■ 1.2 Folgen

Materialien zur Vorlesung **Elementare Analysis**, Wintersemester 2003 / 4

Bei der Berechnung von π betrachtete ARCHIMEDES regelmäßige n-Ecke mit 6, 12, 24, 48, 96 Ecken, also mit $6\cdot 2^0$, $6\cdot 2^1$, $6\cdot 2^2$, $6\cdot 2^3$, $6\cdot 2^4$ Ecken. Die Seitenlängen bei den Schneeflockenkurven waren a, $a/3$, $a/9$, ... , d.h. $a\cdot 3^{-0}$, $a\cdot 3^{-1}$, $a\cdot 3^{-2}$, $a\cdot 3^{-3}$, $a\cdot 3^{-4}$, ... In beiden Fällen lassen sich die Werte allgemein so darstellen: $c \cdot q^n$, wobei $c, q \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, der Menge der natürlichen Zahlen.

Wie sehen c und q in den beiden Beispielen jeweils aus? Die obigen Beobachtungen und viele ähnliche führen zu der grundlegenden

Definition 1.2.1:
FOLGE
Es sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann heißt a REELLE FOLGE. $a(n)$ heißt das n-te FOLGENGLIED. Dafür ist die kürzere Schreibweise a_n gebräuchlich. Statt $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ finden Sie in der Literatur u.a. folgende Schreibweisen:

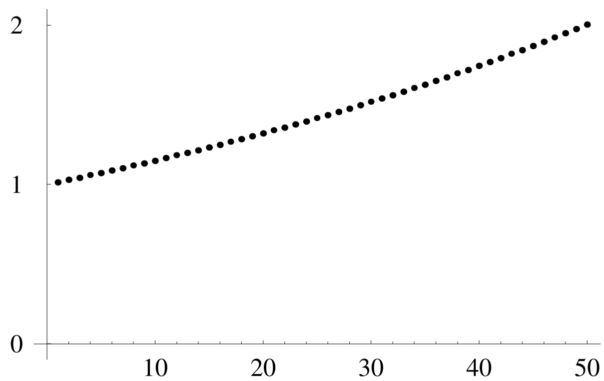
$\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, $\langle a_n \rangle$, (a_n) , $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$.

Manchmal wird auch von unendlichen Folgen gesprochen. Ebenso heißt es oft nur Folge statt reelle Folge.

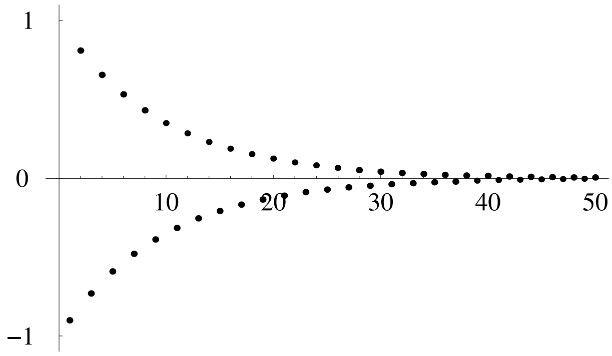
Definition 1.2.2:
GEOMETRISCHE FOLGE
Es seien $c, q \in \mathbb{R}$. Die Folge g mit $g_n := c \cdot q^n$ heißt GEOMETRISCHE FOLGE.

Ist $q = 0$, so ist die geometrische Folge $(c \cdot q^n)$ konstant: $(0, 0, 0, \ldots)$.
Ist $q = 1$, so ist die geometrische Folge $(c \cdot q^n)$ auch konstant: $(c, c, c, \ldots)$.
Ist $q = -1$ und $c \neq 0$, so alterniert die geometrische Folge: $(-c, +c, -c, +c, \ldots)$.
Das Verhalten für $c \neq 0$, und $|q| < 1$ bzw. $|q| > 1$ werden wir später genauer untersuchen.
Vorläufig sollen nur drei Grafiken einen ersten Eindruck von diesen Folgen vermitteln.

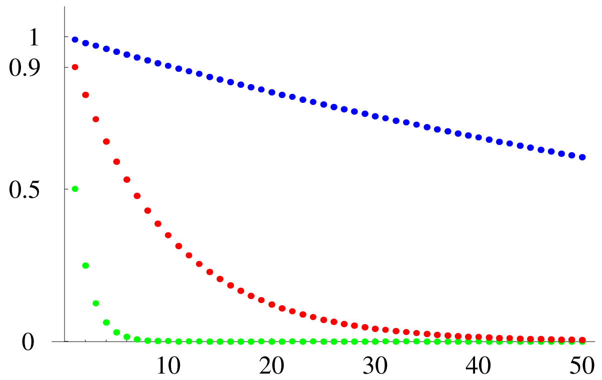
In den folgenden Beispielen ist $c = 1$.
Zuerst ist $q = 1.014$:



Jetzt ist $q = -0.9$:



Schließlich sind in einer Grafik die Anfangsstücke dreier geometrischer Folgen eingezeichnet. Die Werte für q sind: 0.99, 0.9, 0.5 .



Eine andere, nicht sehr anschauliche Darstellungsart bieten Tabellen, etwa für $c = 1$ und $q = 0.5$:

n	1	2	3	4	5	6
q^n	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.03125	0.015625

In Tests finden sich häufig Fragen folgender Art: Finden Sie das nächste Glied der "Folge"

1, 1, 2, 3, 5 ?

