■ 1.1 Zur Quadratur des Kreises – eine Berechnung von π

Materialien zur Vorlesung **Elementare Analysis**, Wintersemester 2003 / 4

■ 1.1.1 Einige Presseartikel zu π

Frankfurter Rundschau, Frankfurt, 5. 8. 95

Pi mal Daumen

TOKIO, 4. August (ap). Zwei japanische Mathematiker haben am Freitag einen neuen Weltrekord für die Berechnung der Zahl π bekanntgegeben. Wie Yasumasa Kanada und Daisuke Takahashi von der Universität Tokio erklärten, berechneten sie die Zahl, die das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser angibt, auf 3,22 Milliarden Dezimalstellen genau. Wissenschaftler der US-amerikanischen Columbia-Universität hielten den alten Rekord mit 2,26 Milliarden Stellen.

Professor Kaneda sagte, seine Gruppe habe einen Großcomputer benutzt, um zwei verschiedene Formeln durchrechnen zu lassen. Für die erste habe der Rechner 36 Stunden und 52 Minuten gebraucht, für die andere 53 Stunden und 43 Minuten. Mathematiker sind der Meinung, daß Pi unzählig viele Dezimalstellen hat. Die präzise Berechnung der Kreiszahl hat keinerlei praktischen Wert.

Scientists find even more pi

Siehe auch: Mathematik im Internet: π

Extra Tip, Kassel, 24. 9 1992

Zahl Pi falsch

Hermann Wahler ist Rentner. Sein Hobby: Mathematik. Besonders angetan hat's ihm der Rauminhalt des Kreises. Der wird über den Radius und die Zahl Pi berechnet. "Ich habe das nachgerechnet, über das Dreieck", sagt Wahler. Ergebnis: Die Zahl Pi kann so nicht stimmen. Hat er sich verrechnet oder die Mathe-Professoren? Lesen Sie mehr auf Seite 6.

Seite 6:

Zahl Pi neu berechnet!

Drückt man beim Taschenrechner auf die Taste "", erscheint der Wert 3,14159. damit errechnet man den Rauminhalt des Kreises, bisher. "Diese Zahl Pi ist falsch", meint Hermann Wahler aus Kaufungen.* "Nach meinen Berechnungen ist diese Zahl kleiner als 3,14!" Wie er drauf kommt? Er berechnet Pi nicht über das Quadrat, sondern übers Dreieck. Normalerweise wird die Zahl Pi über die Quadratur des Kreises berechnet. Ein Quadrat, dessen Ecken die Innenflächen des Kreises berühren; ein Quadrat, dessen Linien die Außenpunkte des Kreises berühren.

Eine Formel dazu, und raus kommt die Zahl Pi: 3,14159.

Doch Wahler gibt sich damit nicht zufrieden. Sein Trick: Er zieht ein Vieleck innerhalb des Kreises. Je mehr Ecken den Kreis berühren, desto genauer spiegelt dieses Vieleck, den Rauminhalt des Kreises wieder.

Das Vieleck unterteilt den Kreis in viele Dreiecke plus die Summe der Kreisabschnitte. Wahlers Ergebnis: Die Zahl Pi ist kleiner als 3,14. denn beim 600-Eck liegt sie bei 3.139999998, beim 6000-Eck bei 3,139999976 und beim 60.000-Eck bei 3,13999981.
Hermann Wahler: "Je mehr Ecken ich berechne, desto genauer wird die endgültige Zahl Pi. Sicher schon jetzt: Die Zahl, die sich bei den bisherigen Berechnungen ergibt, kann so nicht stimmen."

Stimmt seine Rechnung? "Ich glaube schon, doch ich hoffe, daß das jemand auf einem Großrechner nachrechnet", meint Wahler. Denn er selber hat nur einen Taschenrechner zur Verfügung. Es könnte sein, daß ein Rundungsfehler innerhalb seiner komplizierten Berechnung die Zahl Pi verändert.
"Die ganze Geschichte der Zahl habe ich verfolgt, es wurde immer um den Rauminhalt des Kreises gestritten", meint Wahler. Bis eben jemand die Formel mit Quadratur des Kreises herausfand, doch der Kaufunger gibt sich damit nicht zufrieden.

