Klassische orthogonale Polynome und ihre Eigenschaften

Prof. Dr. Wolfram Koepf
Fachbereich Mathematik
Universität Kassel
koepf@mathematik.uni-kassel.de
http://www.mathematik.uni-kassel.de/˜koepf

1 Klassische orthogonale Polynome

Um Systeme orthogonaler Polynome zu erklären, benötigt man ein *Skalarprodukt*

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)d\mu(x)$$

mit nicht-negativem Maß $\mu(x)$ und Träger im Intervall $[a,b]$.

Als Spezialfälle betrachten wir

- ein absolut stetiges Maß $d\mu(x)=\rho(x)dx$,
- ein diskretes Maß $\rho(x)$ mit Träger in $\mathbb{Z}$,
- bzw. ein diskretes Maß $\rho(x)$ mit Träger in $q^{\mathbb{Z}}$.

Eine Familie $P_n(x)$ von Polynomen

$$P_n(x)=k_n x^n + k_n' x^{n-1} + k_n'' x^{n-2} + \cdots , \quad k_n \neq 0 \tag{1}$$

heißt orthogonal bzgl. des Maßes $\mu(x)$, wenn

$$\langle f,g\rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } m\neq n \\ d_n^2 \neq 0 & \text{falls } m=n \end{cases} .$$

Die klassischen orthogonalen Polynome können als die gemeinsamen Polynomlösungen (1) einer Differentialgleichung erklärt werden:

$$\sigma(x)P_n''(x)+\tau(x)P_n'(x)+\lambda_n P_n(x)=0 . \tag{2}$$

Der Fall $n = 1$ zeigt, dass τ ein Polynom ersten Grades ist: $\tau(x) = dx + e, d \neq 0$, während wegen $n = 2$ die Funktion σ ein Polynom mit einem Grad $\leqq 2$ sein muss: $\sigma(x) = ax^2 + bx + c$. Betrachten wir schließlich den Koeffizienten von x^n, so folgt $\lambda_n = -n(a(n-1) + d)$.

Man kann die Lösungen (1) der Differentialgleichung (2) gemäß dem folgenden Schema vollständig klassifizieren ([1], 1929):

$\sigma(x) = 0$	Potenzen x^n
$\sigma(x) = 1$	Hermite-Polynome
$\sigma(x) = x$	Laguerre-Polynome
$\sigma(x) = x^2$	Potenzen, Bessel-Polynome
$\sigma(x) = x^2 - 1$	Jacobi-Polynome

Es stellt sich heraus, dass – bis auf die Potenzen – alle diese Polynomsysteme orthogonal sind, wobei allerdings die Gewichtsfunktion der Bessel-Polynome nicht in einem reellen Intervall, sondern im Komplexen erklärt ist.

Die Gewichtsfunktion $\rho(x)$, welche der Differentialgleichung entspricht, erfüllt die *Pearsonsche Differentialgleichung*

$$\frac{d}{dx}(\sigma(x)\rho(x)) = \tau(x)\rho(x) \ .$$

Also gilt

$$\rho(x) = \frac{C}{\sigma(x)} e^{\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx} \ .$$

2 Klassische diskrete Familien

Die klassischen diskreten orthogonalen Polynome können als die Polynomlösungen einer Differenzengleichung erklärt werden:

$$\sigma(x)\Delta\nabla P_n(x) + \tau(x)\Delta P_n(x) + \lambda_n P_n(x) = 0 \ , \qquad (3)$$

wobei $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ und $\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$ den Vorwärts- bzw. Rückwärtsdifferenzenoperator darstellen.

Wieder folgt aus (3) für $n = 1$, dass $\tau(x) = dx + e, d \neq 0$ ist und für $n = 2$, dass $\sigma(x) = ax^2 + bx + c$ ist. Der Koeffizient von x^n liefert wieder $\lambda_n = -n(a(n-1) + d)$.

Die klassischen diskreten Systeme können gemäß dem folgenden Schema klassifiziert werden ([7], 1991):

$\sigma(x) = 0$	fallende Faktorielle $x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1)$
$\sigma(x) = 1$	verschobene Charlier-Polynome
$\sigma(x) = x$	fallende Fakt., Charlier-, Meixner-, Krawtchouk-Pol.
$\deg(\sigma(x), x) = 2$	Hahn-Polynome

Wieder stellen – bis auf die fallenden Faktoriellen – alle Lösungsfamilien orthogonale Polynomfamilien dar.

