Was ist 0^0?

von Wolfram Koepf

In diesem Aufsatz wird untersucht, in welcher Weise die von DERIVE verwendete algebraische Definition von 1 für 0^0 auch analytisch sinnvoll ist.

Einführung und Beispiele

Betrachtet man ein symbolisch gegebenes Polynom

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k \ , \tag{1}$$

so meint man mit dieser Formel

$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n \ ,$$

so daß x^0 offenbar 1 bedeutet

$$x^0 := 1 \ . \tag{2}$$

Setzt man für x in einem solchen Polynom über $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) den Wert 0 ein, so wird aus (2)

$$0^0 := 1 \ . \tag{3}$$

Möchte man also formale Darstellungen wie (1) benutzen und auch in der Lage sein, eine willkürliche Zahl $x \in \mathbb{R}$ darin einzusetzen, so wird man auf (3) geführt, siehe auch [2], S. 162. Dies ist von Bedeutung in Computeralgebrasystemen wie DERIVE.

In dem Computeralgebrasystem MAPLE [5] zum Beispiel wird[1]

`subs(x=0,sum((k+1)*x^k,k=0..3))` zu 1 vereinfacht, wohingegen

`sum(subs(x=0,(k+1)*x^k),k=0..3)` zu 0 vereinfacht wird,

da im ersten Fall zunächst die formale Summe $\sum_{k=0}^{3}(k+1)x^k$ erzeugt und erst dann $x = 0$ eingesetzt wird, während im zweiten Fall in $(k+1)x^k$ zunächst $x = 0$ gesetzt wird, was (für $x \neq 0$) den Wert 0 ergibt, und dann die Summe gebildet wird. In MAPLE ist der Term `0^0` undefiniert. Andererseits ist in DERIVE die Definition (3) implementiert als eine immer gültige Regel, wohingegen in muMATH-83, dem Vorgängersystem von DERIVE, die Werte der globalen Variablen `ZEROEXPT` und `ZEROBASE` diese Situationen kontrollierten (siehe [6], S. 9-19).

Es gibt auch Analysisbücher, in denen die formale Definition (3) gegeben wird (siehe [1], S. 34), welche natürlich nicht in allen analytischen Situationen sinnvoll ist, da

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$$

[1] Hierbei bedeutet `subs(x=0,f)`, daß in dem Ausdruck `f` die Variable `x` durch `0` ersetzt wird.

für

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^y$$

nicht existiert (s. [4], § 1.4). Andererseits werde ich zeigen, daß für „fast alle" stetigen Kurven $\gamma(t) := (x(t), y(t))$, $\gamma(0) := 0$, $(t \in I := [0, t_0])$ die Beziehung

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ (x,y) \in \gamma(I)}} f(x,y) = \lim_{t \to 0} x(t)^{y(t)} = 1$$

gilt. Zunächst macht die Potenz x^y nur für eine nichtnegative Basis x Sinn, so daß wir uns auf den Fall beschränken können, daß (x,y) in der rechten Halbebene liegt, d. h. $(x,y) \in \mathbb{H} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\right\}$.

Ich gebe zuerst einige Beispiele:[2]

(a): Sei γ die positive y-Achse. Dann ist $\gamma(t) = (0,t)$ und $\lim_{t\to 0} x(t)^{y(t)} = \lim_{t \to 0} 0^t = 0$.

(b): Ist γ irgendein anderer Strahl in $\mathbb{H}$, der beim Ursprung endet, dann ist $\gamma(t) = (t, mt)$ für ein $m \in \mathbb{R}$ und $\lim_{t \to 0} x(t)^{y(t)} = \lim_{t \to 0} t^{mt} = 1$.

(c): Sei γ definiert durch $\gamma(t) := \left(t\left(\sin\frac{1}{t}\right)^2, t\right)$ $(t > 0)$ und $\gamma(0) = 0$, s. Abbildung 1.