*Name und Ort geändert

Kurhessische Landeszeitung, Kassel, 7. 3. 1934

Eine sensationelle Veröffentlichung des K.f.d.K., Landesleitung Kurhessen:

Quadratur des Kreises entdeckt

Ein epochales Forschungsergebnis von unschätzbarer Bedeutung - Der Musikforscher Willi Oberle, Kassel, löst ein Jahrhundert altes Problem. Der Konstruktion des Ton-Prismas entgegen.
Durch die "Kurhessische Landeszeitung" gibt der Landesleiter des Kampfbundes für deutsche Kultur, Max Köhler, der Öffentlichkeit folgendes Forschungsergebnis von Willi Oberle, Kassel-Niederzwehren, bekannt, das besagt, daß dieser durch die Musikgeometrie zur Lösung der Quadratur des Kreises gelangt ist:

"Dem Musikforscher Willi Oberle in Kassel-Niederzwehren, früher in Baden-Baden, Mitarbeiter des Kampfbundes für deutsche Kultur, Landesleitung Kurhessen, ist es gelungen, aus den Ergebnissen seiner Forschungen auf dem Gebiete der Musikgeometrie die Quadratur des Kreises aufzudecken. [...]

Der Weg zur Lösung

Daß in seinen Konstruktionen die Quadratur des Kreises verborgen sein könne, vermutete Oberle schon seit 1927. Die vielen anderen Probleme, wie das Kristallisationsphänomen, das Schwingungsproblem (Urschwingungen), die Architektonik der Zukunft, das Rassenproblem (Chromosomen = Ariogermanischer Urtyp), das Urwort (Runen, äyptische und griechische Inschriften), in erster Linie das Tonprisma erschienen Oberle aber weit wichtiger als die Quadratur des Kreises, denn er erkannte, daß die Lösung der genannten Probleme aus seiner Musikgeometrie so gut wie gewiß ist. Erst seit Oberle Mitarbeiter des Kurhessischen Kampfbundes für deutsche Kultur geworden war und durch ihn neuen Schaffensimpuls erhielt, wurde sein Interesse für das Problem der Quadratur des Kreises wach.
Mit größter Intensität widmete sich dann Oberle der Aufgabe, das Problem aus seinen Konstruktionen aufzudecken. Daß es sich nur um seine Aufdeckung handelt, ist ausdrücklich zu betonen, weil die Quadratur des Kreises, wie gesagt, seit 1927 in den Konstruktionen Oberles bis 1933 einen Dornröschenschlaf hielt. [...]

Wir beschränken uns hier zunächst auf die Verkündigung der gefundenen Grundresultate:

"Der absolute Inhalt eines jeden Kreises ist gleich dem Quadrat über der Hypothenuse des rechtwinckligen Dreiecks, dessen eine Kathede die größte Seite des Oberleschen Trapezes darstellt, und dessen kleine Kathede gleich der Entfernung vom Kreismittelpunkt bis zum Schnittpunkte der beiden Diagonalen des das Trapez umschließenden Kreises ist. Die beiden genannten Diagonalen schneiden sich im goldenen Schnitt und zugleich im rechten Winkel. Die kleinste Seite des Trapezes ist gleich dem Radius des Kreises (Pythagoräischer Lehrsatz!)".

Forschungserfolg von unaussprechlicher Bedeutung
Die Bedeutung der Entdeckung der Quadratur des Kreises läßt sich erst daran ermessen, daß sich die Menschheit seit Jahrhunderten mit diesem Problem beschäftigt hatte, ohne zu einer Lösung zu kommen. [...]

■ 1.1.2 Näherungsweise Berechnung von π

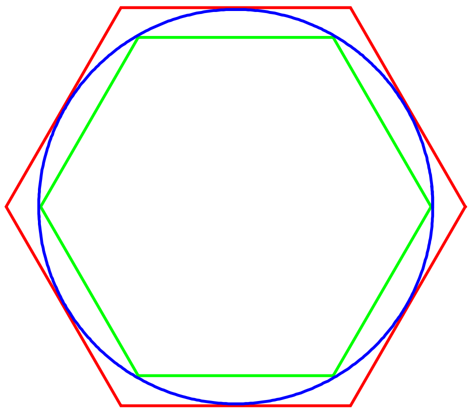
Archimedes' Approximation of Pi

Approximation des
Kreises durch reguläre Polygone nach Archimedes (–287 (?) — –212)

