Wolfram Koepf

Ein elementarer Zugang zu Potenzreihen

Arthur Engel hat in [?] die Fähigkeiten des PC-Programms Derive [?] für Mathematiklehrer vorgestellt. Die Frage nach der Einbindung eines solchen Werkzeugs in den schulischen Mathematikunterricht wurde in [?] weitergedacht und konkrete Anwendungsmöglichkeiten wurden in [?], [?] und [?] angegeben.
In dieser Arbeit stelle ich einen elementaren Zugang zur Behandlung von Potenzreihenentwicklungen vor, der auf der Integration durch Substitution beruht. Dieser ist eigentlich unabhängig von einem Hilfsmittel wie Derive, es wird aber vorgeführt, wie Formeln mit Derive von den Schülern entdeckt und dann gemeinsam bewiesen werden können. Dies kann den Unterricht sehr bereichern.

1 Einführung

Wir verwenden Derive, um spielerisch Integralformeln zu erraten, welche dann gemeinsam bewiesen werden können. Mit Hilfe des Integrals ($n \in \mathbb{N}$)

$$\int_0^x \tan^n t \, dt$$

bekommen wir einen völlig neuen und elementaren Zugang zu der Logarithmus- und der Arkustangensreihe.

Zur Einführung von Potenzreihen, welche in der mathematischen Theorie eine besonders wichtige Rolle spielen, die aber in der Schule ein Schattendasein führen, bietet sich dieser Zugang an.

2 Integralformeln mit Derive

Derive kann, wie wir schon in [?] feststellten, sehr gut integrieren. Das Integral

$$\int_0^x \tan t \, dt \quad \longrightarrow \quad \ln \cos x$$

wird von Derive genauso gelöst wie das Integral

$$\int_0^x \tan^2 t \, dt \quad \longrightarrow \quad \tan x - x \; .$$

Setzt man allerdings einen symbolischen Exponenten ein

$$\int_0^x \tan^n t \, dt \; ,$$

scheitert Derive und gibt wieder die Eingabe aus. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da eine explizite (summenfreie) Darstellung für dieses Integral gar nicht existiert.

Wir können jedoch DERIVEs Fähigkeiten dazu benutzen, eine Summenformel für dieses symbolische Integral herzuleiten. Dazu berechnen wir zunächst einmal die ersten 11 Integrale dieser Liste ($n = 0, \ldots, 10$) durch Vereinfachung der Eingabe

```
VECTOR(INT(TAN(t)^n,t,0,x),k,0,10)
```

(man kann auch `VECTOR(INT(TAN^n(t),t,0,x),k,0,10)` eingeben, den Exponenten also direkt nach Aufruf der Funktion setzen), welche die Ausgabe

$$\left[x, -\mathrm{LN}\,(\mathrm{COS}\,(x)), \mathrm{TAN}\,(x) - x, \mathrm{LN}\,(\mathrm{COS}\,(x)) + \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^2}{2}, -\mathrm{TAN}\,(x) + \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^3}{3} + x, \ldots\right]$$

erzeugt. Selbst bei ausschließlicher Betrachtung des momentan sichtbaren Bereichs dieser Formeln – mit Hilfe der Kursortasten kann man sich allerdings alle erzeugten Ausdrücke genau ansehen – stellt jeder Schüler sofort fest, daß die Darstellungen für gerade k-Werte sehr stark von den Darstellungen für ungerade k-Werte abweichen. Wollen wir uns also die geraden und ungeraden k-Werte getrennt ansehen! Hierzu vereinfachen wir die Ausdrücke