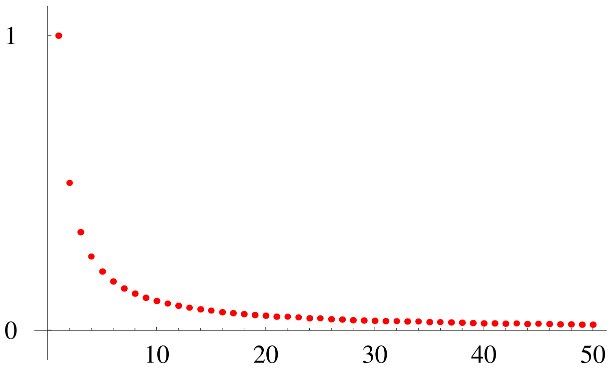
Eine derartige Fragestellung ist zumindest mißverständlich! Gemeint ist nämlich: Können Sie ein Bildungsgesetz der "Folge" erkennen, und wenn ja, bestimmen Sie dazu das nächste Glied der "Folge".
Bei der eben angegebenen "Folge" (also den fünf Zahlen) lassen sich aber mindestens zwei völlig unterschiedliche Bildungsgesetze angeben:
1. Die "Folge" beginnt mit zwei Einsen und dann folgen die Primzahlen. Danach wäre das nächste "Folgenglied" 7 .
2. Die "Folge" beginnt mit zwei Einsen und jedes folgende Glied ist die Summe der beiden vorhergehenden. Also ist das nächste "Folgenglied" 8 .

Also: Vorsicht bei derartigen Aufgaben !!!

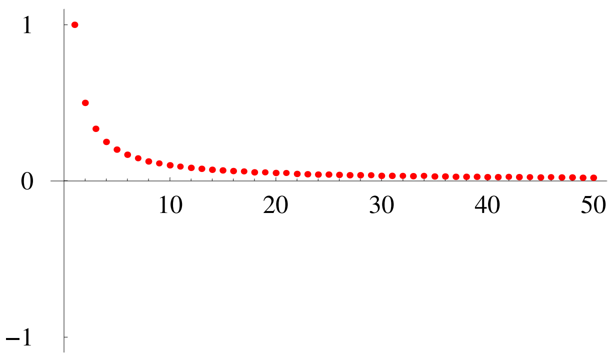
Folgen sind **unendliche** Mengen! Meistens können nur **endlich viele** Elemente einer unendlichen Menge dargestellt werden. Trotzdem soll es versucht werden.

Beispiele für Folgen:

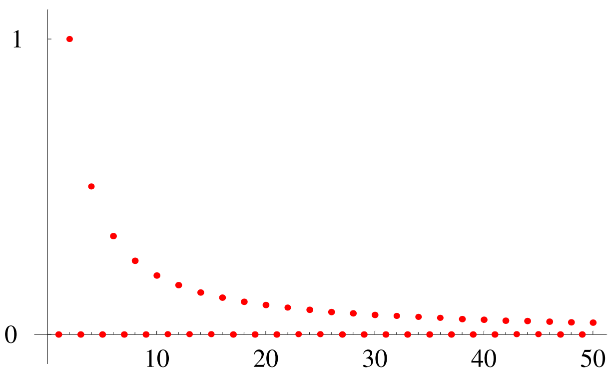
$$(a_n) := \left(\frac{1}{n}\right)$$



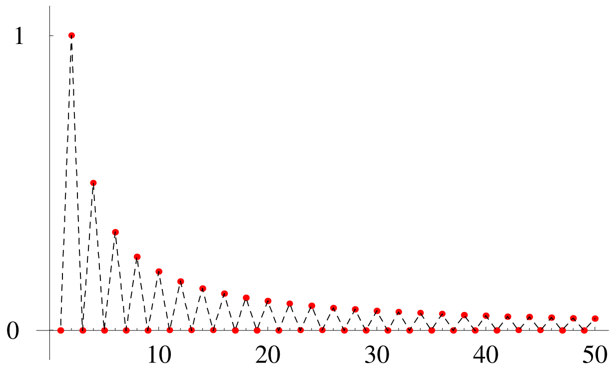
$(a_n) := \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$



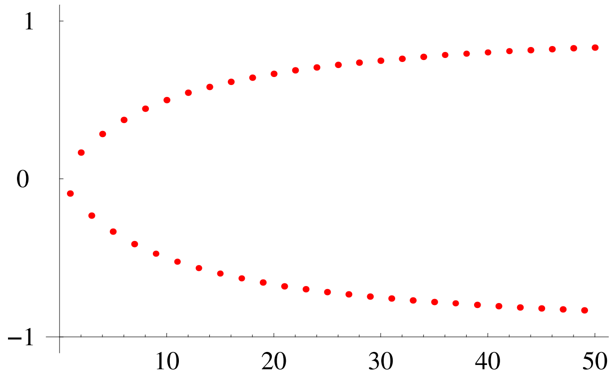
$(a_n) := \left(\frac{1+(-1)^n}{n}\right)$



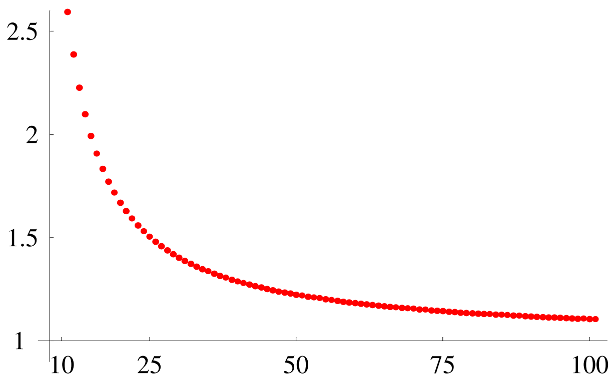
Bei dieser Folge ist eine zweite Darstellungsart sinnvoll: Die Funktionswerte werden durch Strecken verbunden. Zu beachten ist: Nur die Punkte bilden eine Teilmenge des Graphen der Folge, nicht die Strecken, denn etwa für 1.5 ist $a(1.5)$ ja gar nicht definiert.