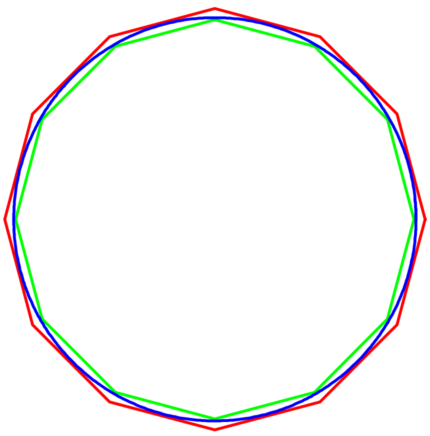
ARCHIMEDES approximierte einen Kreis von innen und außen erst durch ein 6-Eck, dann durch je ein 12-Eck, 24-, 48- und 96-Eck.

Der Umfang des einbeschriebenen 6-Ecks ist beim Einheitskreis (also dem Kreis mit Radius eins) 6. Damit ist 3 die erste Näherung von π (wie auch in der Bibel: 1. Könige, 7. 23).

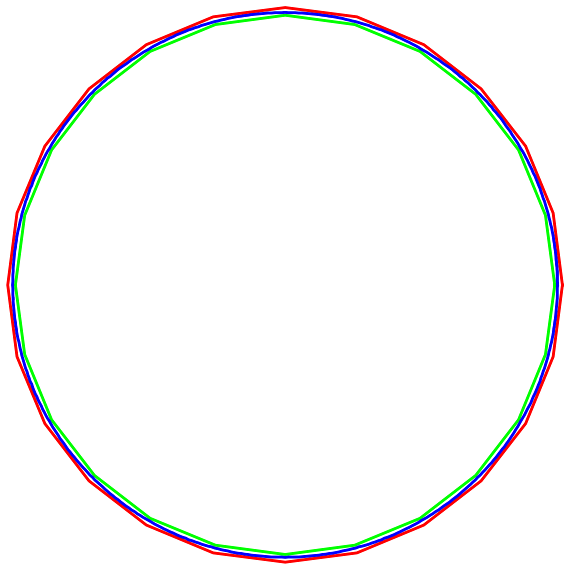
ARCHIMEDES verdoppelte bei jedem Schritt die Anzahl der Ecken der Polygone, bzw. halbierte die Mittelpunktswinkel. Wenn Sie eine Näherung kennen, können Sie verstehen, wie die nächste berechnet wird.



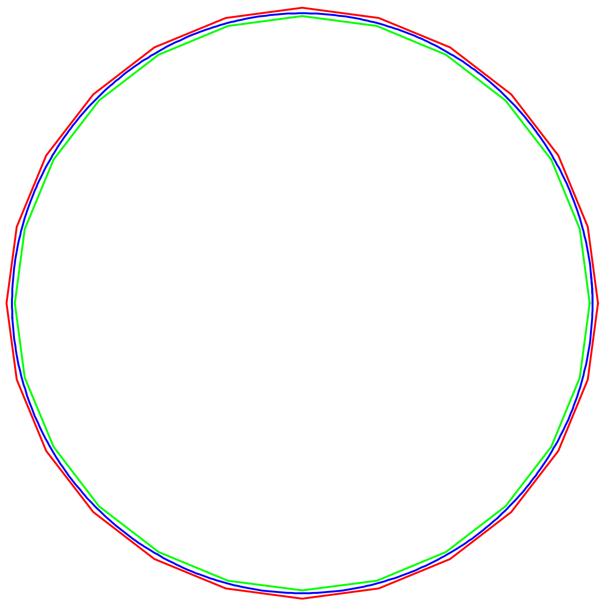
Sechseck



Zwölfeck



24-Eck



48-Eck

Sei also s_n eine schon berechnete Seitenlänge eines einbeschriebenen n-Ecks.

