Unendlich ist nicht gleich unendlich

Prof. Dr. Wolfram Koepf
Fachbereich Mathematik
Universität Kassel

koepf@mathematik.uni-kassel.de

http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf

Schülerseminar Zahlen
14. Februar 2005

UNIKASSEL
VERSITÄT

Unendliche Mengen

- Die Physiker sagen, die Welt ist endlich: Im ganzen Weltall gibt es nur endlich viele Atome.
- Für den Mathematiker ist dies unbefriedigend: Auch wenn es nur n Atome im Weltall gibt, so akzeptiert ein Mathematiker dies nicht als größte mögliche Zahl.
- Man möchte zu *jeder* Zahl noch eine um 1 größere bilden können. Dies führt zu den natürlichen Zahlen, welche durch das Zählen entstehen.

Die natürlichen Zahlen

Der Zählvorgang liefert folgende Eigenschaften der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$:

- **(Zählbeginn)** 1 ist eine natürliche Zahl.
- **(Nachfolger)** Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ hat einen Nachfolger $n' \in \mathbb{N}$.
- **(Unendlichkeit)** Stets ist $n' \neq 1$.

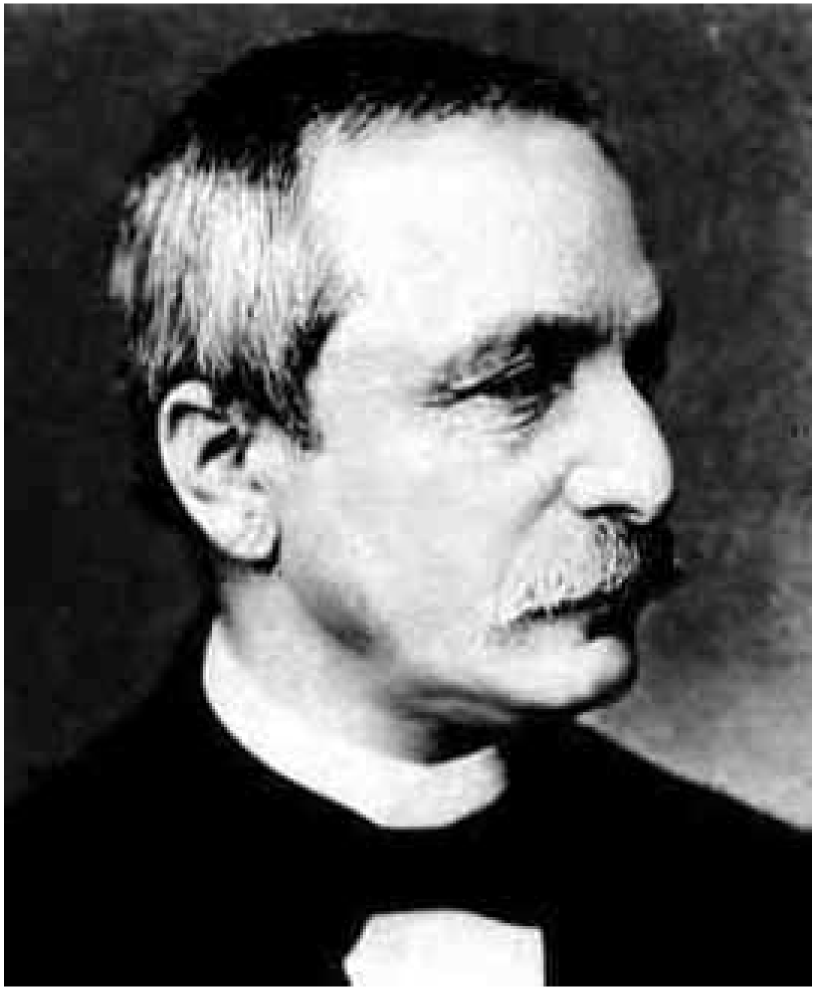
Die natürlichen Zahlen ff.

- **(Injektivität)** Die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind verschieden.

- **(Induktion)** Eine Menge natürlicher Zahlen, welche 1 und mit n auch stets n' enthält, ist bereits ganz $\mathbb{N}$.