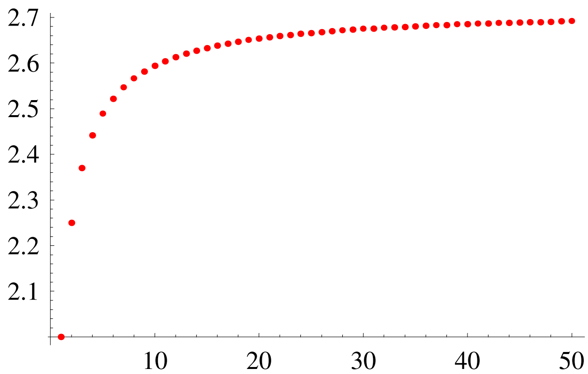
$(a_n) := ((-1)^n \frac{n}{n+10})$



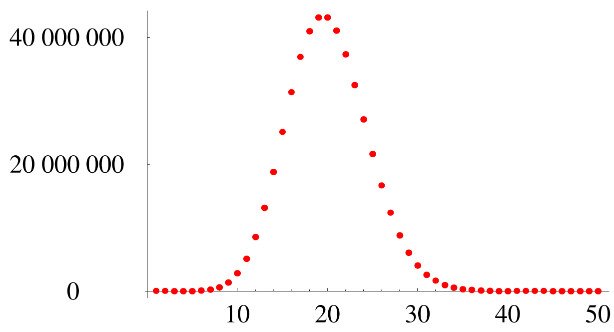
$(a_n) := \left((1 + \frac{1}{n})^{10} \right)$



$(a_n) := \left((1 + \frac{1}{n})^{n} \right)$

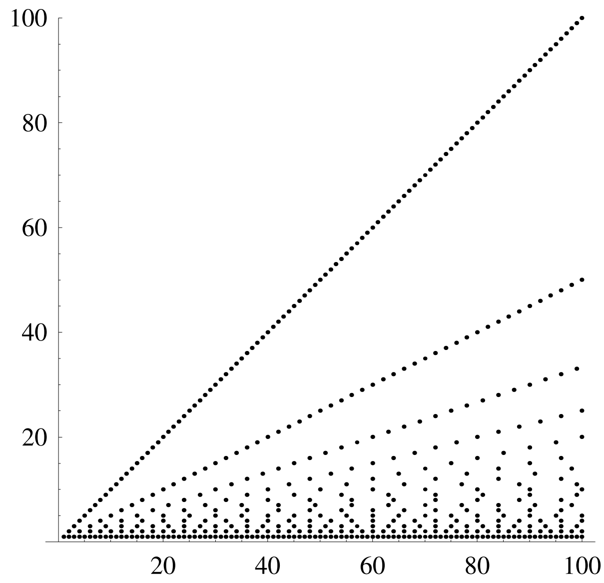


$(a_n) := (\frac{20^n}{n!})$



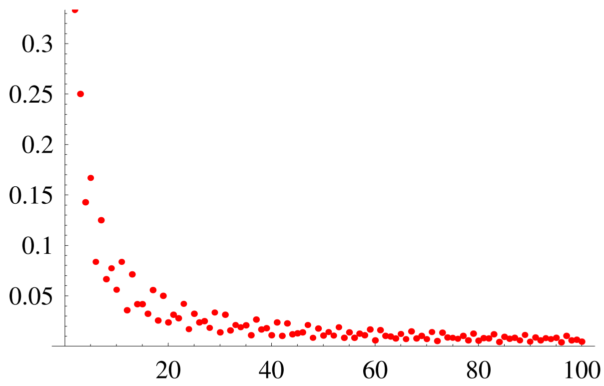
Die dargestellten Folgen sehen alle recht regelmäßig aus, oft – in gewisserweise – glatt, bzw. monoton. Das muss aber nicht so sein. Dazu erinnern Sie sich an die Definition des Teilers einer natürlichen Zahl. In der folgenden Tabelle sind in der zweiten Spalte die Teiler der Zahlen von 1 bis 12 eingetragen, in der zweiten die Anzahl der Teiler, dann die Summe der Teiler und schließlich der reziproke Wert der Summe der Teiler.

