Complex Variables, 1987, Vol. 8, pp 153–171
Photocopying permitted by license only

Extrempunkte und Stützpunkte in Familien nichtverschwindender schlichter Funktionen

WOLFRAM KOEPF

Fachbereich Mathematik, Freie Universität Berlin, Arnimallee 3, 1000 Berlin 33, Fed. Rep. Germany

Communicated by H Begehr

AMS (MOS): 30C45, 30C75, 30C80

1. EINFÜHRUNG

Sei A die Familie der analytischen Funktionen der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$. Versehen mit der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz ist A ein metrisierbarer lokal-konvexer Vektorraum. Topologische Begriffe beziehen sich in dieser Arbeit immer auf diese Topologie.

Eine abgeschlossene Teilmenge F von A ist genau dann kompakt, wenn sie lokal gleichmäßig beschränkt ist. Die abgeschlossene konvexe Hülle $\overline{\text{co}}\, F$ einer kompakten Menge F ist somit ebenfalls kompakt.

Als *Extrempunkt* einer Teilmenge F eines Vektorraums wird ein Punkt bezeichnet, der sich nicht konvex mittels anderer Punkte aus F darstellen läßt. Mit EF bezeichnen wir die Menge der Extrempunkte von F. In lokal-konvexen Räumen gilt der Satz von Kreĭn–Mil'man, der besagt, daß die Extrempunkte einer kompakten Menge die abgeschlossene konvexe Hülle aufspannen: $\overline{\text{co}}\, EF = \overline{\text{co}}\, F$.

* Dies ist ein Teil der Arbeit, die vom Fachbereich Mathematik der Freien Universität Berlin als Dissertation angenommen wurde.

Ist auch $\overline{\mathrm{co}}\, F$ kompakt– also innerhalb A immer bereits, wenn F kompakt ist—liegen die Extrempunkte von $\overline{\mathrm{co}}\, F$ alle in F.

Eine Vertiefung des Satzes von Kreĭn-Mil'man stellt der Satz von Choquet dar, der in metrisierbaren Räumen gilt. Die Darstellbarkeit der Punkte einer kompakten konvexen Menge mit Hilfe der Extrempunkte läuft dann auf eine Integraldarstellung mit Wahrscheinlichkeitsmaßen hinaus, deren Träger die Menge der Extrempunkte ist.

Als Beispiel für die vorliegende Situation dient die Familie

$$P := \{ f \in A \mid f(0) = 1,\ \mathrm{Re}\, f > 0 \}$$

der Funktionen mit positivem Realteil.

Die Formel von Herglotz, die er 1911 [15] ermittelte, besagt, daß jede Funktion p aus P eine Darstellung der Form

$$p(z) = \int_X \frac{1 + xz}{1 - xz}\, d\mu, \qquad X := \{ x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1 \} \tag{1}$$

besitzt, wobei μ ein Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß über X ist.

Es zeigt sich, daß die Extrempunkte von P die Kernfunktionen sind:

$$EP = \left\{ f \,\middle|\, f(z) = \frac{1 + xz}{1 - xz},\ x \in X \right\}. \tag{2}$$

Wegen des Satzes von Choquet sind (1) und (2) äquivalent. Für die Details der Anwendung der Sätze von Kreĭn-Mil'man und Choquet sei auf die Darstellungen in [4], [7], [14], [21] und [24] verwiesen.

Extrempunkte sind deshalb von Bedeutung, weil unter den Lösungsfunktionen eines linearen Extremproblems stets ein Extrempunkt ist.

Sei A' der Dualraum von A, d. h. der Raum der stetigen linearen Funktionale in A.

Ist $L \in A'$ nicht konstant in F, so heißt eine Funktion f aus F *Stützpunkt bezüglich* L von F, wenn für alle $g \in F$ gilt: $\mathrm{Re}\, Lf \geqq \mathrm{Re}\, Lg$.

Die Menge der Stützpunkte von F bezeichnen wir mit Spt F.

Ein Extrempunkt ist nicht notwendigerweise ein Stützpunkt, und umgekehrt weiß man im allgemeinen nicht, ob alle Stützpunkte extrem sind. Lediglich eine Feststellung gilt für eine beliebige kompakte Familie F. Es gibt zu jedem nicht konstanten Funktional $L \in A'$ einen Stützpunkt, der in $E\,\overline{\mathrm{co}}\, F$ liegt.

Wir betrachten hier Familien nichtverschwindender Funktionen, d. h. Teilmengen von

$$N_0 := \{ f \in A \mid f(0) = 1,\ f(z) \neq 0 \}.$$

Die Familie S_0 der schlichten, d. h. injektiven, N_0-Funktionen wurde u. a. von Duren und Schober [10]–[12] untersucht.

Davor waren hauptsächlich Familien mit der Normierung

$$f(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'(0) = 1 \tag{3}$$

untersucht worden. Insbesondere für Familien, die durch geometrische Eigenschaften des Bildgebiets definiert werden, sind in den siebziger Jahren viele Ergebnisse zustande gekommen.