Dies nennt man die *Peano-Axiome* für $\mathbb{N}$. Diese Eigenschaften bestimmen $\mathbb{N}$ eindeutig.

Giuseppe Peano, 27. Aug 1858 – 20. April 1932



Leopold Kronecker: 7. Dez 1823 – 29. Dez 1891:

Die ganze Zahl schuf der liebe Gott, alles Übrige ist Menschenwerk.

Axiomensystem von Erhard Schmidt

Man kann auch alternative Axiomensysteme für $\mathbb{N}$ entwerfen. Ein solches System wurde von Erhard Schmidt angegeben:

- **(Ordnung)** Auf $\mathbb{N} \neq \emptyset$ sei eine Ordnung $<$ erklärt.
- **(Kleinstes Element)** Jede nicht leere Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element.

Axiomensystem von Erhard Schmidt ff.

- **(Vorgänger)** Jedes Element von $\mathbb{N}$ außer dem kleinsten hat einen Vorgänger, welcher ebenfalls zu $\mathbb{N}$ gehört.
- **(Unendlichkeit)** $\mathbb{N}$ hat kein größtes Element.

Wieder ist die Unendlichkeit der Menge $\mathbb{N}$ also explizit vorgegeben.

Man kann zeigen, dass aus den Axiomen von Peano die von Erhard Schmidt folgen und umgekehrt.

Erhard Schmidt, 13. Jan 1876 – 6. Dez 1959, Berlin

Modell der natürlichen Zahlen

$$M_0 = \emptyset \qquad \longrightarrow \quad 0$$

$$M_1 = M_0 \cup \{M_0\} = \{\emptyset\} \qquad \longrightarrow \quad 1$$

$$M_2 = M_1 \cup \{M_1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \qquad \longrightarrow \quad 2$$

$$M_3 = M_2 \cup \{M_2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \qquad \longrightarrow \quad 3$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$M_{n+1} = M_n \cup \{M_n\} \qquad \longrightarrow \quad n+1$$

Modell der natürlichen Zahlen ff.

- Diese Form der Definition, welche auf dem Induktionsaxiom beruht, nennt man *rekursiv*.
- Hier stellt sich die Frage, ob die natürlichen Zahlen nun mit 1 oder mit 0 beginnen. Historisch ist klar: Gezählt wurde stets beginnend mit 1. Aber auch das vorgeführte Modell hat seinen Reiz: Man fängt mit nichts (der leeren Menge) an und konstruiert daraus $\mathbb{N}$.
- Ähnliche Frage: Haben wir die Millenniumsfeier zum richtigen Zeitpunkt gefeiert? Dies ist aber vor allem eine historische, keine mathematische Frage.

Abzählbarkeit

Man nennt eine unendliche Menge *abzählbar*, wenn man ihre Elemente mit den natürlichen Zahlen durchnumerieren kann. Beispiele:

- die geraden Zahlen $G = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Wir schreiben $G \sim \mathbb{N}$. Es ergibt sich hier also der seltsame Sachverhalt, daß eine echte Teilmenge einer Menge zu dieser *gleichmächtig* ist. Dies kann nur bei unendlichen Mengen auftreten.
- die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.
- die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.
- die Primzahlen $\mathbb{P} \sim \mathbb{N}$.

Das Hilbert-Hotel

- Man kann die Gleichmächtigkeit von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_{\geqq 0}$ verkleiden in die Anekdote eines vollbesetzten Hotels, dessen (unendlich viele) Räume mit 1,2,. . . durchnumeriert sind. Was macht man, wenn ein weiterer Gast kommt? Jeder Hotelgast zieht in das Zimmer mit der um 1 höheren Nummer.
- Erweiterung: Zwei gleichartige Hotels müssen zusammengelegt werden. Kein Problem: Die Bewohner des ersten Hotels ziehen in die geradzahligen Zimmer und die Bewohner des zweiten Hotels in die ungeradzahligen Zimmer.