Eine Grafik der Teiler der ersten hundert Zahlen sieht so aus:

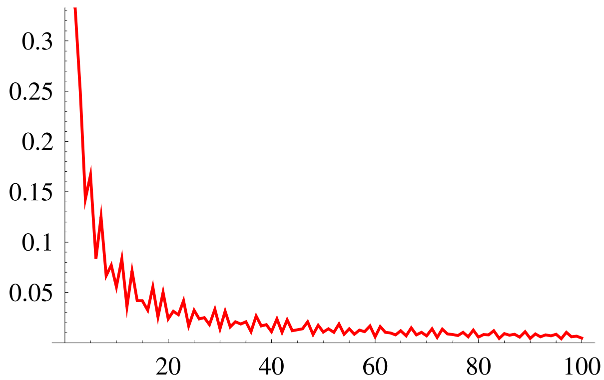


Hier wird keine Folge dargestellt: Denn etwa zur Abzisse 20 sind die Ordinatenwerte 1, 2, 4, 5, 10, 20 markiert.

Mit $r_n := \dfrac{1}{\text{Summe der Teiler von } n}$ für $n \in \mathbb{N}$ ergeben sich die beiden folgenden Grafiken:



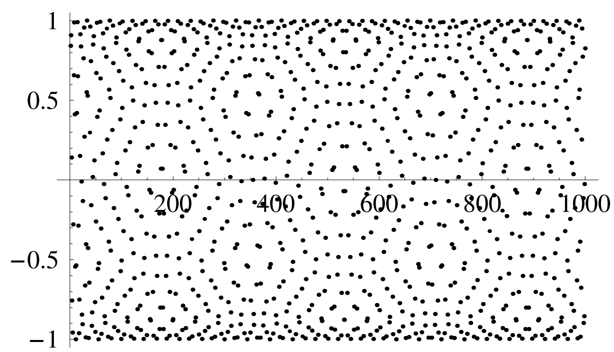
nn



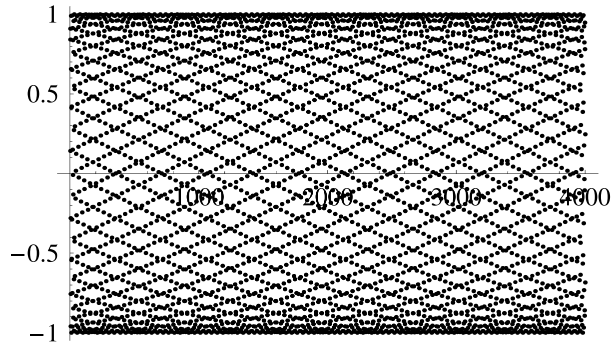
Beachten Sie: r_1 ist jeweils nicht eingetragen um den Maßstab der Ordinatenachse nicht zu stark zu stauchen.

Schließlich noch eine scheinbar unübersichtliche Folge:

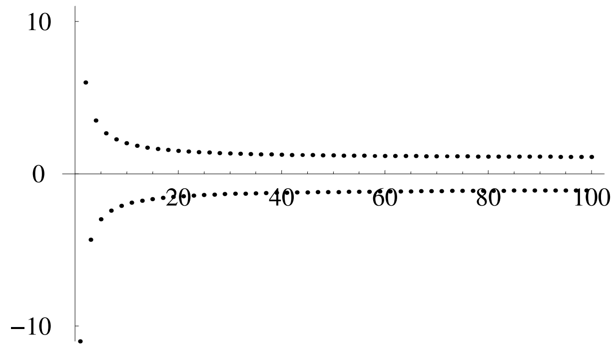
$$(a_n) := (\sin(n))$$

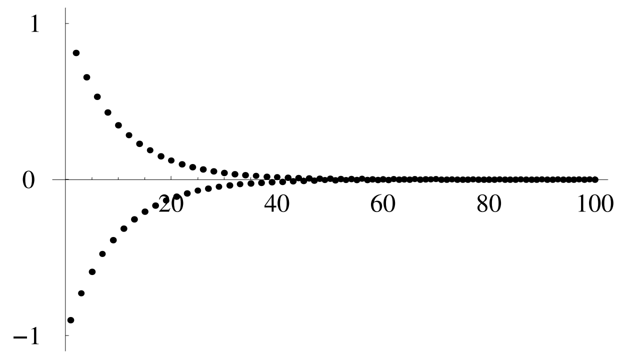


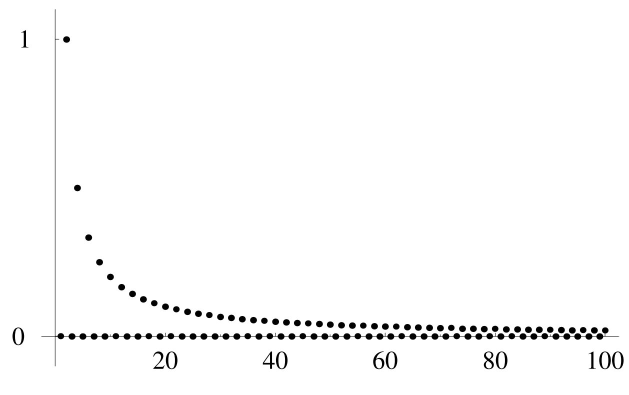
Betrachten Sie diese Grafik einmal, indem Sie rechts von der Seite ganz flach über das Papier sehen!
Ein etwas "längeres" Anfangsstück dieser Folge sieht dann so aus:



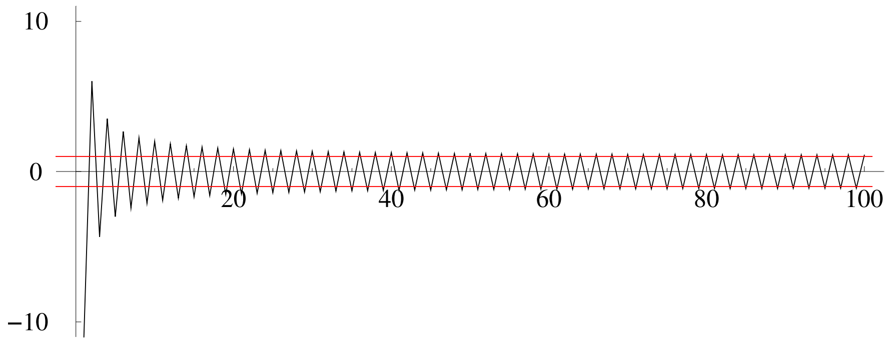
Folgen, die im Sinne von Funktionen nur endlich viele Werte annehmen, sind relativ uninteressant. Doch Folgen mit unendlich vielen Werten sind prinzipiell **nicht** grafisch darstellbar und entziehen sich dadurch unserer Anschauung. Was passiert denn, wenn n immer größer wird bzw. – wie es oft heißt – n gegen Unendlich strebt?

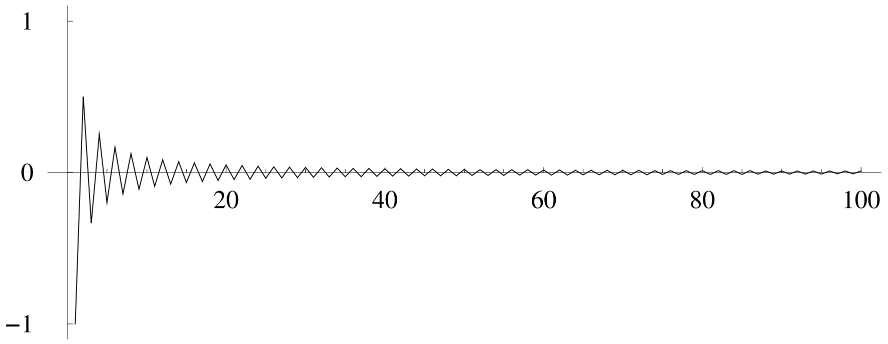


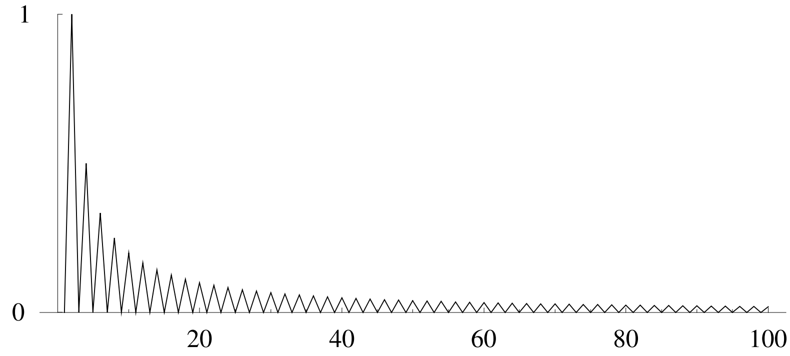




Können Sie den nächsten Grafiken augenblicklich ein unterschiedliches Verhalten der Folgen entnehmen?