Wir betrachten die Familien der *konvexen* und der *sternförmigen Funktionen* sowie der *schlichten symmetrischen Funktionen*

$$K_0 := \{ f \in S_0 \mid f(\mathbb{D}) \text{ ist konvex} \},$$

$$St_0 := \{ f \in S_0 \mid f(\mathbb{D}) \text{ ist sternförmig bezüglich } f(0) \},$$

$$S_0(\mathrm{sym}) := \{ f \in S_0 \mid f(\mathbb{D}) \text{ ist symmetrisch bzgl. der reellen Achse} \},$$

weiter die Familien der *Funktionen mit beschränkter Randdrehung*

$$V_0(k) := \{ f \in N_0 \mid \text{Randdrehung von } f \leqslant k\pi \}$$

für $k \in [2, 4]$ (siehe dazu die Arbeit von Paatero [20]), und die Menge der *nahezu-konvexen Funktionen*

$$C_0 := \{ f \in N_0 \mid \exists \varphi \text{ mit } \varphi(\mathbb{D}) \text{ konvex und } f'/\varphi' \in P_0 \},$$

wobei

$$P_0 := \{ f \in N_0 \mid \exists \delta \in \mathbb{R} \colon \operatorname{Re} e^{i\delta} f > 0 \},$$

(siehe dazu die analytische Definition von Kaplan [17] und die geometrische Beschreibung von Biernacki [2] und Lewandowski [18]–[19]). Wegen des Schlichtheitskriteriums von Noshiro–Warschawski (siehe z. B. [9], S. 47) sind nahezu-konvexe Funktionen schlicht.

Wir betrachten für $\beta \in [0, 1]$ auch die Teilfamilien

$$C_0(\beta) := \{ f \in S_0 \mid \exists \varphi \text{ mit } \varphi(\mathbb{D}) \text{ konvex},\ f'/\varphi' = p^\beta,\ p \in P_0 \}$$

der *nahezu-konvexen Funktionen der Ordnung* β (siehe dazu die geometrische Beschreibung von Pommerenke [22]).

Für alle $k \in [2, 4]$ gilt

$$V_0(k) \subset C_0(k/2 - 1)$$

(siehe z. B. [24], S. 24).

Eine Obermenge der nahezu-konvexen Funktionen ist die Familie der *linear erreichbaren Funktionen* (im starken Sinn)

$$L_0 := \{ f \in S_0 \mid \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D}) \text{ ist die Vereinigung von Strahlen} \}$$

(siehe Biernacki [2] und Sheil-Small [25]).

Ebenso wird für $\beta \in [0, 1]$ die Menge der *erreichbaren Funktionen der Ordnung* β durch

$$L_0(\beta) := \left\{ f \in S_0 \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D}) \text{ ist die Vereinigung von abgeschlossenen} \\ \text{Sektoren des Winkels } (1 - \beta)\pi \end{array} \right\}$$

definiert. Für alle $\beta \in [0, 1]$ ist

$$C_0(\beta) \subset L_0(\beta)$$

(siehe Pommerenke [22], S. 176).

Eine weitere Familie ist

$$KI_0 := \{ f \in S_0 \mid f(\mathbb{D}) \text{ ist konvex in Richtung der imaginären Achse} \}$$

(siehe Robertson [23]).

Alle oben angeführten Familien sind kompakt, wenn die konstante Funktion 1 hinzugenommen wird, und somit hat jedes stetige Extremalproblem eine Lösung. Unter den Extrempunkten der abgeschlossenen konvexen Hüllen ist für jedes stetige lineare Extremalproblem eine Lösungsfunktion.

In den entsprechenden Familien K, St, $V(4)$ und C mit der Normierung (3) gelang es (siehe [3], [4], [13] und [16]), die Extrempunkte der abgeschlossenen konvexen Hüllen sowie die Stützpunkte zu charakterisieren. Alle wesentlichen Ergebnisse zu diesem Themenkreis sind in [13] enthalten. Offen blieben diese Fragen allerdings bis heute bei allen anderen der oben definierten Familien (mit der Normierung (3)), insbesondere auch für die linear erreichbaren Funktionen.

In dieser Arbeit werden wir für alle angeführten Familien nichtverschwindender schlichter Funktionen zeigen, daß Extrempunkte der abgeschlossenen konvexen Hüllen sowie Stützpunkte notwendigerweise bestimmte "Sektor-Abbildungen" sind, d. h. Funktionen, deren

Bildgebiet ein Sektor ist; entsprechende Ergebnisse werden auch im Fall der Normierung (3) vermutet (siehe z. B. [24], S. 25, [25], S. 397). Im Anschluß werden konkrete Extremalprobleme untersucht.

2. SUBORDINATION UND MAXIMALE ELEMENTE

Sei B die Menge der analytischen Funktionen, die den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas genügen. Eine Funktion f heißt *subordiniert zu* g (in Zeichen: $f \prec g$), wenn es eine Funktion $\omega \in B$ gibt, mit Hilfe derer sich f darsellen läßt in der Form $f = g \circ \omega$.

Ist $f(0) = g(0)$ und g schlicht, so ist $f \prec g$ gleichbedeutend damit, daß das Bildgebiet von f im Bildgebiet von g enthalten ist.

Automatisch gilt dies dann auch für die Bilder von Kreisscheiben um den Ursprung mit einem Radius kleiner als 1 als Folge des Schwarzschen Lemmas.

Weitere Eigenschaften der Subordination sind z. B. in [9], Kap. 6 zu finden.

Die Menge $(N_0, \prec)$ ist halbgeordnet, sofern wir in naheliegender Weise Äquivalenzklassen von zueinander gegenseitig subordinierten Funktionen betrachten. Die Äquivalenzklassen sind die Mengen

$$[f] := \{g \mid g(z) = f(xz),\ x \in X\}.$$

Mit $\operatorname{Max} F$ bezeichnen wir die in F liegenden maximalen Elemente von F bezüglich $\prec$.

Weiter bezeichne $\operatorname{Sub} F := \{g \mid g \prec f,\ f \in F\}$ die *subordinationsinvariante Hülle* von F. Die subordinationsinvariante Hülle einer kompakten Familie F wird von deren maximalen Elementen erzeugt:

Lemma 1 (Brickman und Wilken [5], Theorem 1) *Ist* $F \subset N_0$ *kompakt, so gilt*: $\operatorname{Sub} F = \operatorname{Sub} \operatorname{Max} F$.