David Hilbert, 23. Jan 1862 – 14. Feb 1943, Göttingen

Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$

- Wir beweisen o. B. d. A. $\mathbb{Q}_{>0} \sim \mathbb{N}$ mit dem *Ersten Cantorschen Diagonalverfahren*:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
q \setminus p & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\
2 & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\
3 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

- Damit sieht man auch: Die Bewohner abzählbar unendlich vieler Hotels können alle in einem einzigen Hotel untergebracht werden! Bei diesem Umzug werden unendlich viele Hotels frei!

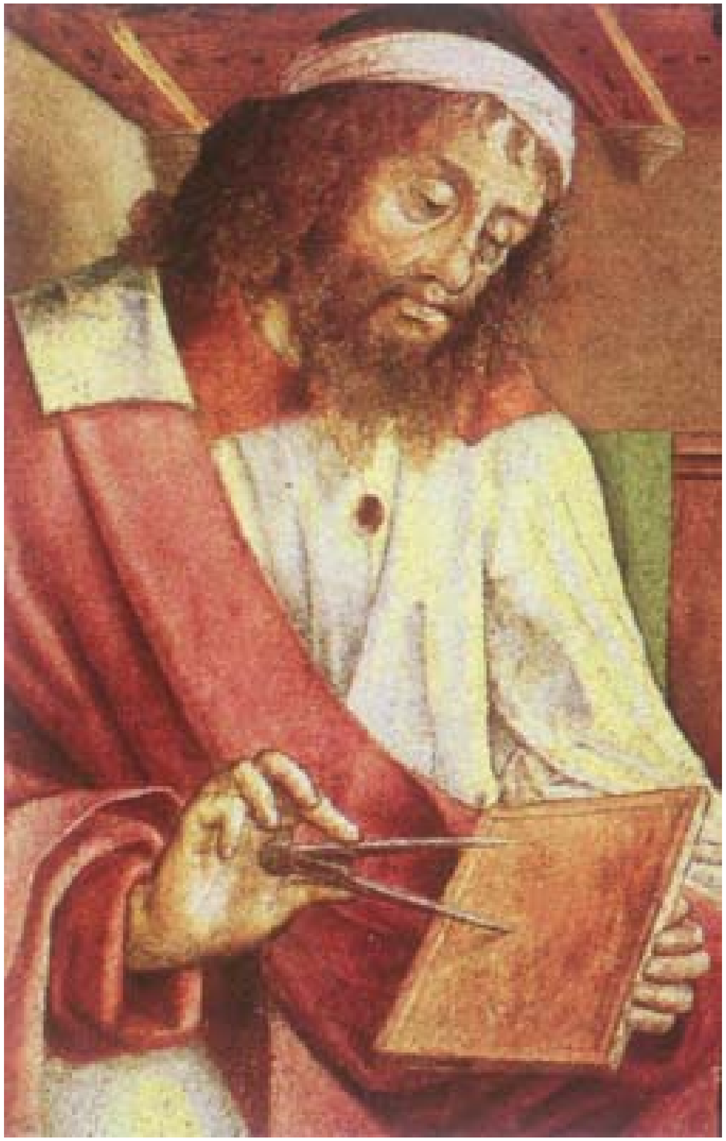
Georg Cantor, 3. März 1845 – 6. Jan 1918, Halle

Es gibt unendlich viele Primzahlen

- Wir führen einen *Beweis durch Widerspruch*:
  Gäbe es nur endlich viele Primzahlen, so könnte man sie in aufsteigender Reihenfolge auflisten:
  $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ und p_n wäre die größte Primzahl.
  Aber es ist auch die Zahl $p := p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1 \in \mathbb{P}$.
  Offenbar ist $p > p_n$, und wir erhalten einen Widerspruch!

- Dieser bestechend einfache Beweis wurde bereits vor mehr als 2000 Jahren von Euklid gefunden!

UNIKASSEL VERSITÄT

Euklid von Alexandria, 325 – 265 v. Chr.