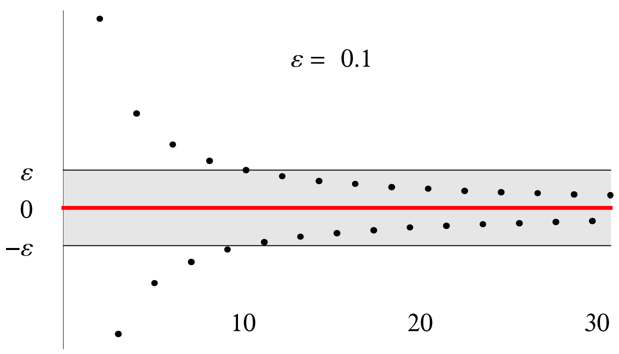


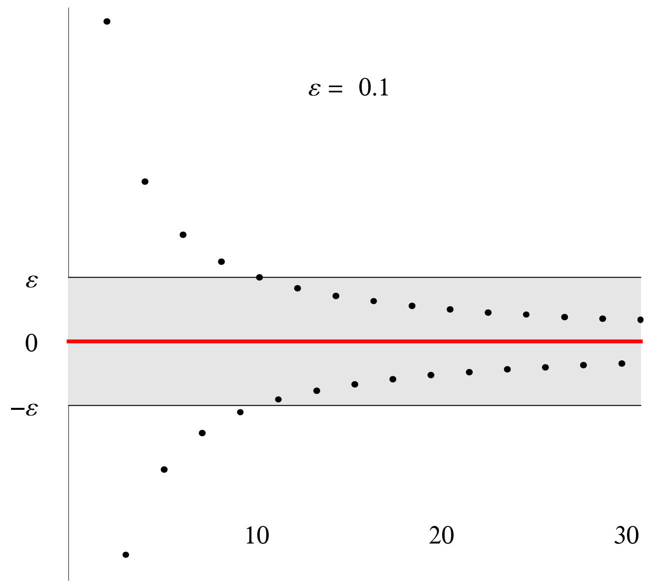


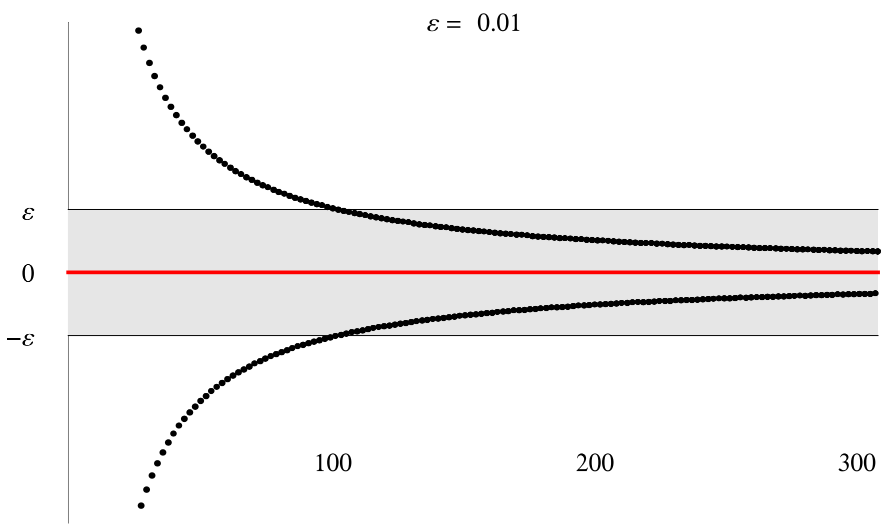


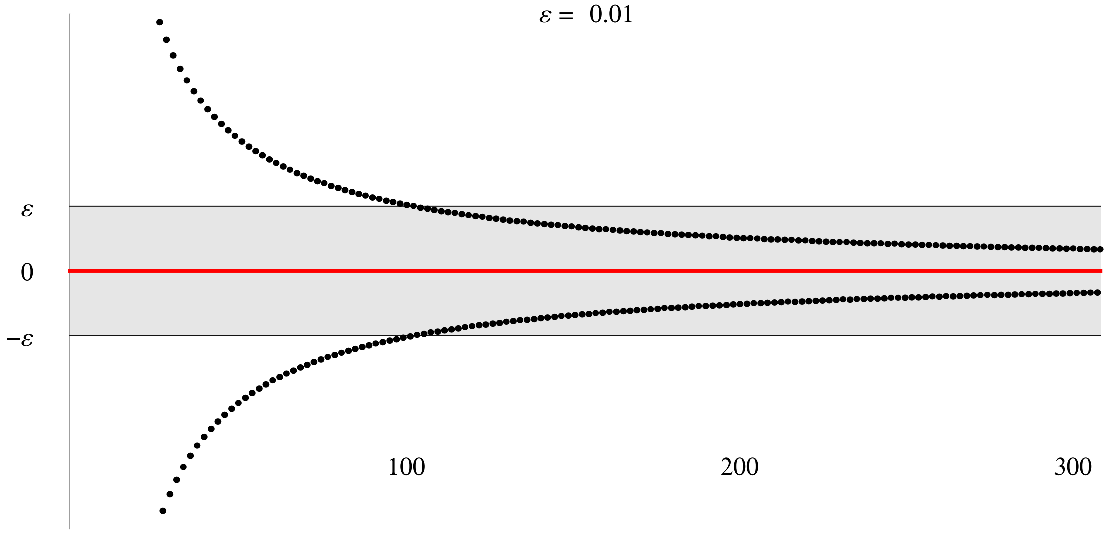
Hoffentlich haben Sie eine erste Intuition von Konvergenz und Nichtkonvergenz, also Divergenz, gewonnen!

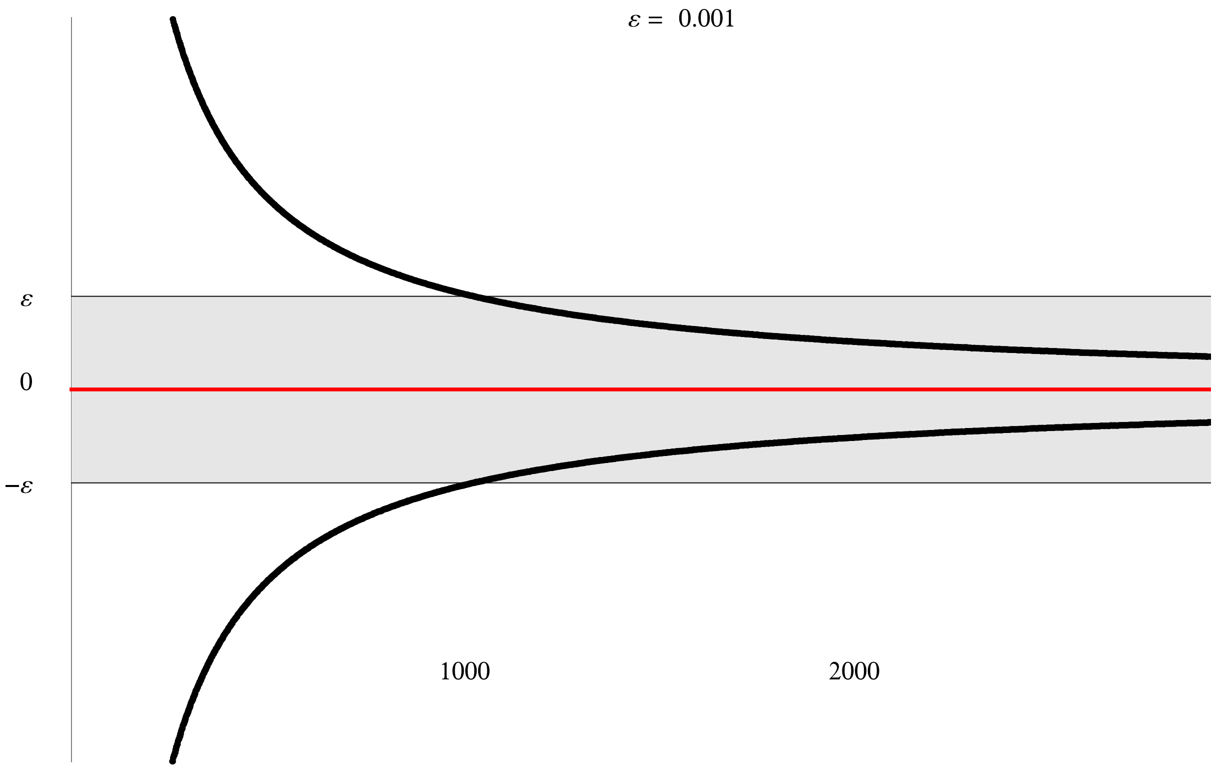
Die nächsten Grafiken sollen auf die Definition von Konvergenz hinführen. Betrachtet werden Anfangsstücke der Folge $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$. Zu den Werten $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$ ist um Null jeweils ein hellgrauer Streifen von $-\varepsilon$ bis ε gelegt. Es sieht so aus, als ob die Folgenglieder schließlich alle in diesem "ε-Streifen drinliegen" bzw. die Folgenglieder dem Wert Null "recht nahe kommen".