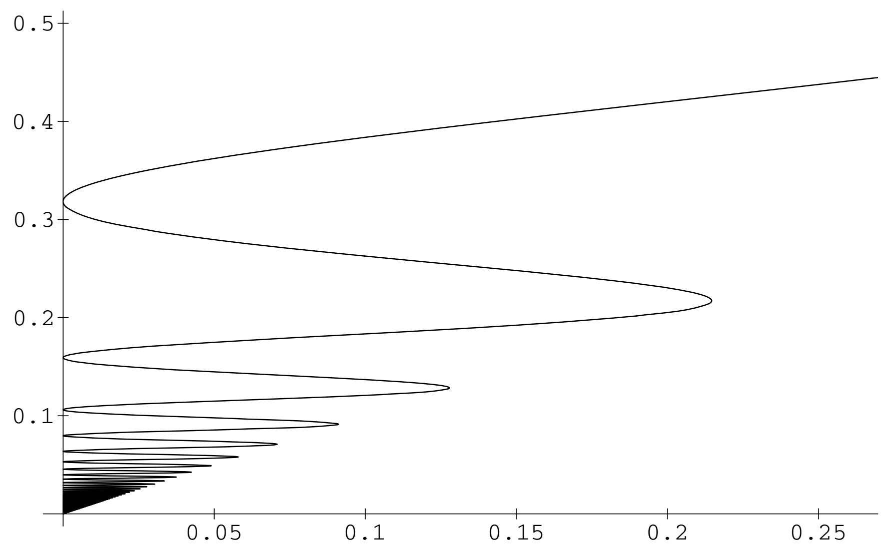

Abbildung 1: Die Kurve $\gamma(t) := \left(t\left(\sin\frac{1}{t}\right)^2, t\right)$ $(t > 0)$.

Dann ist γ stetig bei $t = 0$ und $\lim_{t \to 0} x(t)^{y(t)} = \lim_{t \to 0} t^t \cdot (\sin\frac{1}{t})^{2t}$ existiert nicht, weil für die Folge $t_n := \frac{1}{n\pi}$ die Funktionswerte $(\sin\frac{1}{t_n})^{2t_n} = 0^{2t_n} \to 0$ und andererseits für die Folge $t_n := \frac{1}{(n+1/2)\pi}$ die Funktionswerte $(\sin\frac{1}{t_n})^{2t_n} = 1^{2t_n} \to 1$ konvergieren. Dies geschieht offenbar, da $\gamma(t)$ für $t \to 0$ die y-Achse unendlich oft als Tangente besitzt.

(d): Sei $\gamma(t) := \left(e^{-1/t^2}, t\right)$ $(t > 0)$ und $\gamma(0) = 0$, s. Abbildung 2. Dann ist γ stetig bei $t = 0$ und $\lim_{t \to 0} x(t)^{y(t)} = \lim_{t \to 0} e^{-\frac{1}{t}} = 0$. Andererseits ist der Grenzwert für $\gamma(t) := (x(t), -t)$ gleich ∞.

[2] Der Parameter t gehe hier immer von oben gegen Null.

(e): Sei $\gamma(t) := \left(e^{-\frac{\alpha}{t}}, t\right)$ $(t > 0)$ für ein $\alpha > 0$ und $\gamma(0) = 0$. Dann ist γ stetig bei $t = 0$ und $\lim\limits_{t\to 0} x(t)^{y(t)} = \lim\limits_{t\to 0} e^{-\alpha} = e^{-\alpha}$. Andererseits ist der Grenzwert für $\gamma(t) := (x(t), -t)$ gleich e^{α}. Somit kann der Grenzwert $\lim\limits_{t\to 0} x(t)^{y(t)}$ jeden nichtnegativen Wert annehmen.

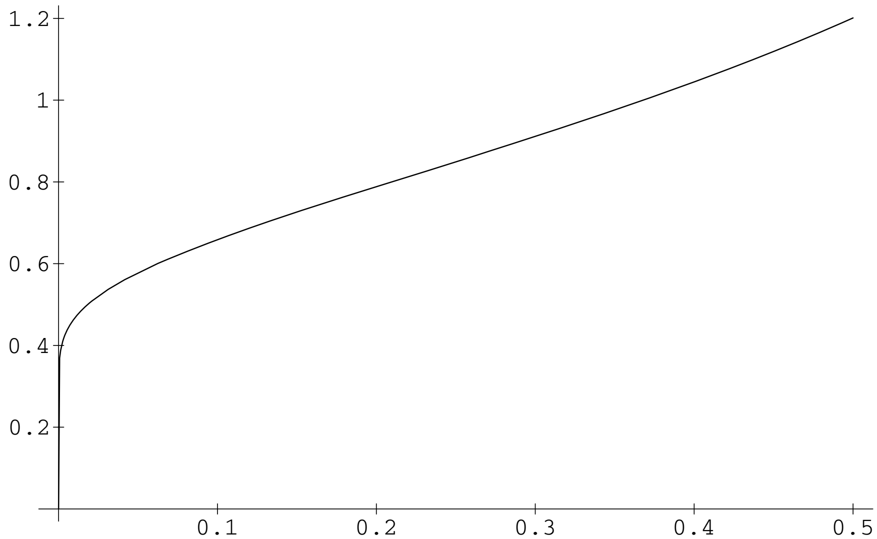

Abbildung 2: Die Kurve $\gamma(t) := \left(e^{-1/t^2}, t\right)$ $(t > 0)$.