Dezimalzahlen

- **Reelle Zahlen** werden durch Dezimalzahlen dargestellt. Hierbei werden rationale Zahlen durch solche Dezimalzahlen dargestellt, welche *periodisch* sind.
- Der Divisionsalgorithmus aus der Schule erzeugt hierbei die periodische Dezimaldarstellung einer rationalen Zahl.
- Die rationale Zahl, die zu einer periodischen Dezimaldarstellung gehört, findet man durch Berechnung der zugehörigen geometrischen Reihe.

Dezimalzahlen ff.

- Nun kommt eine *Mathematica*-Vorführung zur Konversion rationaler Zahlen in ihre periodischen Dezimalentwicklungen.
- Die Dezimaldarstellung einer *irrationalen Zahl* bricht nicht ab und hat keine endliche Darstellung.
- Reelle Zahlen können auch bzgl. anderer Basen $b \in \mathbb{N}_{\geqq 2}$, $b \neq 10$, entwickelt werden.
- In der Informatik sind die Basen $b = 2$ (Binärsystem), $b = 8$ (Oktalsystem), $b = 16$ (Hexadezimalsystem) und $b = 2^{16} = 65536$ besonders wichtig.

Intervallschachtelung

Wir können $\sqrt{2}$ auf beliebig viele Stellen durch *Intervallschachtelung* berechnen:

$$\begin{aligned} 1 &< \sqrt{2} < 2\ , \\ 1.4 &< \sqrt{2} < 1.5\ , \\ 1.41 &< \sqrt{2} < 1.42\ , \\ 1.414 &< \sqrt{2} < 1.415\ , \\ 1.4142 &< \sqrt{2} < 1.4143\ , \\ &\vdots \end{aligned}$$

mit dem Näherungswert $\sqrt{2} \approx 1.41421356237309504 9\ldots$

Irrationalität

Wir beweisen, dass $\sqrt{2}$ irrational ist:

- Sei $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit *teilerfremden* $p, q \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$2\,q^2 = p^2 \ ,$$

  also ist p^2 gerade und somit ist p gerade: $p = 2r$, $r \in \mathbb{N}$, und es folgt

$$q^2 = 2\,r^2 \ ,$$

  womit bewiesen ist, daß q ebenfalls gerade ist.
- Dies liefert einen Widerspruch zur Teilerfremdheit.

Eine ungewöhnliche irrationale Zahl

- Die Zahl $0.123456789\,10\,11\,12\,13\,14\,\ldots$ ist irrational.
- Beweis: Wäre die Zahl rational, so hätte ihre Dezimaldarstellung eine Periode

$$\ldots\overline{a_1 a_2 \cdots a_n}\,.$$

- Nun gibt es aber bekanntlich natürliche Zahlen mit mehr als n Dezimalstellen (Unendlichkeit!). Dies liefert einen Widerspruch.

