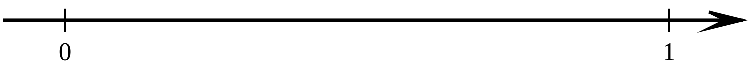
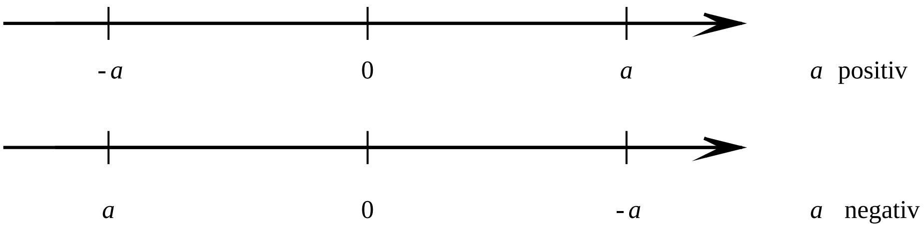
Die Anordnung der reellen Zahlen

Materialien zur Vorlesung **Elementare Analysis**, Wintersemester 2003 / 4

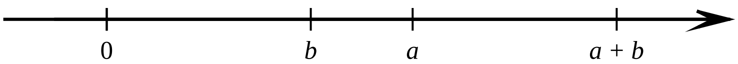
Wenn Sie sich die reellen Zahlen als Punkte auf einer Zahlengerade vorstellen, ist es sinnvoll erst einmal zwei Stellen zu fixieren für Null und Eins:



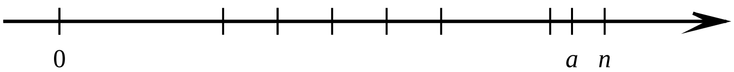
Ist dann $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$, so liegt a rechts bzw. links von Null auf der Zahlengerade. $-a$ liegt in jedem Fall auf der jeweils anderen Seite.



Liegen $a, b \in \mathbb{R}$ rechts von Null, so auch ihre Summe $a + b$ und ihr Produkt $a \cdot b$.



$a \cdot b$ können Sie sich als Maßzahl des Flächeninhaltes eines Rechteckes mit den Seiten der Längen a und b vorstellen.
Wenn Sie sich eine reelle Zahl a denken, dann können Sie beim "Durchlaufen" der natürlichen Zahlen auf dem Zahlenstrahl immer eine natürliche Zahl n finden, die rechts von a liegt:



Statt a liegt rechts von Null, wird die Schreibweise $a > 0$ gebraucht; gelesen a ist größer Null, bzw. a ist positiv.

Anordnungsaxiome der reellen Zahlen

Die eben geschilderten anschaulichen Vorstellungen werden in den folgenden Axiomen über die Anordnung von reellen Zahlen zusammen gefasst:

A 1 Für jede reelle Zahl a gilt genau eine der drei Beziehungen:

$$a > 0, a = 0, -a > 0 .$$

A 2 Sind $a, b > 0$, so gilt auch $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$.

A 3 Das Archimedisches Axiom:
Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n - a > 0$.

In A 1 – A 3 wird nur die Relation "größer als Null" benutzt. Das ist insbesondere bei A 3 etwas umständlich.

Die Menge der positiven reellen Zahlen, also der Zahlen größer als Null, wird häufig mit $\mathbb{R}^+$ bezeichnet. Falls $-a$ positiv ist, dann heißt a negativ.

Neben der Eigenschaft positiv zu sein werden auch die Größer-Relation ">", die Kleiner-Relation "<", die Größer-Gleich-Relation "≥" und die Kleiner-Gleich-Relation "≤" benutzt, die jetzt definiert werden.

(i) $a > b$, falls $a - b > 0$, a ist größer als b ,
(ii) $b < a$, falls $a > b$, b ist kleiner als a ,
(iii) $a \geq b$, falls $a > b$ oder $a = b$, a ist größer oder gleich b ,
(iv) $a \leq b$, falls $a < b$ oder $a = b$, a ist kleiner oder gleich b .

Bemerkung: "Falls" wird hier in der Bedeutung von "genau dann wenn" benutzt!

Aus den Axiomen A 1 und A 2 folgen

Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen:

Es seien $a, b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$, also die Transitivität von " > ".
2. Aus $a > b$ folgen
2.1 $a + c > b + c$, für alle $c \in \mathbb{R}$,
2.2 $a \cdot c > b \cdot c$, für $c > 0$,
2.3 $a \cdot c < b \cdot c$, für $c < 0$,
2.4 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, für $b > 0$.

Beweis zu 1:
Nach (i) folgt aus $a > b$ und $a > c$ direkt $a - b > 0$ und $b - c > 0$, also nach A 2 $a + c = (a - b) + (b - c) > 0$,
d.h. $a > c$ nach (i) .

Beweis zu 2.1:
$a > b$ bedeutet nach (i) $a - b > 0$, also ist auch $(a + c) - (b + c) > 0$, was nach (i) $a + c > b + c$ ergibt.

Beweis zu 2.2:
Mit A 2 folgt aus $a - b > 0$ für $c > 0$ auch $(a - b) \cdot c > 0$, d.h. $a \cdot c - b \cdot c > 0$, also $a \cdot c > b \cdot c$ nach (i).
Beweis zu 2.3 analog.