`VECTOR(INT(TAN(t)^(2n),t,0,x),n,0,5)` ,

und

`VECTOR(INT(TAN(t)^(2n+1),t,0,x),n,0,5)` ,

die die Ausgaben

$$\begin{aligned}&\left[x, \mathrm{TAN}\,(x) - x, -\mathrm{TAN}\,(x) + \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^3}{3} + x, \mathrm{TAN}\,(x) - \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^3}{3} + \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^5}{5} - x,\right.\\ &-\mathrm{TAN}\,(x) + \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^3}{3} - \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^5}{5} + \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^7}{7} - x,\\ &\left.\mathrm{TAN}\,(x) - \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^3}{3} + \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^5}{5} - \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^7}{7} + \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^9}{9} - x\right]\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}&\left[-\mathrm{LN}\,(\mathrm{COS}\,(x)), \mathrm{LN}\,(\mathrm{COS}\,(x)) + \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^2}{2}, -\mathrm{LN}\,(\mathrm{COS}\,(x)) - \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^2}{2} + \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^4}{4},\right.\\ &\mathrm{LN}\,(\mathrm{COS}\,(x)) + \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^2}{2} - \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^4}{4} + \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^6}{6},\\ &-\mathrm{LN}\,(\mathrm{COS}\,(x)) - \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^2}{2} + \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^4}{4} - \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^6}{6} + \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^8}{8},\\ &\left.\mathrm{LN}\,(\mathrm{COS}\,(x)) + \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^2}{2} - \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^4}{4} + \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^6}{6} - \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^8}{8} + \frac{\mathrm{TAN}\,(x)^{10}}{10}\right]\end{aligned}$$

haben.

Es ist nun ein Leichtes zu erraten, wie die allgemeine Struktur dieser Summen aussehen. Auch schwächere Schüler werden das Muster erkennen, und man kann gemeinsam mit den Schülern die folgenden Formeln aufschreiben:

$$(-1)^n \int_0^x \tan^{2n} t\, dt = x - \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} - \frac{\tan^5 x}{5} \pm \cdots + \frac{(-1)^n}{2n-1} \tan^{2n-1} x \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad (1)$$

sowie

$$(-1)^{n+1}\int\limits_0^x \tan^{2n+1} t\,dt = \ln\cos x + \frac{\tan^2 x}{2} - \frac{\tan^4 x}{4} \pm \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n}\tan^{2n} x \quad (n \in \mathbb{N})\ . \tag{2}$$

3 Beweis durch Substitution

Wir werden nun zeigen, wie einfach man diese Formeln durch Substitution anschließend beweisen kann.

Wegen $(\tan t)' = 1 + \tan^2 t$ folgt mit der Substitution $u = \tan t$ für $n \neq -1$

$$\begin{aligned}\int \tan^n t\,dt + \int \tan^{n-2} t\,dt &= \int \tan^{n-2} t\,(1+\tan^2 t)\,dt = \int u^{n-2}\,du\Big|_{u=\tan t} \\ &= \frac{u^{n-1}}{n-1}\Big|_{u=\tan t} = \frac{\tan^{n-1} t}{n-1}\ ,\end{aligned}$$

und folglich gilt die Rekursionsformel

$$\int \tan^n t\,dt = \frac{\tan^{n-1} t}{n-1} - \int \tan^{n-2} t\,dt \quad (n \neq 1)\ .$$

Dies ist die Rekursionsformel einer Summe, und mit den Anfangswerten

$$\int\limits_0^x \tan^0 t\,dt = \int\limits_0^x 1\,dt = x \qquad \text{sowie} \qquad \int\limits_0^x \tan^1 t\,dt = \int\limits_0^x \tan t\,dt = -\ln\cos x$$

folgen die beiden Aussagen (**??**) und (**??**) sofort.

4 Die Logarithmus- und Arkustangensreihe

Setzen wir nun in (**??**) und (**??**) für $\tan x$ den Wert y ein und nennen den zu y gehörigen x-Wert $\arctan y$, also

$$y = \tan x \qquad \text{bzw.} \qquad x = \arctan y\ ,$$

welches für $x \in [0, \pi/4)$ bzw. $y \in [0, 1)$ eindeutige Werte liefert, erhalten wir die Formeln

$$(-1)^n \int\limits_0^x \tan^{2n} t\,dt = \arctan y - y + \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \pm \cdots + \frac{(-1)^n}{2n-1} y^{2n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sowie

$$(-1)^{n+1}\int\limits_0^x \tan^{2n+1} t\,dt = \ln\cos\arctan y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \pm \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} y^{2n} \quad (n \in \mathbb{N})\ .$$

Wir machen weiter folgende Feststellung: Da für $x \in [0, \pi/4)$ die Tangensfunktion Werte kleiner als 1 hat, konvergieren die Integranden $\tan^n t$ im ganzen Intervall $[0, x]$ für $n \to \infty$ gegen Null, und somit konvergieren die Integrale auf der linken Seite für alle $x \in [0, \pi/4)$ ebenfalls gegen Null. Wir erhalten also für $n \to \infty$ die Formeln

$$0 = \arctan y - y + \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \pm \cdots + \frac{(-1)^n}{2n-1} y^{2n-1} + \cdots$$

sowie

$$0 = \ln \cos \arctan y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \pm \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} y^{2n} + \cdots ,$$

oder auch

$$\arctan y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} \pm \cdots \quad (y \in [0,1)) \tag{3}$$

sowie

$$-\ln \cos \arctan y = \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} \mp \cdots \quad (y \in [0,1)) . \tag{4}$$

