, 1989, 147–160.

[38] Takayama, N.: An algorithm of constructing the integral of a module—an infinite dimensional analog of Gröbner basis. Proc. of ISSAC 90, ACM Press, New York, 1990, 206–211.

[39] Takayama, N.: Gröbner basis, integration and transcendental functions. Proc. of ISSAC 90, ACM Press, New York, 1990, 152–156.

[40] Wilf, H. S.: *Generatingfunctionology*. Academic Press, Boston, 1990.

[41] Wilf, H. S.: Identities and their computer proofs. "SPICE" Lecture Notes, 31. August–2. September 1993. Zu erhalten als anonymous ftp Datei `pub/wilf/lecnotes.ps` auf dem Server `ftp.cis.upenn.edu`.

[42] Wilf, H. S. und Zeilberger, D.: Rational functions certify combinatorial identities. J. Amer. Math. Soc. **3**, 1990, 147–158.

[43] Wilf, H. S. und Zeilberger, D.: Towards computerized proofs of identities. Bull. of the Amer. Math. Soc. **23**, 1990, 77–83.

[44] Wilf, H. S. und Zeilberger, D.: An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and "q") multisum/integral identities. Invent. Math. **108**, 1992, 575–633.

[45] Wilf, H. S. und Zeilberger, D.: Rational function certification of hypergeometric multi-integral/sum/"q" identities. Bull. of the Amer. Math. Soc. **27**, 1992, 148–153.

[46] Zeilberger, D.: A holonomic systems approach to special functions identities. J. Comput. Appl. Math. **32**, 1990, 321–368.

[47] Zeilberger, D.: A fast algorithm for proving terminating hypergeometric identities. Discrete Math. **80**, 1990, 207–211.

[48] Zeilberger, D.: The method of creative telescoping. J. Symbolic Computation **11**, 1991, 195–204.

[49] Zeilberger, D.: Three recitations on holonomic systems and hypergeometric series. Proc. of the 24th Séminaire Lotharingen. D. Foata (Herausgeber), Publ. I. R. M. A. Strasbourg, 5–37.

Netzinformationsdienste zu Mathematik und Computeralgebra

WWW Seiten für die Computeralgebra in Deutschland (CAIS)

Da das bisherige Informationssystem CAIS der Fachgruppe (technisch gesehen) schon in die Jahre gekommen ist, wurde nach einem neuen Medium gesucht, das den Ansprüchen an ein modernes Informationssystems gerecht wird – angesichts der momentanen Dynamik des World Wide Web eine leicht zu beantwortende Frage. Auch das Konrad-Zuse-Zentrum, das CAIS in seiner elib dankenswerterweise so lange beherbergte, stellt auf neue Informationssysteme um.

Client-Software für WWW – die sogenannten Browser – gibt es mittlerweile für alle wichtigen Plattformen und Betriebssysteme, mit oder ohne Graphikunterstützung. Am jeweiligen Universitätsrechenzentrum liegen die entsprechend konfigurierten Clients meist vor.

Das Informationssystem ist nun auf dem World Wide Web Server des Rechenzentrums der Universität Karlsruhe angesiedelt und kann über die URL `http://www.uni-karlsruhe.de/~CAIS` direkt angesprochen werden. Bitte beachten Sie die Tilde (sie ist ein wesentlicher Bestandteil der URL) und die Groß/Kleinschreibung. Wenn Sie immer von derselben Arbeitsumgebung aus durch das Netz der Computeralgebra surfen, dann werden bereits gelesene und neue Artikel in unterschiedlichen Farben angezeigt. Damit können Sie leicht feststellen, ob neue Eintragungen vorliegen.

Konferenzankündigungen und weitere Mitteilungen, die für das CAIS bestimmt sind, senden Sie bitte in Zukunft direkt an die speziell dafür eingerichtete Adresse `cais@rz.uni-karlsruhe.de`. Ein eigener Menupunkt in der CAIS-Homepage erleichtert dies zusätzlich.

Ein neu hinzugekommener Punkt ist `Computeralgebra-Arbeitsgruppen in Deutschland`. Hier werden Links auf die Homepages der einzelnen Arbeitsgruppen eingetragen. Die Verwaltung der Homepages liegt dann bei der jeweiligen Arbeitsgruppe auf ihrem eigenen Server - eine Aktualisierung ist damit leicht möglich. Dies ist ein großer Vorteil des Client-Server-Modells im WWW. Bitte senden Sie einzutragende Links direkt an `cais@rz.uni-karlsruhe.de`. Wir hoffen, durch eine möglichst umfangreiche Liste die Aktivitäten der Arbeitsgruppen eindrucksvoll unterstreichen zu können.

Gerhard Schneider (Karlsruhe)

Computeralgebra im Datennetz

Am 6. Februar trug Prof. Gonnet, ETH Zürich, im Karlsruher Informatikkolloquium über *How can a computer algebra system help solving problems from Computational Biochemistry* vor. Das Besondere dabei: der Vortrag wurde über die Baden-Württembergische Datenautobahn komplett mit Bild, Ton und Folien nach Freiburg übertragen, wo in drei Seminarräumen ebenfalls Zuhörer den Ausführungen aktiv folgten. Dank moderner Multimedia-Technik konnten auch Fragen aus Freiburg an den Vortragenden