Eine hinreichende Bedingung für $\lim\limits_{t\to 0} x(t)^{y(t)} = 1$

Ich werde nun zeigen, daß in den meisten praktischen Situationen der Grenzwert wirklich existiert und gleich 1 ist.

Satz 1 *Sei $t_0 > 0$, $I = [0, t_0]$ ein reelles Intervall und $\gamma = (x, y) : I \to \mathbb{H}$ eine Kurve mit $\gamma(0) = 0$, die stetig bei $t = 0$ ist, und es existiere $\alpha > 0$ sowie $M > 0$, derart, daß*

$$|y(t)| < M x(t)^{\alpha} \ .$$

Dann ist

$$\lim_{t\to 0} x(t)^{y(t)} = 1 \ . \tag{4}$$

Beweis: Gemäß den Voraussetzungen haben wir $|y(t)| < M x(t)^{\alpha}$ für $t > 0$, so daß erstens $x(t) > 0$ ist und weiter

$$|y(t) \ln x(t)| = \frac{|y(t)|}{x(t)^{\alpha}} \cdot |x(t)^{\alpha} \ln x(t)| < M \, |x(t)^{\alpha} \ln x(t)|$$

für alle $t \in [0, t_0]$. Da ferner wegen der Stetigkeit von x bei $t = 0$ die Beziehung

$$\lim_{t\to 0} x(t)^{\alpha} \ln x(t) = \lim_{x\to 0} x^{\alpha} \ln x = 0$$

gilt, folgt $\lim\limits_{t\to 0} y(t) \ln x(t) = 0$, und hieraus das Ergebnis auf Grund der Stetigkeit der Exponentialfunktion. $\square$

Graphisch gedeutet bedeutet der Satz, daß die Grenzwertbeziehung (4) gilt, sofern die Kurve $\gamma(I)$ für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ rechts vom Graphen einer Wurzelfunktion $y(x) = \pm \sqrt[n]{x}$ liegt.

Ein Spezialfall ($\alpha = 1$ bzw. $n = 1$) des eben behandelten Sachverhalts liegt vor, wenn die Kurve $\gamma(I)$ für ein geeignetes $M \in \mathbb{R}$ in einem Sektor $S_M := \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid |\frac{y}{x}| \leq M\}$ liegt.

Folgerung 1 *Sei $t_0 > 0$, $I = [0, t_0]$ ein reelles Intervall und $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine Kurve mit $\gamma(0) = 0$, die stetig bei $t = 0$ ist, und sei $\gamma(I) \subset S_M$ für ein $M \in \mathbb{R}$. Dann gilt (4).*

Ein weitere Konsequenz ist

Folgerung 2 *Sei $t_0 > 0$, $I = [0, t_0]$ ein reelles Intervall und $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine Kurve, die Graph einer Funktion $y(x)$ mit $y(0) = 0$ ist, d. h. $\gamma(t) = \big(x(t), y(x(t))\big)$. Ist y (rechtsseitig) differenzierbar bei $x = 0$, dann gilt (4).*

Beweis: Ist nämlich y rechtsseitig differenzierbar bei $x = 0$, dann ist

$$\left|\frac{y(x) - y(0)}{x - 0}\right| = \left|\frac{y(x)}{x}\right| \leq M$$

in einer rechtsseitigen Umgebung von $x = 0$, z. B. mit $M = 2\,|y'(0)|$, und man kann Folgerung 1 anwenden. □

Um zu zeigen, daß die Voraussetzungen von Satz 1 zwar hinreichend, aber nicht notwendig für die Gültigkeit der Grenzwertbeziehung (4) ist, fehlt uns noch ein Beispiel, für das (4) gilt, bei dem jedoch nicht die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind.

(f): Sei $\gamma(t) := \left(e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}}, t\right)$ und $\gamma(0) = 0$, dann ist γ stetig bei $t = 0$ und $\lim\limits_{t\to 0} x(t)^{y(t)} = \lim\limits_{t\to 0} e^{-\sqrt{t}} = 1$. Auf der anderen Seite ist für alle $\alpha > 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{x(t)^\alpha} = \lim_{t\to 0} t e^{\frac{\alpha}{\sqrt{t}}} = \lim_{u\to\infty} \frac{e^{\alpha u}}{u^2} = \infty$$

unter Verwendung der stetigen Substitution $t = 1/u^2$, so daß die Voraussetzung von Satz 1 nicht erfüllt ist.