Die Gewichtsfunktion $\rho(x)$, welche der Differenzengleichung entspricht, erfüllt die Pearsonsche Differenzengleichung

$$\Delta(\sigma(x)\rho(x)) = \tau(x)\rho(x) \ .$$

Also gilt

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\sigma(x)+\tau(x)}{\sigma(x+1)} \ .$$

3 Hypergeometrische Funktionen

Die Potenzreihe

$${}_pF_q\left(\left.\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right| z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\, z^k \ ,$$

deren Koeffizienten $a_k = A_k z^k$ ein rationales Termverhältnis

$$\frac{A_{k+1}\, z^{k+1}}{A_k\, z^k} = \frac{(k+a_1)\cdots(k+a_p)}{(k+b_1)\cdots(k+b_q)} \frac{z}{(k+1)}$$

besitzen, heißt die *verallgemeinerte hypergeometrische Funktion*. Der Summand $a_k = A_k z^k$ einer hypergeometrischen Reihe heißt *hypergeometrischer Term* bzgl. k.

Wegen

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\sigma(x)+\tau(x)}{\sigma(x+1)}$$

sind also die Gewichtsfunktionen $\rho(x)$ der klassischen diskreten orthogonalen Polynome hypergeometrische Terme bzgl. der Variablen x.

Für die Koeffizienten der hypergeometrischen Funktion erhalten wir die Formel

$${}_pF_q\left(\left.\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right| z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!} \ ,$$

wobei $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ das Pochhammersymbol (engl.: shifted factorial) ist.

Einfache Beispiele hypergeometrischer Funktionen sind die Exponentialfunktion

$$e^z = {}_0F_0(z) \ ,$$

die Sinusfunktion

$$\sin z = z \cdot {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ 3/2 \end{matrix}\middle| -\frac{z^2}{4}\right)$$

sowie $\cos(z), \arcsin(z), \arctan(z),\ \ln(1+z), \mathrm{erf}(z), L_n^{(\alpha)}(z),\ \ldots,$ aber z. B. nicht $\tan(z)$.

Aus der Differential- bzw. Differenzengleichung der orthogonalen Polynome lässt sich eine hypergeometrische Darstellung herleiten (s. [5], [7]). Beispielsweise sind die Hahn-Polynome gegeben durch[1]

$$Q_n(x;\alpha,\beta,N) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, -x, n+1+\alpha+\beta \\ \alpha+1, -N \end{matrix}\middle| 1\right) \ .$$

4 *q*-orthogonale Polynome

Um orthogonale Polynome mit dem Gitter $q^{\mathbb{Z}}$ zu erklären, benötigt man einige weitere Notationen.

Der Operator ([2], 1949)

$$D_q\, f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}$$

heißt *Hahns q-Differenzen-Operator*, und die q-Klammer ist erklärt durch

$$[k]_q = \frac{1-q^k}{1-q} = 1 + q + \cdots + q^{k-1} \ .$$

Die q-orthogonalen Polynome können als die Polynomlösungen folgender q-Differenzengleichung erklärt werden:

$$\sigma(x) D_q\, D_{1/q}\, P_n(x) + \tau(x) D_q\, P_n(x) + \lambda_n P_n(x) = 0 \ .$$

[1]Achtung: In der russischen Literatur sind die Parameter α und β vertauscht, und es wird ein anderer Vorfaktor verwendet. Die vorliegende Definition ist die der amerikanischen Schule, s. [3].

Ähnlich wie im klassischen Fall erhalten wir $\tau(x) = dx + e, d \neq 0$, $\sigma(x) = ax^2 + bx + c$ sowie $\lambda_n = -a[n]_{1/q}[n-1]_q - d[n]_q$.

Die klassischen q-Systeme können gemäß dem folgenden Schema klassifiziert werden ([8], 1993):

$\sigma(x) = 0$	Potenzen und q-Pochhammersymbole (4)
$\sigma(x) = 1$	diskrete q-Hermite II-Polynome
$\sigma(x) = x$	q-Charlier-, q-Laguerre-, q-Meixner-Polynome
$\deg(\sigma(x), x) = 2$	q-Hahn-Polynome, Big q-Jacobi-Polynome

Die Gewichtsfunktion $\rho(x)$, welche der q-Differenzengleichung entspricht, erfüllt die Pearsonsche q-Differenzengleichung

$$D_q(\sigma(x)\rho(x)) = \tau(x)\rho(x) \; .$$

Also gilt

$$\frac{\rho(qx)}{\rho(x)} = \frac{\sigma(x) + (q-1)x\tau(x)}{\sigma(qx)} \; .$$

5 Basic Hypergeometric Series

Statt Reihen, bei denen A_k ein rationales Termverhältnis $A_{k+1}/A_k \in \mathbb{Q}(k)$ besitzt, können wir solche Reihen betrachten, deren Koeffizienten A_k ein Termverhältnis $A_{k+1}/A_k \in \mathbb{Q}(q^k)$ bzgl. der Basis $q \in \mathbb{R}$ haben.