Mit PYTHAGORAS folgt (grünes bzw. graues Dreieck)

$\sigma_n = \sqrt{1 - (\frac{s_n}{2})^2}$

und damit (blaues bzw. schwarzes Dreieck)

$s_{2n}^2 = (\frac{s_n}{2})^2 + (1 - \sigma_n)^2 = (\frac{s_n}{2})^2 + \left(1 - \sqrt{1 - (\frac{s_n}{2})^2}\right)^2$

$= (\frac{s_n}{2})^2 + 1 - 2\sqrt{1 - (\frac{s_n}{2})^2} + \left(1 - (\frac{s_n}{2})^2\right)$

$= 2 - 2\sqrt{1 - (\frac{s_n}{2})^2}$

d.h.

(1) $\quad s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}\ .$

Sie rechnen mit der Formel $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ leicht nach, dass gilt

$$\sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}} = s_n\ .$$

Also ist auch

(2) $\quad s_{2n} = \dfrac{s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}\ ,$

eine Formel, die bei manchen nummerischen Rechnungen zweckmäßiger ist.
$E_n := n \cdot s_n$ ergibt eine Näherung für den Umfang des Kreises, also 2π.
Für den Umfang des $2n$-Ecks ergibt sich

(3) $\quad E_{2n} := 2n \cdot s_{2n} = 2n\sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} = \dfrac{2n\, s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}} = \dfrac{2E_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}\ .$

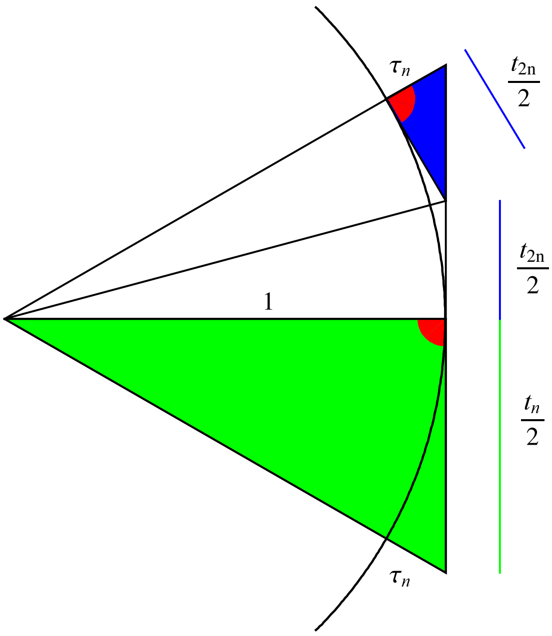
Nun ist $\sqrt{4 - s_n^2} < \sqrt{4} = 2$,
also $\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}} < \sqrt{2 + \sqrt{4}} = \sqrt{4} = 2$,
d.h.

(4) $\quad E_{2n} = \dfrac{2E_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}} > E_n\ ,$

was anschaulich ja auch einsichtig ist.

Ähnliche Überlegungen lassen die Berechnung der Umfänge der umbeschriebenen Polygone zu. Der Umfang des umbeschriebenen 6-Ecks ist $4 \cdot \sqrt{3}$. Rechnen Sie das bitte nach!

Es sei nun t_n eine schon berechnete Seitenlänge eines umbeschriebenen n-Ecks.



Wieder folgt bei einer Halbierung des Winkels mit PYTHAGORAS (grünes bzw. graues Dreieck)

$(1+\tau_n)^2 = 1 + (\frac{t_n}{2})^2$,

d.h.

$\tau_n = \sqrt{1+(\frac{t_n}{2})^2} - 1$,

und damit (blaues bzw. schwarzes Dreieck und weiße Dreiecke)

(5) $\quad (\frac{t_n}{2} - \frac{t_{2n}}{2})^2 = (\frac{t_{2n}}{2})^2 + \tau_n^2 = (\frac{t_{2n}}{2})^2 + \left(\sqrt{1+(\frac{t_n}{2})^2} - 1\right)^2$.

Für die folgende Zwischenrechnung seien $a := \frac{t_n}{2}$ und $x := \frac{t_{2n}}{2}$ gesetzt.