Eine weitere hinreichende Bedingung

Der nächste Satz gibt eine hinreichende Bedingung eines anderen Typs, wann die Grenzwertbeziehung (4) gültig ist. Er liefert ferner eine andere Begründung für die Beispiele (c) und (d): Diese Kurven sind nämlich nicht analytisch am Ursprung. Dabei heißt eine Kurve γ analytisch an der Stelle $t = 0$, wenn sie eine Potenzreihenentwicklung $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k t^k, \sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k t^k\right)$ hat, die einen positiven Konvergenzradius besitzt, und wenn ferner $(x_1, y_1) \neq 0$ gilt. Dies schließt zum Beispiel aus, daß x unendlich viele Nullstellen in einer Umgebung von $t = 0$ hat, und somit Beispiel (c). Andererseits ist die Funktion x in (d)

$$x(t) := \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{falls } t \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein typisches Beispiel einer unendlich oft differenzierbaren Funktion, die nicht mit ihrer Taylorreihe $T_x := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(k)}(0)}{k!} t^k$ übereinstimmt und somit bei Null nicht analytisch ist (s. [3], S. 351). In diesem

Fall ist $T_x \equiv 0$, und dies bedeutet, daß die beste polynomiale Approximation einer jeden Ordnung von x in einer Umgebung des Ursprungs immer die Nullfunktion ist und somit x in diesem Sinne von der Nullfunktion nicht unterschieden werden kann mit der Folge, daß der Grenzwert in (4) gleich Null ist. Wie wenig sich x von der Nullfunktion unterscheidet, kann man gut auf Abbildung 2 erkennen.

Die Analytizität von γ bei $t = 0$ hat zur Konsequenz, daß die Kurve eine analytische Fortsetzung für negative Argumente $t \in [-t_0, t_0]$ besitzt (tatsächlich gilt diese Fortsetzung sogar für alle komplexen Argumente $t \in \{t \in \mathbb{C} \mid |t| \leq t_0\}$).

Satz 2 *Sei $t_0 > 0$, $I := [0, t_0]$ ein reelles Intervall und $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine analytische Kurve mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(I) \subset \mathbb{H}$, welche kein Teil der y-Achse ist. Dann gilt* (4).

Beweis: Weil γ analytisch ist, erhalten wir die Darstellung

$$\gamma(t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k t^k, \sum_{k=1}^{\infty} y_k t^k \right) \tag{5}$$

mit reellen Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Angenommen, es sei $x \equiv 0$ oder $y \equiv 0$, d. h. γ sei Teil der y- bzw. x-Achse. Der erste Fall ist nach Voraussetzung nicht möglich und im zweiten Fall ist die Aussage richtig. Somit dürfen wir annehmen, daß die Nullstellen von x und y bei $t = 0$ jeweils endliche Ordnung $n, m \in \mathbb{N}$ haben, d. h.

$$x(t) = \sum_{k=n}^{\infty} x_k t^k = x_n t^n (1 + q(t)), \;\; (x_n > 0, \; \lim_{t\to 0} q(t) = 0) \tag{6}$$

und

$$y(t) = \sum_{k=m}^{\infty} y_k t^k = y_m t^m (1 + r(t)), \;\; (y_m \neq 0, \; \lim_{t\to 0} r(t) = 0)\,. \tag{7}$$

Daß $x_n > 0$ gilt, kann man dadurch einsehen, daß für kleine $t \in (0, \varepsilon)$ die Funktion x nichtnegativ ist.

Aus diesen Darstellungen erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to 0 \\ (x,y)\in\gamma(I)}} x^y &= \lim_{t\to 0} x(t)^{y(t)} = \lim_{t\to 0} \Big(x_n t^n (1 + q(t)) \Big)^{y(t)} \\ &= = \lim_{t\to 0} x_n^{y(t)} \cdot \lim_{t\to 0} t^{ny(t)} \cdot \lim_{t\to 0} \Big(1 + q(t)\Big)^{y(t)} = 1 \cdot \lim_{t\to 0} t^{ny(t)} \cdot 1\;, \end{aligned}$$

und es bleibt zu zeigen, daß $\lim_{t\to 0} t^{ny(t)} = 1$. Für $t \geq 0$ erhält man $t^\alpha = \exp(\alpha \ln t)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, und die Exponentialfunktion ist dort stetig, so daß