Die Reihe (**??**) ist die Arkustangensreihe, die wir auf diese Weise ohne den Satz von Taylor oder Überlegungen zur gleichmäßoigen Konvergenz erhalten haben. Die zweite Reihe stellt sich als die Logarithmusreihe heraus. Aus der Beziehung

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x = (1 + \tan^2 x) \cos^2 x$$

folgt nämlich

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} ,$$

und somit (wir schreiben wieder $y = \tan x$)

$$\begin{aligned} -\ln \cos \arctan y &= -\ln \cos x = -\ln \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \ln \sqrt{1 + \tan^2 x} \\ &= \frac{1}{2} \ln (1 + \tan^2 x) = \frac{1}{2} \ln (1 + y^2) . \end{aligned}$$

Ersetzen wir schließlich y^2 durch z, erhalten wir zusammen mit (**??**)

$$\frac{1}{2} \ln (1 + z) = \frac{z}{2} - \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{6} \mp \cdots$$

oder nach Division durch 2 die Logarithmusreihe

$$\ln (1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \mp \cdots \quad (z \in [0,1)) . \tag{5}$$

5 Randverhalten der Reihen

Die hergeleiteten Reihen (**??**) und (**??**) gelten zunächst für $y, z \in [0,1)$, es macht aber keinerlei Mühe, dieses Intervall durch Betrachten negativer x-Werte auf $y, z \in (-1,1)$ auszudehnen. Schwieriger ist die Fragestellung: Gelten die Formeln (**??**) und (**??**) auch noch für $y = z = 1$? Daß dies so ist, daß also

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \tag{6}$$

und

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \ln 2 \tag{7}$$

gelten, ist nicht mehr ganz so elementar, kann aber durch eine geschickte Argumentation gezeigt werden. Hierzu brauchen wir höhere analytische Argumentationstechniken, können aber auch auf Grund unserer Herleitung auch geometrisch argumentieren.

Wir setzen nämlich bei unseren ursprünglichen Integralen speziell $x = \pi/4$ und betrachten $n \to \infty$. Wir zeigen zunächst, daß

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\pi/4} \tan^n t \, dt = 0 \ , \tag{8}$$

was aus geometrischen Gründen einleuchtend ist, da im Innern des Intervalls $(0, \pi/4)$ die Relation $\tan x < 1$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann ist wegen $y := \tan \pi/4 - \varepsilon/2 < 1$

$$\left| \int\limits_0^{\pi/4} \tan^n t \, dt \right| \le \left| \int\limits_0^{\pi/4-\varepsilon/2} \tan^n t \, dt \right| + \left| \int\limits_{\pi/4-\varepsilon/2}^{\pi/4} \tan^n t \, dt \right| \le y^n \frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

und es gibt somit ein $N \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \ge N$ der Term $y^n \frac{\pi}{4} \le \frac{\varepsilon}{2}$ ist, was die Behauptung (**??**) zeigt. Das bedeutet aber, daß unsere gesamte Herleitung auch für $x = \pi/4$ bzw. $y = z = 1$ gültig ist.

6 Schlußbemerkung

...

Anschrift des Verfassers: Dr. Wolfram Koepf, Seelingstr. 21, 1000 Berlin 19

Literatur

[1] Engel, A.: Eine Vorstellung von Derive. In: Didaktik der Mathematik **18** (1990), 165–182.

[2] Rich, A., Rich, J. und Stoutemyer, D.: DERIVE *User Manual*, Version 2, Soft Warehouse, Inc., 3660 Waialae Avenue, Suite 304, Honolulu, Hawaii, 96816-3236.

[3] Koepf, W. und Ben-Israel, A.: Integration mit DERIVE, In: Didaktik der Mathematik **21** (1993), 40–50.

[4] Scheu, G.: Entdeckungen in der Menge der Primzahlen mit DERIVE. In: PM 3/34 (1992), 119–122.

[5] Schönwald, H.G.: Zur Evaluation von Derive. In: Didaktik der Mathematik **19** (1991), 252–265.

[6] Treiber, D.: Wie genau ist das Newton-Verfahren? In: Didaktik der Mathematik **20** (1992), 286–297.