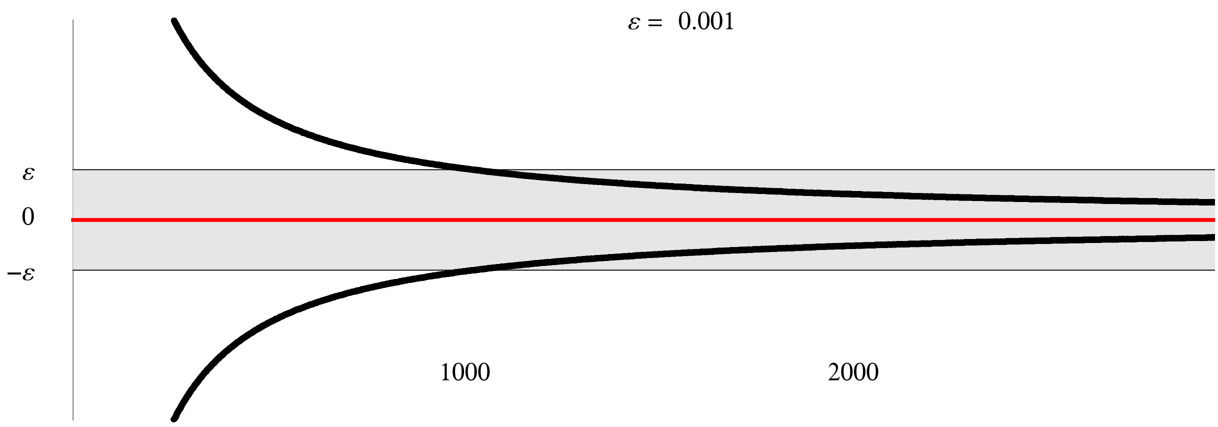



ε = 0.1
ε
0
−ε
10
20
30


ε = 0.01
ε
0
−ε
100
200
300


ε = 0.01
ε
0
−ε
100
200
300





Beachten Sie, dass in diesen Grafiken jeweils unterschiedlich viele Anfangsglieder der Folge nicht mit eingezeichnet sind. Andernfalls wäre der ε–Streifen überhaupt nicht mehr erkennbar! Auch die Maßstäbe sind unterschiedlich!
Es hat bis in die Mitte des vorvorigen Jahrhunderts gedauert, bis diese anschauliche Vorstellung eine im heutigen Sinne präzise mathematische Formulierung gefunden hat, nämlich den Begriff der Konvergenz bzw. des Grenzwerts einer Folge. Und wenn das so lange gedauert hat, dann mag es durchaus etwas länger dauern, bis Sie meinen, es verstanden zu haben. Dazu werden ja auch noch Beispiele und Übungen folgen.

Definition 1.2.3:
GRENZWERT EINER FOLGE
Es seien $a \in \mathbb{R}$ und (a_n) eine Folge. a heißt GRENZWERT DER FOLGE (a_n), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt.
Mit Quantoren geschrieben sieht diese Definition so aus:
a heißt Grenzwert der Folge (a_n), wenn

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n > n_0} |a_n - a| < \varepsilon \ .$$

Definition 1.2.4:
KONVERGENTE FOLGE, DIVERGENTE FOLGE
Eine Folge (a_n) heißt KONVERGENT, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass a Grenzwert der Folge (a_n) ist. Eine Folge (a_n) heißt DIVERGENT, wenn sie nicht konvergent ist.