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} t^{ny(t)} &= \exp\left(n \lim_{t\to 0} y(t) \ln t \right) \\ &= \exp\left(n y_m \lim_{t\to 0} t^m \ln t \cdot \lim_{t\to 0} \Big(1 + r(t)\Big) \right) = \exp(0) = 1\;, \end{aligned}$$

weil

$$\lim_{t\to 0} t^m \ln t = 0 \quad (m \in \mathbb{N})\,. \qquad \square$$

Während für den vorliegenden Beweis nur formale Rechnungen mit Potenzreihen (genau wie mit Polynomen) nötig waren, merke ich an, daß man mit stärkeren Methoden die Aussage des Satzes 2 auch auf Satz 1 zurückführen kann: Weil $\gamma_1 \neq 0$ ist, gilt entweder $x_1 \neq 0$ oder $y_1 \neq 0$. Somit ist entweder x oder y lokal invertierbar in einer Umgebung von Null und daher existiert entweder x^{-1} oder y^{-1} und ist in dieser Umgebung analytisch, und wir können den Grenzwert in einen der Ausdrücke

$$\lim_{t\to 0} x(t)^{y(t)} = \lim_{u\to 0} \Big(x(x^{-1}(u))\Big)^{y(x^{-1}(u))} = \lim_{u\to 0} u^{\left(y\circ x^{-1}(u)\right)}$$

oder

$$\lim_{t\to 0} x(t)^{y(t)} = \lim_{u\to 0} \Big(x(y^{-1}(u))\Big)^{y(y^{-1}(u))} = \lim_{u\to 0} \Big(x \circ y^{-1}(u)\Big)^{u}$$

transformieren, von denen man zeigen kann, daß sie die Bedingungen von Satz 1 erfüllen. Bei dieser Argumentation finden allerdings einige tiefliegende Sätze aus der Funktionentheorie Verwendung.

Schlußbemerkungen

Zum Abschluß stellen wir noch fest, daß alle Aussagen dieses Aufsatzes lokaler Natur sind, so daß die Bedingungen nur in einer gewissen (rechtsseitigen) Umgebung des Ursprungs $t = 0$ erfüllt sein müssen.

Um formale Umformungen zu erleichtern, ist es sinnvoll, daß in Computeralgebrasystemen analytische Voraussetzungen an willkürliche Funktionen gestellt werden. Derartige Designentscheidungen müssen alle Entwickler von Computeralgebrasystemen treffen. Zum Beispiel wird in DERIVE bei durch `F(t):=` willkürlich definierter Funktion $f(t)$ der Ausdruck `LIM(F(t),t,a)`, also $\lim_{t\to a} f(t)$, zu `F(a)` vereinfacht: Es wird also die Stetigkeit der Funktion f vorausgesetzt. Dies macht durchaus Sinn. Man sollte sich der Grenzen dieser Verfahrensweise als Benutzer allerdings bewußt sein.

Ebenso ist es vernünftig, Ausdrücke der Form 0^0 zu 1 vereinfachen. Die vorliegende Arbeit zeigt, daß hierbei kaum etwas schiefgehen kann. Wieder muß man sich allerdings im Klaren darüber sein, daß es aber Beispielfunktionen gibt, bei denen diese Verfahrensweise zu falschen Ergebnissen führen kann. DERIVE vereinfacht z. B. bei durch `F(t):=` willkürlich definierter Funktion $f(t)$ den Ausdruck `LIM(F(t)^t,t,0)` zu 1. Daher wird z. B. auch der Ausdruck `LIM(SIN(1/t)^t,t,0)` fälschlicherweise in 1 umgeformt: Dieser Grenzwert existiert eigentlich nicht.

Literatur

[1] *Blatter, Ch.:* Analysis I. Heidelberger Taschenbücher **151**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[2] *Graham, R. L. Knuth, D. E. und Patashnik, O.:* Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Massachusetts, 1988.

[3] *Koepf, W., Ben-Israel, A und Gilbert, R. P.:* Mathematik mit DERIVE, Vieweg-Verlag, 1993, ISBN 3-528-06549-4.

[4] *Koepf, W.:* Höhere Analysis mit DERIVE, Vieweg-Verlag, 1994, ISBN 3-528-06594-X.

[5] *MAPLE:* Reference Manual, fifth edition. Watcom publications, Waterloo, 1988.

[6] *muMATH-83*: Reference Manual, Microsoft Corporation, 1983.