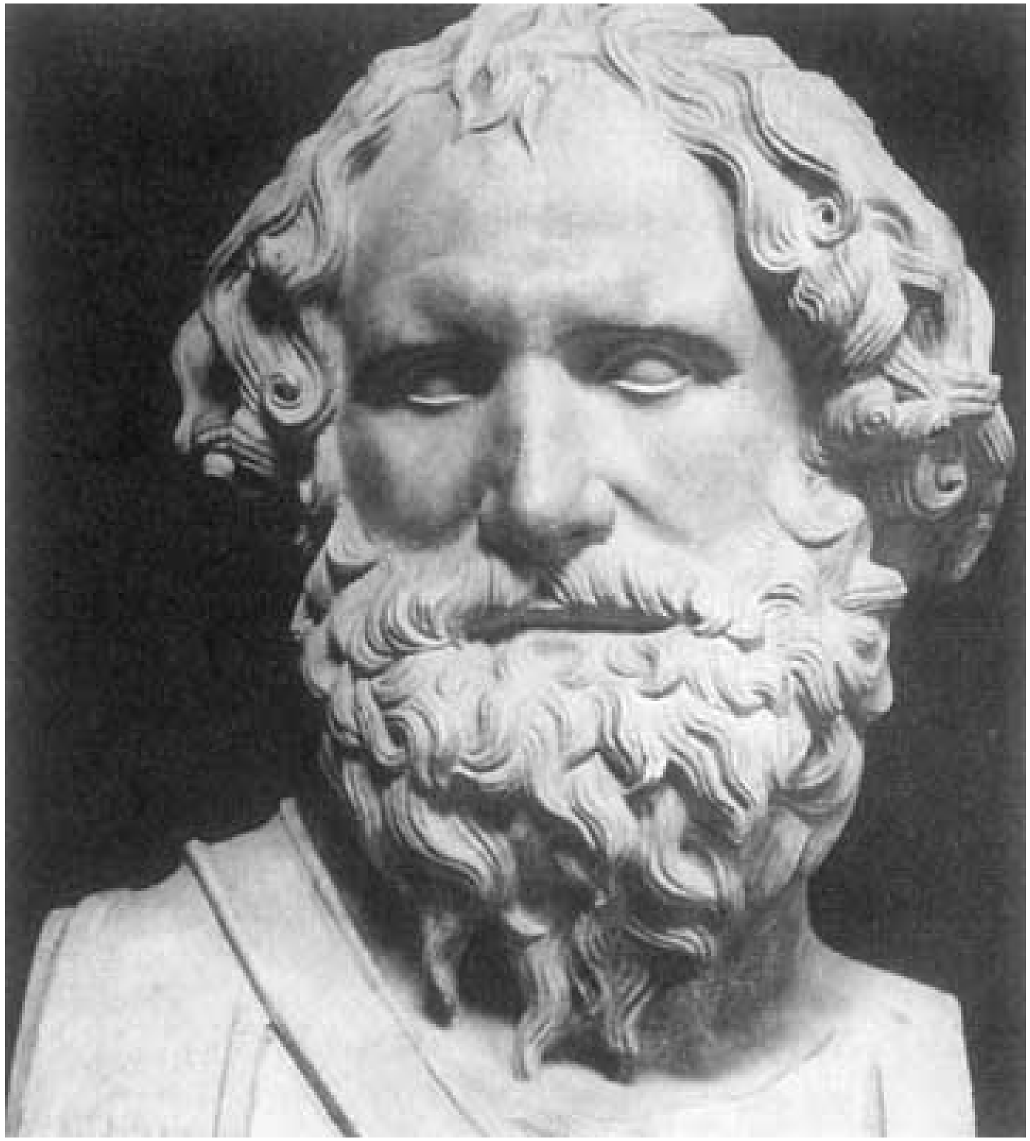
Die Kreiszahl π

- Wir berechnen $\pi = \dfrac{\text{Umfang(Kreis)}}{\text{Durchmesser(Kreis)}}$ auf 10000 Stellen.

- Archimedes kam bereits vor mehr als 2000 Jahren bei der Betrachtung des regelmäßigen 96-Ecks auf die Abschätzungen:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}\,.$$

- Seine Näherung $\pi \approx \frac{22}{7} = 3.\overline{142857}$ ist schon recht gut!



Archimedes von Syracus, 287 – 212 v. Chr.

Eine Zeitungsnotiz

A Chicago Sun-Times wire service report in April identified a Chinese boy, Zhang Zhuo, 12, as having just set a record by reciting from memory the value of π (the ratio of a circle's circumference to its diameter) to 4,000 decimal places – a feat which took him 25 minutes. However, two months earlier, a Seattle Times wire service story had identified a Japanese man, Hiroyuki Goto, 21, as having captured the world record – to over 42,000 decimal places – a feat which took him over nine hours. [Chicago Sun-Times, 24.4.95; Seattle Times, 26.2.95]

Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

- Beweis: Angenommen, es existiere eine Durchnumerierung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1:

n	
1	$0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}\ldots$
2	$0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}\ldots$
3	$0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}\ldots$
4	$0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}\ldots$
5	$0.a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}a_{56}\ldots$
6	$0.a_{61}a_{62}a_{63}a_{64}a_{65}a_{66}\ldots$
$\vdots$	$\vdots$

Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ ff.

- Wählen wir nun für jedes $j \in \mathbb{N}$

$$A_j \in \{0, 1, \ldots, 9\} \qquad \text{mit} \qquad A_j \neq a_{jj} \ ,$$

so kommt

$$0.A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \ldots$$

nicht in unserer Aufzählung vor. Widerspruch.