3. EXTREMALPROBLEME IN FAMILIEN MIT EINFACHER MAXIMALSTRUKTUR

Für die weiteren Betrachtungen wird die folgende Eigenschaft bestimmter analytischer Funktionen besondere Bedeutung haben.

Wir nennen eine analytische Funktion $f \in A$ eine BCK-Funktion (in

Zeichen $f \in \mathrm{BCK}$), wenn für alle $g \prec f$ ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß μ existiert, sodaß g die Darstellung

$$g(z) = \int_X f(xz)\,d\mu$$

besitzt. Dies ist äquivalent zu

$$E \operatorname{co} \operatorname{Sub}\{f\} = [f] \tag{4}$$

(siehe z. B. [4], S. 93).

Brannan, Clunie und Kirwan [3] zeigten folgende bemerkenswerte Erweiterung des Satzes von Herglotz:

$$\left(\frac{1+xz}{1-z}\right)^{\alpha} \in \mathrm{BCK} \qquad \text{für} \quad |x| \leqslant 1 \text{ und } \alpha \geqslant 1 \tag{5}$$

(siehe z. B. [24], S. 16).

Eine Familie $F \subset N_0$ heißt *drehungsinvariant*, wenn sie mit jedem Element f dessen Äquivalenzklasse $[f]$ enthält.

Es gilt nun folgender zentrale Satz, der in der Folge auf die in der Einführung definierten Familien anwendbar ist.

Satz 2 *Ist $F \subset N_0$ kompakt und drehungsinvariant und gilt ferner* $\operatorname{Max} F \subset BCK$, *so folgt*

(a) $\overline{\operatorname{co}}\, F = \overline{\operatorname{co}} \operatorname{Max} F$,

(b) $E\, \overline{\operatorname{co}}\, F \subset \operatorname{Max} F$.

Beweis Wir schreiben $\operatorname{Max} F = \bigcup_{t \in T} [f_t]$ mit geeigneter Indexmenge T. Dies ist wegen der Drehungsinvarianz von F und der daraus resultierenden Drehungsinvarianz von $\operatorname{Max} F$ möglich.

Nach Voraussetzung ist

$$f_t \in \mathrm{BCK} \qquad \text{für alle} \quad t \in T. \tag{6}$$

Wegen Lemma 1 können wir F folgendermaßen zerlegen:

$$F = \bigcup_{t \in T} F_t \qquad \text{mit} \quad F_t := F \cap \operatorname{Sub}\{f_t\}, \tag{7}$$

und wir erhalten zunächst mit Hilfe von (6), dem Satz von Krein–Mil'man (F_t ist mit F kompakt) und (4)

$$\overline{\operatorname{co}}\, F_t \subset \overline{\operatorname{co}} \operatorname{Sub} F_t = \overline{\operatorname{co}} \operatorname{Sub}\{f_t\} = \overline{\operatorname{co}}(E\, \overline{\operatorname{co}} \operatorname{Sub}\{f_t\}) = \overline{\operatorname{co}}[f_t].$$

Da F_t mit F drehungsinvariant ist, liegen alle Funktionen aus $[f_t]$ in F_t, und somit folgt

$$\overline{\mathrm{co}}\, F_t = \overline{\mathrm{co}}[f_t]$$

und damit unter nochmaliger Benutzung der Drehungsinvarianz

$$E\, \overline{\mathrm{co}}\, F_t = [f_t]. \tag{8}$$

Sei nun $f \in E\, \overline{\mathrm{co}}\, F$. Dann folgt wegen der zweiten Teilaussage des Satzes von Kreǐn–Mil'man zunächst, daß f in F liegt. Somit gibt es wegen (7) ein $t \in T$ mit $f \in \overline{\mathrm{co}}\, F_t$.

Angenommen, f läge nun nicht in $E\, \overline{\mathrm{co}}\, F_t$, so hätte f eine konvexe Darstellung in $\overline{\mathrm{co}}\, F_t$ und damit in $\overline{\mathrm{co}}\, F$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Also ist jeder Extrempunkt von $\overline{\mathrm{co}}\, F$ extrem in $\overline{\mathrm{co}}\, F_t$ für ein $t \in T$ und wegen (8) folgt

$$E\, \overline{\mathrm{co}}\, F \subset \bigcup_{t \in T} [f_t] = \mathrm{Max}\, F$$

und damit (b). Also ist, wieder mit dem Satz von Kreǐn–Mil'man

$$\overline{\mathrm{co}}\, F = \overline{\mathrm{co}}(E\, \overline{\mathrm{co}}\, F) \subset \overline{\mathrm{co}}\, \mathrm{Max}\, F \subset \overline{\mathrm{co}}\, F,$$

womit auch (a) bewiesen ist. ■

Mit dem Ergebnis von Satz 2 gelingt es, folgenden Satz über die Stützpunkte in Familien, die die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllen, zu beweisen.

Mit co F wird die konvexe Hülle von F bezeichnet.

Satz 3 *Ist $F \subset N_0$ kompakt und drehungsinvariant mit* $\mathrm{Max}\, F = \bigcup_{t \in T} [f_t]$ *für eine geeignete Indexmenge T, ist ferner f_t für alle $t \in T$ eine BCK-Funktion, und gibt es in jeder der Mengen* $F_t = F \cap \mathrm{Sub}\{f_t\}$ *eine Funktion mit lauter nichtverschwindenden Koeffizienten, so gilt:*

$$Spt\, F \subset \bigcup_{t \in T} \mathrm{co}[f_t], \tag{9}$$

also insbesondere

$$\mathrm{Spt}\, F \subset \mathrm{co}(\mathrm{Max}\, F).$$

Ist ferner für alle $t \in T$

$$(\mathrm{co}[f_t] \setminus [f_t]) \cap F_t = \varnothing,$$

so folgt:

$$\mathrm{Spt}\, F \subset \mathrm{Max}\, F.$$

Beweis Im ersten Teil des Beweises zeigen wir

$$\operatorname{Spt} F_t \subset \operatorname{co}[f_t] \qquad \text{für alle} \quad t \in T, \tag{10}$$

nach einer Methode von Brickman, MacGregor und Wilken [4], Theorem 8.