Damit ergibt sich für (5)

$(a-x)^2 = x^2 + \left(\sqrt{1+a^2} - 1\right)^2$,

und diese Gleichung ist nach x aufzulösen. Es folgt

$a^2 - 2ax + x^2 = x^2 + \left((1+a^2) - 2\sqrt{1+a^2} + 1\right)$, also $-2ax = 2 - 2\sqrt{1+a^2}$,

d.h. $2x = \dfrac{2\sqrt{1+(\frac{t_n}{2})^2} - 2}{\frac{t_n}{2}} = \dfrac{2\sqrt{4+t_n^2}}{t_n} - \dfrac{4}{t_n}$, also $t_{2n} = \dfrac{2\sqrt{4+t_n^2} - 4}{t_n}$,

was sich wie oben zu

(6) $\quad t_{2n} = \dfrac{2\,t_n}{2+\sqrt{4+t_n^2}}$

umrechnen läßt.

Der Umfang U_n des umschriebenen n-Ecks ist gleich $n\,t_n$, d.h.

$$U_{2n} = 2\ n\,t_{2n} = \frac{4\,n\,t_n}{2+\sqrt{4+t_n^2}} = \frac{4\,U_n}{2+\sqrt{4+t_n^2}} < \frac{4}{4}\,U_n\ ,$$

also

(7) $\qquad U_{2n} < U_n$.

Auch dieses ist anschaulich klar. Mit den Rekursionsformeln (1) und (6) ergibt sich die folgende Tabelle

n	$\frac{E_n}{2}$	$\frac{E_n}{2.}$	$\frac{U_n}{2.}$
6	3	3.	3.4641
12	$6\sqrt{2-\sqrt{3}}$	3.1058285423	3.2153903091
24	$12\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	3.1326286132	3.1596599421
48	$24\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$	3.139352030	3.1460862151
96	$48\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$	3.1410319508	3.1427145999

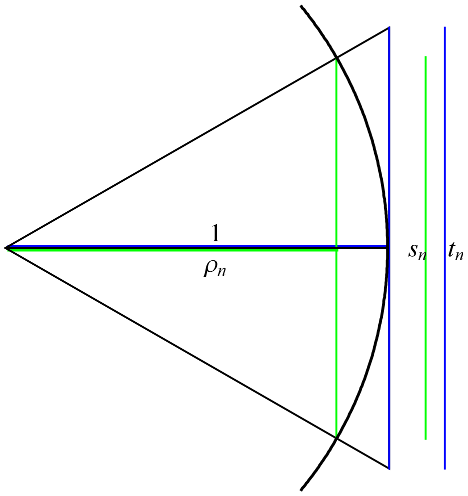
Mit *Mathematica* ergibt sich

$$\mathbf{N}\Big[\,\mathbf{48}\sqrt{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{3}}}}}}\ ,\ \mathbf{17}\Big]$$

```
3.1410319508905096
```

Im Folgenden sei $M := \{\ m \in \mathbb{N} \mid m = 6\cdot 2^k,\ k\ \in\ \mathbb{N}_0\,\}$ und $n \in M$.

Das Verhältnis von U_n zu E_n läßt sich mit Hilfe folgender Figur und des Strahlensatzes berechnen:



Wie oben folgt $\rho_n = \sqrt{1 - (\frac{s_n}{2})^2}$ und damit

(9) $t_n = \frac{2\, s_n}{\sqrt{4 - s_n^2}}$.

Dies ergibt mit $U_n = n \cdot t_n$ und $E_n = n \cdot s_n$

(10) $U_n = \frac{2\, E_n}{\sqrt{4 - s_n^2}}$ bzw. $E_n = \frac{U_n \sqrt{4 - s_n^2}}{2}$

und daraus folgt

(11) $E_n < U_n$.

Die letzte Ungleichung ist anschaulich wieder trivial, doch die Gleichungen (10) helfen, um die Differenz (locker) abzuschätzen:

$$(U_n - E_n)(U_n + E_n) = U_n^2 - E_n^2 = E_n^2\left(\frac{4}{4 - s_n^2} - 1\right) = E_n^2 \left(\frac{4 - (4 - s_n^2)}{4 - s_n^2}\right) = E_n^2 \frac{s_n^2}{4 - s_n^2} \leq \frac{E_n^2\, s_n^2}{3},$$

da $4 - s_n^2 \geq 3$, und damit folgt

$$(12) \quad U_n - E_n \leq \frac{E_n^2\, s_n^2}{3\,(U_n + E_n)} \leq \frac{E_n^2\, s_n^2}{3 \cdot 2\, E_n} \leq \frac{E_n\, s_n^2}{6} \leq \frac{U_n\, s_n^2}{6} \leq \frac{U_6\, s_n^2}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{6}\, s_n^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\, s_n^2 .$$