- Diese Beweisanordnung nennt man das *Zweite Cantorsche Diagonalverfahren*.

Irrationale und transzendente Zahlen

- Obwohl wir nun also wissen, dass es viel mehr irrationale als rationale Zahlen gibt, ist es meist sehr schwierig nachzuweisen, dass eine gegebene Zahl irrational ist. Hier gibt es noch viele offene Probleme.
- $\sqrt[k]{n}$ ist irrational, falls $\sqrt[k]{n} \notin \mathbb{Z}$.
- *Algebraische Zahlen* verallgemeinern die Wurzeln: Sie stellen die Lösungen von Polynomgleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten dar. Reelle Zahlen, die nicht algebraisch sind, heißen *transzendent*.

Irrationale und transzendente Zahlen ff.

- Es gibt nur abzählbar viele algebraische Zahlen! Man kann diese also wieder durchnumerieren.
- Die Majorität aller reeller Zahlen ist also transzendent. Aber man kennt nur eine Handvoll transzendenter Zahlen. Transzendenzbeweise sind recht kompliziert.
- Die Eulersche Zahl $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist transzendent (Charles Hermite, 1873) und die Kreiszahl π ist transzendent (Ferdinand Lindemann, 1882).
- Letzteres bedeutet u. a., dass die *Quadratur des Kreises* unmöglich ist.

Leonhard Euler, 15. April 1707 – 18. Sept 1783, Berlin


20
DDR
e−k+f=2
LEONHARD EULER 1707-1783
1983

Charles Hermite, 24. Dez 1822 – 14. Jan 1901

Ferdinand Lindemann, 12.4.1852–6.3.1939, München

Antinomien

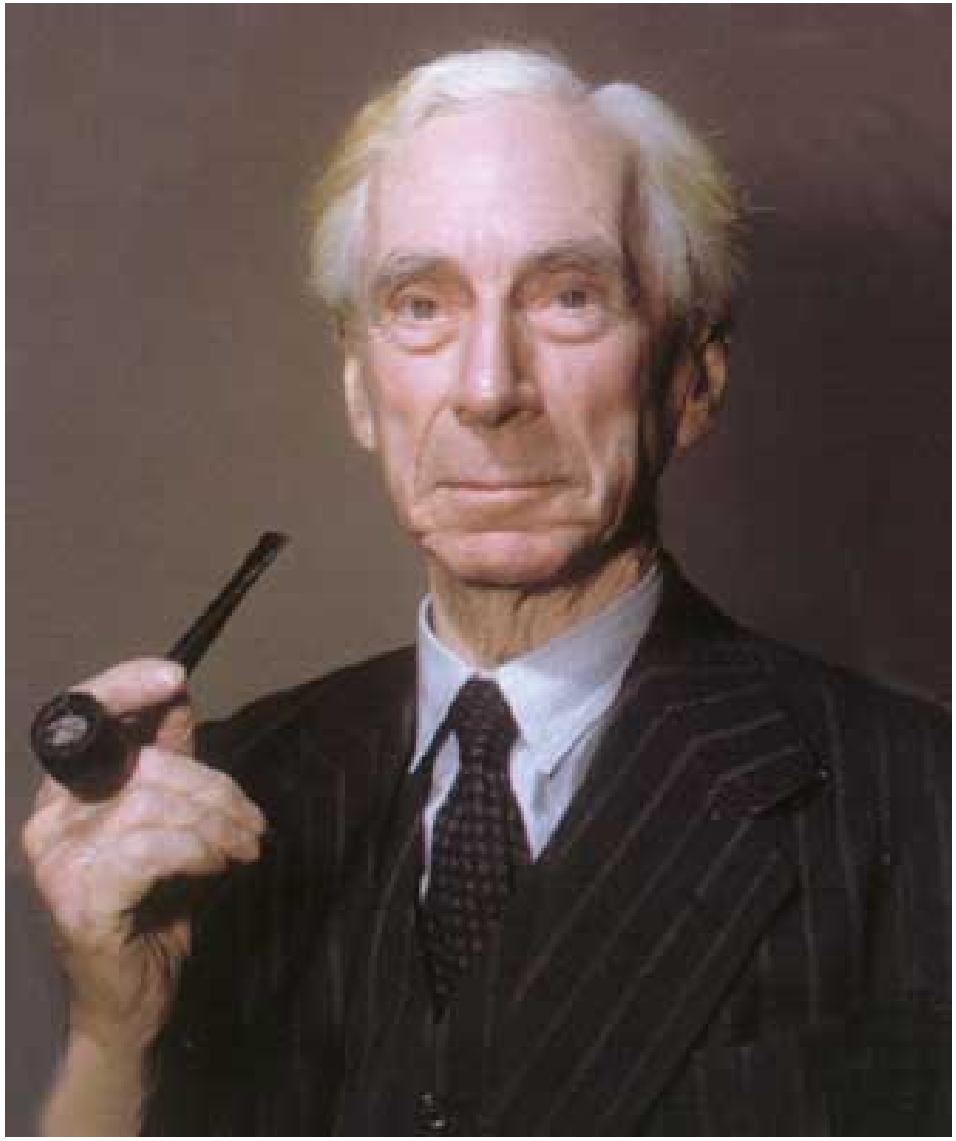
- Wie wir bereits gesehen haben, gibt es im Zusammenhang mit unendlichen Mengen einige ungewöhnliche Effekte. Es können sogar Widersprüche auftreten! Dies hat vor genau 100 Jahren zu einer Grundlagenkrise in der Mathematik geführt.
- Antinomien sind *widersprüchliche Definitionen*.
- Interessant ist insbesondere die **Russelsche Antinomie (1901)** und ihre Varianten.