Dies führt zur q-hypergeometrischen Reihe (engl.: basic hypergeometric series)

$${}_r\varphi_s\left(\begin{array}{c} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{array}\middle|\, q\, ;\, x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\, x^k \; .$$

Nun sind die Koeffizienten gegeben durch

$$A_k = \frac{(a_1; q)_k \cdots (a_r; q)_k}{(b_1; q)_k \cdots (b_s; q)_k} \frac{x^k}{(q; q)_k} \left((-1)^k\, q^{\binom{k}{2}}\right)^{1+s-r} \; ,$$

wobei

$$(a; q)_k = \prod_{j=0}^{k-1} (1 - aq^j) \tag{4}$$

das q-Pochhammer-Symbol bezeichnet. Wegen

$$\frac{\rho(qx)}{\rho(x)} = \frac{\sigma(x) + (q-1)x\tau(x)}{\sigma(qx)} \; .$$

ist die Dichte $\rho(x)$ eines q-Orthogonalsystems des Hahn-Tableaus ein q-hypergeometrischer Term bzgl. x.

Alle klassischen orthogonalen Familien haben (i. a. mehrere) q-hypergeometrische Entsprechungen. Beispielsweise sind die Big q-Jacobi-Polynome gegeben durch

$$P_n(x;a,b,c;q) = {}_3\varphi_2\left(\begin{array}{c} q^{-n}, a, b, q^{n+1}, x \\ aq, cq \end{array}\middle|\, q\,;\, q\right) .$$

Alle betrachteten klassischen Orthogonalfamilien – mit absolut stetiger, arithmetischer und geometrischer Dichte – lassen sich durch geeignete Grenzprozesse aus den Big q-Jacobi-Polynomen erzeugen.

6 Berechnung der Differentialgleichung aus der Rekursionsgleichung

Aus der Differential- bzw. (q)-Differenzengleichung folgt die Dreitermrekursion von $P_n(x)$, ausgedrückt durch die Koeffizienten von $\sigma(x)$ und $\tau(x)$. Wie man die Dreitermrekursion durch die fünf Parameter a, b, c, d und e ausdrückt, kann man leicht mit Maple berechnen.

Nutzt man diese Information in der umgekehrten Richtung, kann man die entsprechende Differential- bzw. (q)-Differenzengleichung aus einer gegebenen Dreitermrekursion bestimmen, s. [6].

Beispiel 1: Gegeben sei die Rekursionsgleichung

$$P_{n+2}(x) - (x-n-1)\, P_{n+1}(x) + \alpha(n+1)^2 P_n(x) = 0 .$$

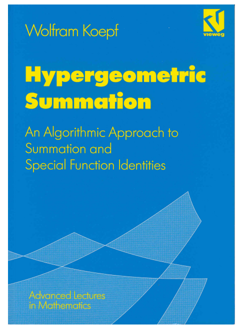
Man stellt fest, dass für $\alpha = 1/4$ verschobene Laguerre-Polynome und für $\alpha < 1/4$ Meixner- und Krawtchouk-Polynome Lösungen sind.

Beispiel 2: Gegeben sei die Rekursionsgleichung

$$P_{n+2}(x) - xP_{n+1}(x) + \alpha\, q^n (q^{n+1}-1) P_n(x) = 0 .$$

Es folgt, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ q-orthogonale Polynomlösungen dieser Rekursion existieren.

7 Schlussbemerkung



Die benutzte Maple-Software wurde für mein Buch [4] entwickelt und ist auf meiner Homepage erhältlich: `http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf`.

Ich hoffe, in meinem Vortrag gezeigt zu haben, dass und wie man mit Computeralgebra-Algorithmen interessante neue Forschungsergebnisse im durchaus klassischen Gebiet der orthogonalen Polynome erhalten kann.

Wichtige Teilalgorithmen, die zur Berechnung benötigt werden, sind vor allem die Algorithmen der Linearen Algebra, die Polynomfaktorisierung und Gröbnerbasen.

Literatur

[1] Bochner, S.: Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme. Math. Z. **29**, 1929, 730–736.

[2] Hahn, W.: Über Orthogonalpolynome, die q-Differenzengleichungen genügen, Math. Nachr. **2** (1949), 4–34.

[3] Koekoek, R. und Swarttouw, R.F.: The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue. Report 98–17, Delft University of Technology, Faculty of Information Technology and Systems, Department of Technical Mathematics and Informatics, Delft; electronische Version erhältlich bei `http://aw.twi.tudelft.nl/~koekoek/research.html`, 1998.

[4] Koepf, W.: *Hypergeometric Summation*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1998.

[5] Koepf, W. und Schmersau, D.: Representations of orthogonal polynomials. J. Comput. Appl. Math. **90**, 1998, 57–94.

[6] Koepf, W. und Schmersau, D.: Recurrence equations and their classical orthogonal polynomial solutions. Appl. Math. Comput. **128**, 2002, 303–327.

[7] Nikiforov, A. F., Suslov, S. K. und Uvarov, V. B.: *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable.* Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1991.

[8] Nikiforov, A. F. und Uvarov, V. B.: Polynomial solutions of hypergeometric type difference equations and their classification. Integral Transforms and Special Functions **1**, 1993, 223–249.