Beweis zu 2.4:
Nach A 2 ist mit $a > b > 0$ auch $a \cdot b > 0$.
Wäre nun zuerst $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, so würde mit 2.2 durch Multiplikation mit $a \cdot b$ folgen $b = \frac{a \cdot b}{a} > \frac{a \cdot b}{b} = a$.
Das ist ein Widerspruch.
Zweitens folgt aber aus $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ auch $a = b$, also ebenfalls ein Widerspruch.

3. Aus $a > b$ und $\alpha > \beta$ folgen:
3.1 $a + \alpha > b + \beta$,
3.2 $a \cdot \alpha > b \cdot \beta$, falls $b, \beta > 0$.

Beweis für 3.1:
Aus $a > b$ folgt mit 2.1 $a + \alpha > b + \alpha$. Aus $\alpha > \beta$ folgt mit 2.1 $\alpha + b > \beta + b$.
Mit der Transitivität von ">" folgt $a + \alpha > b + \alpha = \alpha + b > \beta + b = b + \beta$.
Der Beweis für 3.2 verläuft analog.

4. Für $a \neq 0$ gilt $a^2 > 0$.

Beweis:
Ist $a > 0$, so folgt $a^2 > 0$ mit A 2. Ist $-a > 0$, so folgt $a^2 = (-a)\cdot(-a) > 0$ analog.

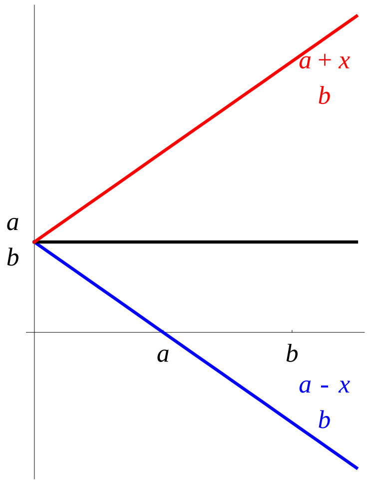
4.1 Aus 4. folgt $1 = 1 \cdot 1 > 0$, da $1 \neq 0$ und mit A 2 dann auch $-1 < 0$.

4.2 Für $a > 0$ gilt $\frac{1}{a} > 0$.

Beweis:
Nach 4. ist $a^2 > 0$. Wäre $\frac{1}{a} = 0$, so wäre auch $a = a^2 \cdot \frac{1}{a} = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung $a > 0$.
Wäre $0 > \frac{1}{a}$, so würde mit 2.2 $0 > \frac{1}{a} \cdot a^2 = a$ gelten, ebenfalls ein Widerspruch. Also bleibt nach A 1 nur $\frac{1}{a} > 0$ übrig.

5. Es seien $a, b, x \in \mathbb{R}$ mit $b, x > 0$.

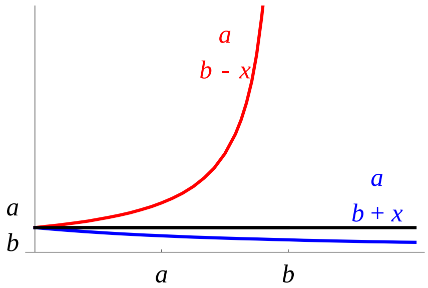
Dann gilt $\frac{a-x}{b} < \frac{a}{b} < \frac{a+x}{b}$.



Beweis:
Aus $x > 0$ folgt mit 2.1 $a < a + x$ und mit 2.4 $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b}$.

Wird nun a durch $a - x$ ersetzt, so folgt $\frac{a-x}{b} < \frac{(a-x)+x}{b} = \frac{a}{b}$.

6. Es seien $a, b, x > 0$.
Dann gilt $\frac{a}{b+x} < \frac{a}{b}$ und falls noch $x < b$ ist, gilt auch $\frac{a}{b} < \frac{a}{b-x}$.



Beweis:

0	$<$	x	
b	$<$	$b+x$	2.1
$\frac{1}{b+x}$	$<$	$\frac{1}{b}$	2.4
$\frac{a}{b+x}$	$<$	$\frac{a}{b}$	2.2

Damit ist der erste Teil bewiesen.
Der zweite folgt wieder durch Ersetzung von b durch $b-x$:
$$\frac{a}{b} = \frac{a}{(b-x)+x} < \frac{a}{b-x}.$$

Warum sind Ungleichungen in der Analysis so wichtig?

Es können mit ihnen Gleichungen bewiesen werden!

Der einfache Fall ist: Es sei $a \leq b$ und $b \leq a$. Dann ist $a = b$.

Der wichtige Fall ist:
a und b "unterscheiden sich um beliebig wenig". Dann ist $a = b$.

Doch was heißt "unterscheiden sich beliebig wenig"? Es heißt: Der Betrag der Differenz von a und b ist kleiner als jede positive Zahl c.

Beweis:
1. Fall: $a = b$. Fertig! 2. Fall: $a \neq b$. O.B.d.A. sei $a > b$. Es gelte also für jedes $c > 0$, dass $a - b < c$ und damit auch $0 < a - b < c$.
Wenn das für jedes $c > 0$ gilt, dann gilt es insbesondere für $c_1 := \frac{a-b}{2}$, was nach A 2 und 2.4 auch positiv ist. Damit folgt $0 < a - b < c_1 = \frac{a-b}{2}$, und nach Multiplikation mit $\frac{1}{a-b}$(> 0, da $a - b > 0$), dass $\frac{1}{2} > 1$, also ein Widerspruch.