Die Russelsche Antinomie

- Der Barbier, der genau diejenigen Männer seines Dorfes rasiert, welche sich nicht selbst rasieren.
- Ist das Murphysche Gesetz

  Alles, was schiefgehen kann, geht auch schief.

  korrekt?
- Verzeichnet sich das Buch, in welchem alle Bücher verzeichnet sind, welche sich nicht selbst verzeichnen?



Bertrand Russell, 18. Mai 1872 – 2. Feb 1970

Antinomien und unendliche Mengen

- Wir erklären die Menge M aller Mengen, welche sich nicht selbst enthalten:

$$M = \{x \mid x \notin x\} .$$

- Wir fragen uns nun, ob M in M liegt und erhalten durch Einsetzen von $x = M$ in die Definition

$$M \in M \Leftrightarrow M \notin M .$$

- Dies ist ganz offenbar widersprüchlich!

Antinomien und unendliche Mengen ff.

- Man sollte also Mengen nur vorsichtig durch solche *rekursiven Vorschriften* erklären. Insbesondere gibt es die **Menge aller Mengen** nicht.

- Das kann man auch einsehen wegen folgendem Sachverhalt:

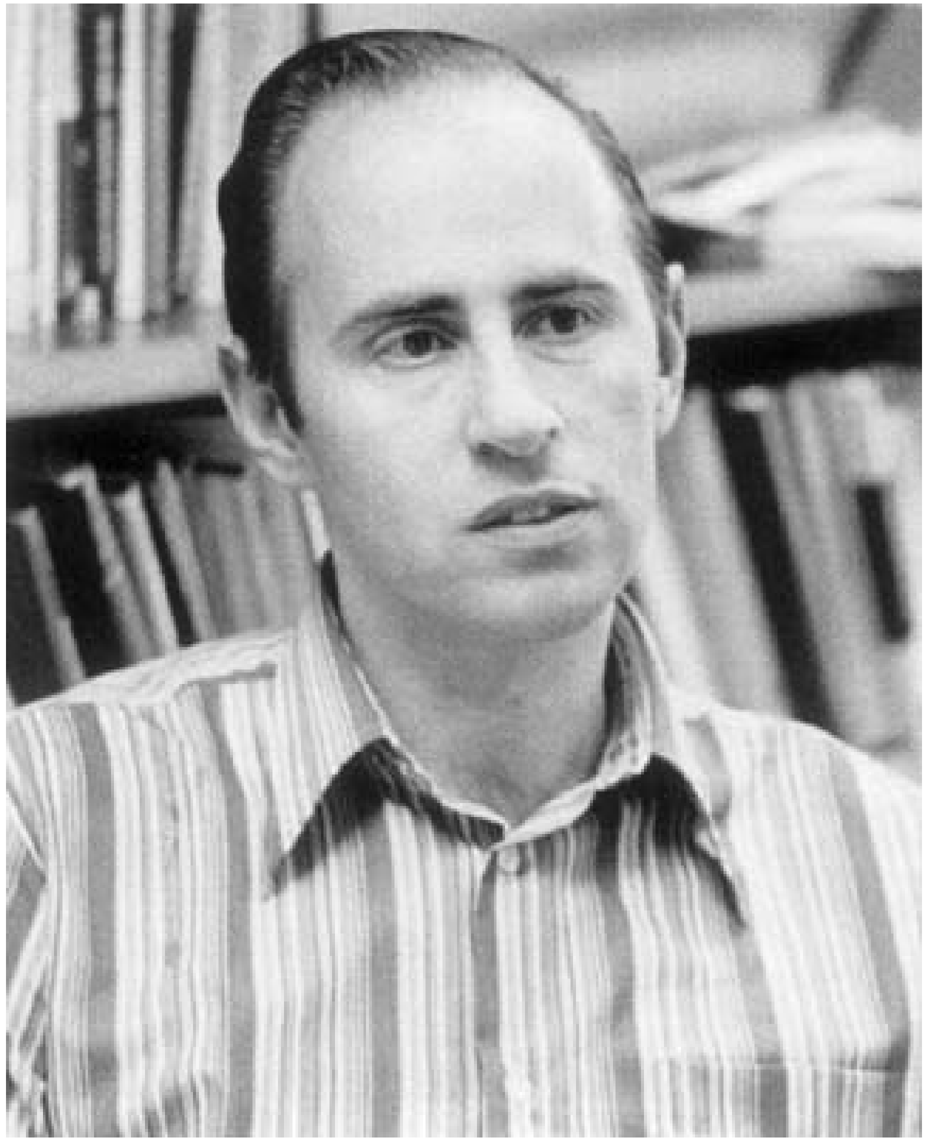
  Die Mächtigkeit der *Potenzmenge* einer Menge M, d. h. der Menge aller Teilmengen von M, ist immer echt größer als die Mächtigkeit von M.

Die Kontinuumshypothese