Sei $L \in A'$ ein in F_t nicht konstantes Funktional mit der Toeplitz-Darstellung (siehe z. B. [24], S. 36)

$$L\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n, \qquad \limsup_{n \to \infty} |b_n|^{1/n} < 1. \tag{11}$$

Für einen Stützpunkt g von F_t bzgl. L gilt

$$M := \operatorname{Re} Lg = \max_{h \in F_t} \operatorname{Re} Lh.$$

Nach Voraussetzung ist $f_t \in \mathrm{BCK}$, und wir erhalten (8), und wegen der Kompaktheit von F_t hat g die Choquet-Darstellung

$$g(z) = \int_X f_t(xz)\, d\mu. \tag{12}$$

Hieraus folgt, daß μ-fast überall auf X gilt

$$\operatorname{Re} L(f_t(xz)) = M. \tag{13}$$

Sei H die Teilmenge von X, in der (13) gilt. Die Funktion l, die durch

$$l(x) := L(f_t(xz))$$

definiert wird, ist wegen der Darstellung (11) von L analytisch in $\bar{\mathbb{D}}$.

Nehmen wir nun an, H habe unendlich viele Elemente. Dann nimmt l auf X unendlich viele Werte an, die auf der Geraden $\{w \in \mathbb{D} \mid \operatorname{Re} w = M\}$ liegen.

Die Funktion h mit

$$h(z) = \tfrac{1}{2}(l(z) + \overline{l(1/\bar{z})})$$

ist analytisch in einer Umgebung von X und auf X gilt $h(x) = \operatorname{Re} l(x)$.

Also ist h konstant auf einer Menge mit Häufungspunkt im Analytizitätsbereich und somit global konstant. Hieraus folgt die Konstanz von l im Widerspruch zur Nicht-konstanz von L in F_t.

Also ist H endlich, und (12) wird zu

$$g(z) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k f_t(y_k z), \qquad \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1, \quad \mu_k \in \,]0, 1[,$$

womit (10) bewiesen ist.

Die Existenz einer Funktion in F_t mit lauter nicht verschwindenden Koeffizienten garantiert, daß nur Funktionale der Form

$$L\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = b_0 \cdot a_0$$

konstant in F_t sind. Dies zeigen wir in dem diesem Beweis folgenden Lemma.

Also ist ein Stützpunkt von $F = \bigcup_{t \in T} F_t$ bzgl. L auch Stützpunkt bzgl. L von F_t für ein $t \in T$, woraus (9) folgt.

Liegen nun echte konvexe Kombinationen aus $[f_t]$ gar nicht in F_t, so folgt für alle $t \in T$

$$\operatorname{Spt} F_t \subset [f_t]$$

und mit derselben Argumentation wie eben schließlich

$$\operatorname{Spt} F \subset \operatorname{Max} F. \qquad \blacksquare$$

Vervollständigt wird der Beweis durch das

LEMMA 4 *Gibt es in der drehungsinvarianten Familie F eine Funktion mit lauter nichtverschwindenden Koeffizienten, so sind nur die stetigen, linearen Funktionale L der Gestalt*

$$L\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = b_0 \cdot a_0$$

konstant in F.

Beweis Sei L ein durch seine Toeplitz-Darstellung (11) gegebenes, in F konstantes Funktional und habe $f \in F$ lauter nichtverschwindende Koeffizienten. Wegen der Drehungsinvarianz ist mit f auch f_x in F, wobei $f_x(z) = f(xz)$, $x \in X$ ist.

Es ergibt sich nach Voraussetzung mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$$Lf_x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n a_n x^n = \text{const.},$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $b_b \cdot a_n = 0$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung $a_n \neq 0$ ist, haben wir $L(f) = b_0 \cdot a_0$. $\blacksquare$

4. FAMILIEN VON FUNKTIONEN, DEREN BILDGEBIETE GEOMETRISCHE EIGENSCHAFTEN BESITZEN

Der eigentliche Ausgangspunkt zu dieser Arbeit war die Fragestellung dieses Kapitels. Man erwartet für die Familien in N_0, die in der Einführung definiert wurden, analoge Resultate wie bei den Familien mit der Normierung (3), muß sich aber nach einer neuen Methode umsehen, die diese Resultate liefert.

Es zeigt sich, daß bei unserer Normierung die Familien der Inklusionskette

$$V_0(2\beta + 2) \subset C_0(\beta) \subset L_0(\beta) \tag{14}$$

alle dieselbe abgeschlossene konvexe Hülle besitzen, da sie dieselben maximalen Elemente haben.

Daher beschäftigen wir uns zunächst mit den erreichbaren Funktionen der Ordnung β. Sei

$$\dot{X} := X \setminus \{-1\}.$$

Das Hauptresultat dieser Arbeit wird in folgendem Satz dargestellt.

SATZ 5 *Sei $\beta \in [0, 1]$. Dann gelten:*

(a) *Ein maximales Element f von $L_0(\beta)$ hat die Form*

$$f(z) = \left(\frac{1 + xyz}{1 - yz}\right)^{1+\beta}, \qquad (x, y) \in \dot{X} \times X, \tag{15}$$

d. h.

$$\operatorname{Max} L_0(\beta) = \bigcup_{x \in \dot{X}} \left[\left(\frac{1 + xz}{1 - z}\right)^{1+\beta}\right].$$

(b) co $L_0(\beta) = \text{co}(\operatorname{Max} L_0(\beta))$.