Weiterhin folgt aus den vorigen Bemerkungen $4\sqrt{3} = U_6 \geq U_n > E_n = n \cdot s_n$ und damit

$s_n < \frac{4\sqrt{3}}{n}$ bzw. $s_n^2 < \frac{48}{n^2}$;

also gilt

(13) $\quad U_n - E_n < \dfrac{96}{n^2\sqrt{3}} = \dfrac{32\sqrt{3}}{n^2} < \dfrac{64}{n^2}$.

Mit dieser Abschätzung werden wir uns später noch beschäftigen.

In dem Buch von Hischer/Scheid steht auf Seite 22 bzgl. der Rekursionsformeln zu E_n und U_n :

Rechnet man mit einem achtstelligen Taschenrechner, dann bleibt der Algorithmus nach dem 13. Schritt bei $n = 24576$ *"stehen" und liefert* $E_{24576} = 6{,}2831852$ *und* $U_{24576} = 6{,}2831854$, *so daß man stellengenau* $\pi = 3{,}1415927$ *erhält.*

Aufgabe: Rechnen Sie mit Ihrem Taschenrechner bis zum 13. Schritt E_n aus und zwar nach den beiden Formeln (1) und (2). Schreiben Sie alle von Ihnen berechneten Zwischenwerte in eine Tabelle.

Zum Schluß dieses Abschnittes die ersten 999 Nachkommastellen von π :

```
N[π, 1000]
```

```
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899\
 86280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502 8\
 41027019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337867831652 7\
 12019091456485669234603486104543266482133936072602491412737245870066063155881748 8\
 15209209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469519415116094330 5\
 72703657595919530921861173819326117931051185480744623799627495673518857527248912 2\
 79381830119491298336733624406566430860213949463952247371907021798609437027705392 1\
 71762931767523846748184676694051320005681271452635608277857713427577896091736371 7\
 87214684409012249534301465495853710507922796892589235420199561121290219608640344 1\
 81598136297747713099605187072113499999983729780499510597317328160963185950244594 5\
 53469083026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332083814206171 7\
 76691473035982534904287554687311595628638823537875937519577818577805321712268066 1\
 30019278766111959092164201 99
```

```
NumberForm[N[π, 1030], DigitBlock -> 3 , NumberSeparator -> " "]
```

```
3.141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974
  944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067 982 148 086 513
  282 306 647 093 844 609 550 582 231 725 359 408 128 481 117 450 284 102
  701 938 521 105 559 644 622 948 954 930 381 964 428 810 975 665 933 446
  128 475 648 233 786 783 165 271 201 909 145 648 566 923 460 348 610 454
  326 648 213 393 607 260 249 141 273 724 587 006 606 315 588 174 881 520
  920 962 829 254 091 715 364 367 892 590 360 011 330 530 548 820 466 521
  384 146 951 941 511 609 433 057 270 365 759 591 953 092 186 117 381 932
  611 793 105 118 548 074 462 379 962 749 567 351 885 752 724 891 227 938
  183 011 949 129 833 673 362 440 656 643 086 021 394 946 395 224 737 190
  702 179 860 943 702 770 539 217 176 293 176 752 384 674 818 467 669 405
  132 000 568 127 145 263 560 827 785 771 342 757 789 609 173 637 178 721
  468 440 901 224 953 430 146 549 585 371 050 792 279 689 258 923 542 019
  956 112 129 021 960 864 034 418 159 813 629 774 771 309 960 518 707 211
  349 999 998 372 978 049 951 059 731 732 816 096 318 595 024 459 455 346
  908 302 642 522 308 253 344 685 035 261 931 188 171 010 003 137 838 752
  886 587 533 208 381 420 617 177 669 147 303 598 253 490 428 755 468 731
  159 562 863 882 353 787 593 751 957 781 857 780 532 171 226 806 613 001
  927 876 611 195 909 216 420 198 938 095 257 201 065 485 863 278 865 936
```