- Da sowohl die Potenzmenge der natürlichen Zahlen als auch $\mathbb{R}$ überabzählbar sind, stellt sich also die Frage, ob die Mächtigkeit dieser beiden Mengen übereinstimmen. Dies ist als die **Kontinuumshypothese** bekannt.

- Man kann nun zeigen, daß diese Frage prinzipiell **unentscheidbar** ist! Genauer: Kurt Gödel bewies 1938: *Die Kontinuumshypothese kann nicht widerlegt werden*, und 1963 zeigte Paul Cohen: *Die Kontinuumshypothese kann nicht bewiesen werden.*

Kurt Gödel, 28. April 1906 – 14. Jan 1978



Paul Cohen, 2. April 1934 –

Schlussbemerkung

- So haben wir wenigstens zum Schluss einen noch lebenden Mathematiker zitiert.
- Aber auch heute entwickelt sich die mathematische Forschung ständig weiter.
- Das mathematische Genealogieprojekt http://genealogy.mathematik.uni-bielefeld.de führt uns allerdings auch wieder zu den Altmeistern.

Programme und Internetlinks

- Für die nachfolgende halbe Stunde gehen wir in den PC-Pool (Raum 2421) und Sie haben Gelegenheit, Details meines Vortrags nachzuvollziehen.
- Als Mathematikprogamm können Sie *Mathematica* oder auch *Maple* benutzen.
- Home: http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf
- Internet-Suchmaschine: http://www.google.de
- Viel Spaß im weiteren Verlauf der Schülerwoche!