(c) *Jeder Extrempunkt von* co $L_0(\beta)$ *ist ein maximales Element.*

(d) *Jeder Stützpunkt von $L_0(\beta)$ ist ein maximales Element.*

Beweis (a) Zunächst stellen wir fest, daß die Funktionen der Form (15) genau diejenigen schlichten Funktionen sind, deren Bildgebiet ein Sektor mit Ecke im Ursprung und Öffnungswinkel $(1 + \beta)\pi$ ist. (Für $\beta = 0$ sind dies Halbebenen, deren Rand durch den Ursprung geht, für $\beta = 1$ geradlinig geschlitze Ebenen mit Schlitzbeginn im Ursprung.)

Da diese Sektoren-Abbildungen offensichtlich erreichbar der Ordnung β sind, genügt es zu zeigen, daß das Bildgebiet einer beliebigen Funktion $f \in L_0(\beta)$ in einem dieser Sektoren enthalten ist.

Nach Voraussetzung ist das Komplement des Bildgebiets von f die Vereinigung von abgeschlossenen Sektoren des Winkels $(1-\beta)\pi$. Ist nun w ein beliebigen Punkt aus $\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{D})$, so liegt also w in einem dieser abgeschlossenen Sektoren, und somit existiert ein abgeschlossener Sektor desselben Winkels, den man durch Parallelverschiebung erhält, der ganz in $\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{D})$ lieft und w als Spitze besitzt.

Da $f(\mathbb{D})$ den Ursprung nicht enthält, erhalten wir durch die Wahl $w = 0$ das Ergebnis, daß f einen abgeschlossenen Sektor des Winkels $(1-\beta)\pi$ mit Spitze im Ursprung ausläßt, und damit die Behauptung.

(b) und (c) Die Menge $L_0(\beta)\cup\{1\}$ ist kompakt und drehungsinvariant, und wegen (5) folgt aus (a), daß die maximalen Elemente von $L_0(\beta)$ BCK-Funktionen sind. Anwendung von Satz 2 gibt also

$$\overline{\text{co}}\, L_0(\beta) = \text{co}(L_0(\beta)\cup\{1\}) = \overline{\text{co}}\,\text{Max}\, L_0(\beta)$$

sowie $E\,\overline{\text{co}}\, L_0(\beta) \subset \text{Max}\, L_0(\beta)$.

(d) Da jede der Funktionen h_x mit

$$h_x(z) = \frac{1+xz}{1-z} = \frac{1+x}{2}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + \frac{1-x}{2}$$

lauter nichtverschwindende Koeffizienten hat, und da jede der Mengen $\{f\in L_0(\beta) \mid f \prec h_x^{1+\beta}\}$ die Funktion h_x enthält, läßt sich Satz 3 anwenden, und wir erhalten das Ergebnis, wenn gilt

$$(\text{co}[h_x^{1+\beta}]\setminus[h_x^{1+\beta}])\cap S_0 = \varnothing. \tag{16}$$

Um (16) zu zeigen, sei

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} t_k\left(\frac{1+xy_kz}{1-y_kz}\right)^{1+\beta}$$

für ein $n \geqslant 2$ und

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = 1, \qquad t_k\in\,]0,1[, \quad y_k \neq y_l \qquad \text{für} \quad k\neq l.$$

Wir betrachten in $\mathbb{D}$ liegende paarweise disjunkte Halbumgebungen U_k von $\bar{y}_k$. Da jede der f darstellenden Funktionen denselben Sektor als Bildgebiet hat, und da f in $\bar{y}_k$ jeweils eine Singularität besitzt, gibt es ein $R>0$, so daß der außerhalb $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<R\}$ liegende Teil des Sektors für alle k, $1\leqslant k\leqslant n$, in $f(U_k)$ liegt. Also ist f nicht schlicht und wir haben (16). ∎

Als Korollar erhält man z. B. die folgenden Abschätzungen.

KOROLLAR 6 *Sei $\beta \in [0, 1]$. Für $f \in L_0(\beta)$ gilt:*

(a) $|f^{(n)}(z)| \leqslant \left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{1+\beta}\right)^{(n)}(|z|)$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $z \in \mathbb{D}$. Gleichheit liegt für jedes $(n, z) \in (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{D}) \setminus (0, 0)$ nur für eine Funktion f der Form

$$f(z) = \left(\frac{1+yz}{1-yz}\right)^{1+\beta}, \qquad y \in X$$

vor.

(b) $$|\arg f(z)| \leqslant 2(1+\beta)\arcsin|z| \tag{17}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Gleichheit liegt für jedes $z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ nur für eine Funktion f der Form

$$f(z) = \left(\frac{1+xyz}{1-yz}\right)^{1+\beta}, \qquad (x, y) \in \dot{X} \times X$$

vor.

Beweis (a) Sei $\beta \in [0, 1]$. Es genügt, die Stützpunkte von $L_0(\beta)$, und damit nach Satz 5(d) die maximalen Elemente zu betrachten, d. h. die Funktionen f_x der Form

$$f_x(z) = \left(\frac{1+xyz}{1-yz}\right)^{1+\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) y^n z^n, \qquad (x, y) \in \dot{X} \times X.$$

In [1] wurde gezeigt, daß

$$|a_n(x)| \leqslant a_n(1),$$

mit Gleichheit für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau für $x = 1$.

Weiter folgt

$$|f_x^{(n)}(z)| = n!\left|\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n} a_k(x)(yz)^{k-n}\right| \leqslant n! \sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}|a_k(x)||z|^{k-n}$$

$$\leqslant n! \sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n} a_k(1)|z|^{k-n} = \left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{1+\beta}\right)^{(n)}(|z|),$$

mit Gleichheit offenbar genau für $x = 1$, wenn nicht $n = z = 0$ ist.

(b) Wegen Satz 5(a) gibt es zu jedem $f \in L_0(\beta)$ ein $x \in \dot{X}$, so daß

$$f \prec \left(\frac{1 + xz}{1 - z}\right)^{1+\beta},$$

also

$$\log f \prec (1 + \beta) \cdot \log\left(\frac{1 + xz}{1 - z}\right). \tag{18}$$

Unter allen Funktionen f mit der Eigenschaft (18) kommen aber für $r \neq 0$ nur die Funktionen der Form

$$\log f(z) = (1 + \beta) \cdot \log \frac{1 + xyz}{1 - yz}, \qquad y \in X$$

für $\max_{|z|=r} |\arg f(z)|$ in Betracht, wie aus dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen und der Eindeutigkeitsaussage des Schwarzschen Lemmas folgt.

Aus

$$\left|\arg \frac{1 + xyz}{1 - yz}\right| = |\arg(1 + xyz) - \arg(1 - yz)|$$

$$\leq |\arg(1 + xyz)| + |\arg(1 - yz)| \leq 2 \operatorname{arc} \sin|z|$$

folgt die Abschätzung (17).

Der maximale Wert von $\arg f(z)$ wird für $z \neq 0$ von der Funktion mit $(\arg x, \arg y) = (2 \operatorname{arc} \sin|z|, \quad \pi/2 - \operatorname{arc} \sin|z| - \arg z)$ angenommen, während für $(\arg x, \arg y) = (-2 \operatorname{arc} \sin|z|, \pi/2 + \operatorname{arc} \sin|z| - \arg z)$ das Minimum vorliegt. ■

Wir bemerken, daß man für $\beta = 1$ aus der Gültigkeit der *Bieberbachschen Vermutung* (für schlichte Funktionen der Normierung (3)) durch Anwendung der Trivial transformation $f \mapsto (f - 1)/a_1$ statt (a) sogar

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{|a_1|}{4} \cdot \left(\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)^2\right)^{(n)}(|z|) = |a_1| \cdot n! \frac{n + |z|}{(1 - |z|)^{n+2}}$$

erhält (es ist ja $|a_1| \leq 4$).

Ebenso folgt für $\beta = 0$ aus der bekannten Koeffizienten-Abschätzung für konvexe Funktionen der Normierung (3) sogar

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{|a_1|}{2} \cdot \left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)^{(n)}(|z|) = |a_1| \cdot \frac{n!}{(1 - |z|)^{n+1}}$$

(siehe [10], S. 196).

Umgekehrt gibt es für jede erreichbare Funktion f der Ordnung β mit der Normierung (3) eine Zahl ω mit $|\omega| \leqslant 1$, die nicht angenommen wird, so daß $1 - f/\omega \in L_0(\beta)$. Also folgt für die Koeffizienten a_n von f mit dem Ergebnis von Korollar 6(a)

$$n!\,|a_n| \leqslant |\omega| \cdot \left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{1+\beta}\right)^{(n)}(0) \leqslant 2(1+\beta)k_\beta^{(n)}(0),$$

wobei

$$k_\beta(z) = \frac{1}{2(1+\beta)}\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{1+\beta} - 1\right)$$

die übliche Sektor-Abbildung der Normierung (3) ist. Für nahezu-konvexe Funktionen der Ordnung β mit der Normierung (3) ist bekanntlich $n!\,|a_n| \leqslant k_\beta^{(n)}(0)$ ([3], siehe [24], Theorem 2.29), während die obige Abschätzung für erreichbare Funktionen neu ist.

Eine weitere Folgerung von Satz 5 ist

Korollar 7 *Sei $\beta \in [0, 1]$. Dann gilt*

$$\overline{\mathrm{co}}\, V_0(2\beta + 2) = \overline{\mathrm{co}}\, C_0(\beta) = \overline{\mathrm{co}}\, L_0(\beta) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{Max}\, L_0(\beta)).$$

Beweis Es ist wohlbekannt, daß die maximalen Elemente von $L_0(\beta)$ Funktionen aus $V_0(2\beta + 2)$ sind.

Also folgt aus (14), dem Satz von Kreĭn–Mil'man und Satz 5(b)

$$\overline{\mathrm{co}}\, V_0(2\beta + 2) \subset \overline{\mathrm{co}}\, C_0(\beta) \subset \overline{\mathrm{co}}\, L_0(\beta) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{Max}\, L_0(\beta)) \subset \overline{\mathrm{co}}\, V_0(2\beta + 2).$$

■

Nun wenden wir uns den restlichen Familien zu.

Satz 8

(a) $$\mathrm{Max}\, St_0 = \mathrm{Max}\, S_0(\mathrm{sym}) = \left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right],$$

$$\mathrm{Max}\, KI_0 = \left[\left(\frac{1+iz}{1-z}\right)^2\right] \cup \left[\left(\frac{1-iz}{1-z}\right)^2\right],$$

(b) $$\overline{\mathrm{co}}\, St_0 = \overline{\mathrm{co}}\, S_0(\mathrm{sym}) = \overline{\mathrm{co}}\left(\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right]\right),$$

$$\overline{\mathrm{co}}\, KI_0 = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{Max}\, KI_0),$$

(c) $E\,\overline{\mathrm{co}}\, St_0 = \mathrm{Spt}\, St_0 = E\,\overline{\mathrm{co}}\, S_0(\mathrm{sym}) = \mathrm{Spt}\, S_0(\mathrm{sym}) = \left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right]$,

$E\,\mathrm{co}\, KI_0 = \mathrm{Spt}\, KI_0 = \mathrm{Max}\, KI_0$.

Beweis (a) Offenbar liegt für jeden Punkt w des Komplements eines von $\mathbb{C}$ verschiedenen bzgl. 1 sternförmigen Gebiets G der bzgl. 1 radiale Strahl, dessen Spitze w ist, ganz im Komplement von G. Daraus folgt mit $w = 0$, daß die negative reelle Halbachse jedes bzgl. 1 sternförmigen Gebiets, das den Ursprung nicht enthält, in dessen Komplement liegt, und damit

$$\mathrm{Max}\, St_0 = \left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right].$$

Wir wollen nun dieselbe Eigenschaft für ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet G zeigen, das symmetrisch bzgl. der reellen Achse ist und den Ursprung nicht enthält.

Wegen des einfachen Zusammenhangs ist $\bar{\mathbb{C}}\setminus G$ zusammenhängend und enthält die Punkte 0 sowie ∞. Daher existiert eine Kurve $\gamma \subset \mathbb{C}\setminus G$, die den Ursprung mit ∞ verbindet.

Aus der Symmetrie folgt, daß auch $\bar{\gamma} := \{w \in \mathbb{C} \mid w \in \gamma\}$ in $\mathbb{C}\setminus G$ liegt. Nun sieht man aber, daß die zwischen $\gamma_- := \{w \in \gamma \cup \bar{\gamma} \mid \mathrm{Im}\,\gamma \leqslant 0\}$ und $\gamma_+ := \{w \in \gamma \cup \bar{\gamma} \mid \mathrm{Im}\,\gamma \geqslant 0\}$ liegenden Punkte, insbesondere also die negative reelle Halbachse, nicht zu G gehören können, womit wir gezeigt haben

$$\mathrm{Max}\, S_0(\mathrm{sym}) = \left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right].$$

Die maximalen Elemente von KI_0 lassen sich entsprechend bestimmen.

(c) Der Beweisgang wie bei Satz 5 läßt nur die Frage offen, ob alle maximalen Elemente Extrempunkte bzw. Stützpunkte sind. Dies folgt bei St_0 und $S_0(\mathrm{sym})$ leicht aus der Drehungsinvarianz und dem Satz von Kreĭn–Mil'man.

Die maximalen Elemente sind Stützpunkte bzgl. der Funktionale L vom Typ

$$L(f) = wa_1(f), \qquad w \in \mathbb{C}. \tag{19}$$

Analog folgt aus der Drehungsinvarianz sowie der Spiegelungsinvarianz von KI_0, d. i.

$$f \in KI_0, g(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad \Rightarrow \quad g \in KI_0,$$

daß alle maximalen Elemente Extrempunkte sind; auch sie sind Stützpunkte bzgl. der Funktionale L vom Typ (19). ■

Man sieht, daß die vorgestellte Methode auch anwendbar ist auf die Familien der Funktionen, die konvex in andere Richtungen sind. Wählt man als Richtung die reelle Achse, so ist $[((1+z)/(1-z))^2]$ wieder die Menge der maximalen Elemente.

Als Folgerung von Satz 8 notieren wir die folgenden Ergebnisse, die sich nicht durch Übertragung von bekannten Resultaten aus der Normierung (3) herleiten lassen.

KOROLLAR 9

(a) *Sei $f \in St_0$ oder $f \in S_0(sym)$. Dann gilt*

$$|\arg f(z)| \leqslant 4 \arc \tan |z|$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Gleichheit liegt für $z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ nur für eine Funktion der Form

$$f(z) = \left(\frac{1+yz}{1-yz}\right)^2, \qquad y \in X$$

vor.

(b) *Sei $f \in KI_0$. Dann gilt*

$$|\arg f(z)| \leqslant 4 \operatorname{arc} \cot\left(\frac{\sqrt{2}}{r} - 1\right)$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Gleichheit liegt für $z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ nur für eine Funktion der Form

$$f(z) = \left(\frac{1 \pm iyz}{1-yz}\right)^2, \qquad y \in X \tag{20}$$

vor.

(c) *Sei $f \in KI_0$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann gilt*

$$|a_n| \leqslant 2\sqrt{1+n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Gleichheit liegt für jedes $n \in \mathbb{N}$ nur für eine Funktion der Form (20) vor.

Beweis (a) Wieder genügt es—wie beim Beweis von Korollar 6(b) gezeigt—die maximalen Elemente zu betrachten. Eine einfache Rechnung oder geometrische Überlegung zeigt, daß für $r \in]0, 1[$ die Beziehung

$$\max_{y \in X}\left(\arg \frac{1+yr}{1-yr}\right) = 2 \arc \tan r$$

gilt, woraus die Behauptung folgt.

(b) Hier genügt es wegen der Spiegelungsinvarianz von KI_0,

$$\max_{y\in X}\left(\arg\left(\frac{1+iyr}{1-yr}\right)^2\right)$$

zu berechnen. Man erhält

$$\max_{y\in X}\left(\arg\left(\frac{1+iyr}{1-yr}\right)^2\right) = 2\max_{y\in X}\left(\arg\frac{1+iyr}{1-yr}\right)$$

$$= 4\arg\left(1-\frac{r}{\sqrt{2}}+\frac{ir}{\sqrt{2}}\right) = 4\cot\left(\frac{\sqrt{2}}{r}-1\right).$$

(c) Es genügt, die Stützpunkte zu betrachten, und daher nach Satz 8(c) die Funktionen der Form (20), für deren Koeffizienten a_n gilt:

$$a_n = 2y^n(1 \pm in),$$

woraus die Behauptung folgt. ∎

5. ANWENDUNG DER ERGEBNISSE AUF INTEGRALMITTELWERTE

Mittels der Subordinationsaussagen der Sätze 5(a) bzw. 8(a) und dem Subordinationssatz von Littlewood (siehe z. B. [9], Theorem 6.1) erhält man Abschätzungen für die Integralmittelwerte. Bei den Mengen $S_0(\mathrm{sym})$ und St_0 erhält man auf diesem Weg das Ergebnis von Baernstein (siehe [10], S. 197), das sogar in ganz S_0 gültig ist. Für die erreichbaren Funktionen folgt

SATZ 10 *Seien $\beta\in[0,1]$, $p>0$ sowie $r\in\,]0,1[$. Für $f\in L_0(\beta)$ gilt:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)^{1+\beta}\right|^p d\theta.$$

Gleichheit liegt nur für eine Funktion f der Form

$$f(z) = \left(\frac{1+yz}{1-yz}\right)^{1+\beta}, \qquad y\in X$$

vor. Insbesondere ist $\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta$ beschränkt für $r\to 1$, d. h. $f\in H^p$, solange $p\in\,]0, 1/(1+\beta)[$.

Beweis Aus Satz 5(a) folgt, daß $f \prec ((1+xz)/(1-z))^{1+\beta}$ für ein $x \in \dot{X}$. Der Littlewood'sche Subordinationssatz impliziert die Ungleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{1+xre^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right|^{(1+\beta)p} d\theta .$$

Schreibt man $((1+xz)/(1-z))^{(1+\beta)p/2} =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) z^n$, so gilt nach [1], daß $|a_n(x)| \leqslant a_n(1)$, mit Gleichheit für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau für $x = 1$. Also folgt weiter mit der Identität von Gutzmer, daß

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x)|^2 r^{2n} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(1))^2 r^{2n}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right|^{(1+\beta)p} d\theta .$$

Gleichheit kann offensichtlich nur für $x = 1$ eintreten, und hier wiederum nur für die maximalen Elemente wie aus der Gleichheitsaussage des Littlewood'schen Subordinationssatzes folgt.

Da nun bekanntlich $(1+z)/(1-z) \in H^p$ für alle $p \in \,]0, 1[$ (siehe z. B. [8], Theorem 3.2), gilt die letzte Schlußfolgerung. ∎

Da die Eigenschaft $f \in H^p$ von der Normierung unabhängig ist, gilt die letzte Aussage auch für Funktionen der Normierung (3). Wir bemerken, daß unser Beweis zeigt, daß diese Eigenschaft eine direkte Folge der Geometrie des Bildgebietes ist. Für nahezu-konvexe Funktionen wurde sie in [6], Corollary 2(b), bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] D. Aharonov and S. Friedland, On an inequality connected with the coefficient conjecture for functions of bounded boundary rotation, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math.* **524** (1973), 1–14.

[2] M. Biernacki, Sur la représentation conforme des domaines linéairement accessibles, *Prace Math.-Fiz.* **44** (1936), 293–314.

[3] D. A. Brannan, J. G. Clunie and W. E. Kirwan, On the coefficient problem for functions of bounded boundary rotation, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math.* **523** (1973), 1–18.

[4] L. Brickman, T. H. MacGregor and D. R. Wilken, Convex hulls of some classical families of univalent functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **156** (1971), 91–107.

[5] L. Brickman and D. R. Wilken, Subordination and insuperable elements, *Mich. Math. J.* **23** (1976), 225–233.

[6] J. Brown, Derivatives of close-to-convex functions, integral means and bounded mean oscillation, *Math. Z.* **178** (1981), 353–358.

[7] J. G. Clunie, Some remarks on extreme points in function theory, in *Aspects of Contemporary Complex Analysis*, pp. 137–146, Proceedings Durham 1979, ed. by D. A. Brannan and J. G. Clunie, Academic Press, New York and London, 1980.

[8] P. L. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York and London, 1970.

[9] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1983.

[10] P. L. Duren and G. Schober, Nonvanishing univalent functions, *Math. Z.* **170** (1980), 195–216.

[11] P. L. Duren and G. Schober, Nonvanishing univalent functions II, *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A* **36/37** (1982/1983), 33–43.

[12] P. L. Duren and G. Schober, Nonvanishing univalent functions III, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math.* **10** (1985), 139–147.

[13] E. Grassmann, W. Hengartner and G. Schober, Support points of the class of close-to-convex functions, *Can. Math. Bull.* **19** (1976), 177–179.

[14] D. J. Hallenbeck and T. H. MacGregor, *Linear Problems and Convexity Techniques in Geometric Function Theory*, Pitman, Boston-London-Melbourne, 1984.

[15] G. Herglotz, Über Potenzreihen mit positivem, reellen Teil im Einheitskreis, *Ber Verh. Sächs. Akad Wiss Leipzig* (1911), 501–511.

[16] R. Hornblower and D. R. Wilken, On the support points of close-to-convex functions, *Houston J. Math.* **10** (1984), 593–599.

[17] W. Kaplan, Close-to-convex schlicht functions, *Mich. Math. J.* **1** (1952), 169–185.

[18] Z. Lewandowski, Sur l'identite de certaines classes de fonctions univalentes I, *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A* **12** (1958), 131–146.

[19] Z. Lewandowski, Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes II, *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A* **14** (1960), 19–46.

[20] V. Paatero, Über die konforme Abbildung von Gebieten deren Ränder von beschränkter Drehung sind, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A* **33:9** (1931), 1–78.

[21] R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's Theorem*, Van Nostrand Math. Studies No. 7, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1966.

[22] Ch. Pommerenke, On close-to-convex analytic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **114** (1965), 176–186.

[23] M. S. Robertson, On the theory of univalent functions, *Ann. of Math.* (2) **37** (1936), 374–408.

[24] G. Schober, *Univalent Functions—Selected Topics*, Springer Lecture Notes No. 478, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[25] T. Sheil-Small, On linearly accessible univalent functions, *J. London Math. Soc.* (2) **6** (1973), 385–398.