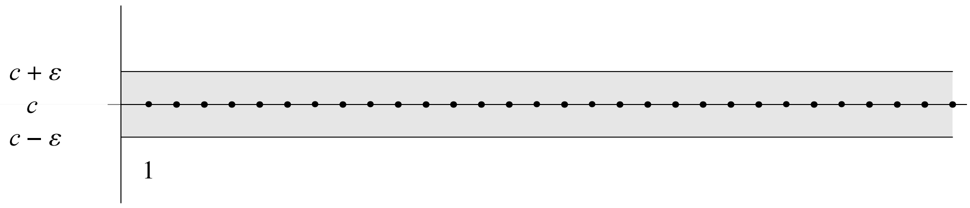
Die Beweise für die Konvergenz einer Folge können ganz einfach sein, sie können aber auch beliebig kompliziert sein. Fangen wir mit dem einfachsten Fall an.

Satz 1.2.1
Für $c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $c_n := c$. Dann ist c Grenzwert von (c_n).

Beweis:
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $n_0 = 1$ gewählt. Dann gilt für alle $n \geq n_0 = 1$

$$|c_n - c| = 0 < \varepsilon \ .$$

■



Als nächstes soll die Konvergenz der Folge $(\frac{1}{n})$ untersucht werden. Dazu ist das Archimedische Axiom nötig. Es ist anschaulich ganz einfach!

Zur Erinnerung das

Archimedisches Axiom
Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$.

Wenn $a \leq 0$, leistet 1 das Gewünschte. Ist $a > 0$, so stellen Sie sich etwa vor, Sie hätten eine Dezimalbruchentwicklung von a. Dann nehmen Sie den Anteil vor dem Komma und addieren 2 dazu. So erhalten Sie eine natürliche Zahl, die größer als a ist. Warum reicht es nicht aus nur 1 zu addieren?
Eine andere Vorstellung benutzt den Zahlenstrahl, der jeweils bei den natürlichen Zahlen markiert ist. Irgendwo "zwischen" zwei ganzen Zahlen liegt a, falls $a > 0$.

Satz 1.2.2

Der Grenzwert der Folge $(\frac{1}{n})$ ist Null.

Beweis:

Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach dem Archimedischen Axiom ein n_0 mit $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$. Also ist $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Sei nun $n \geq n_0$. Dann folgt

$$| \frac{1}{n} - 0 | = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon .$$

■

Es ist etwas umständlich, immer zu schreiben bzw. zu sagen: Der Grenzwert der Folge (a_n) ist a . Gebräuchlich ist die

Schreibweise:

LIMES

Es sei $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert der Folge (a_n) . Dafür sind folgende Schreibweisen üblich

$$\lim (a_n) = a \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = a \ .$$

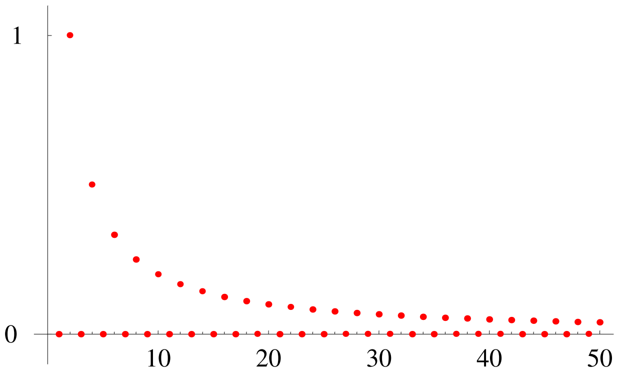
Gelesen: Der LIMES der Folge (a_n) ist a ; bzw. : Der LIMES von (a_n) für n gegen Unendlich ist a .

Leider wird häufig die folgende missverständliche und deshalb schlechte Sprechweise benutzt: Die Folge (a_n) strebt für n gegen Unendlich gegen a . Da strebt aber im Allgemeinen Nichts! Ich benutze deshalb auch nicht die kurze Schreibweise $a_n \longrightarrow a$ an Stelle von $\lim_{n \to \infty} a_n = a$.

Auch die Formulierung "es nähert sich beliebig" ist mißverständlich, wie etwa die Folge

$$(\frac{1+(-1)^n}{n}) = (0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, ...)$$

zeigt. Der Grenzwert dieser Folge ist Null:



Beweis:

Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Archimedes ein n_0 mit $\frac{2}{\varepsilon} < n_0$. Es sei nun $n \geq n_0$.

$$| \frac{1+(-1)^n}{n} - 0 | = \frac{1}{n} | 1 + (-1)^n | \leq \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon .$$

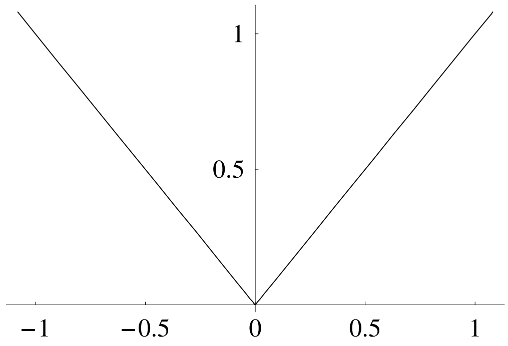
■

Eben wurde $|1+(-1)^n| \le 2$ abgeschätzt, was Sie sich noch leicht überlegen können. Hoffentlich wissen Sie auch noch, daß für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|a+b| \le |a| + |b| .$$

Diese Ungleichung wird Dreiecksungleichung genannt. Der Vollständigkeit halber wird sie nochmals bewiesen. Doch vorher wird noch kurz an die Betragsfunktion erinnert. Ihr Graph läßt sich so veranschaulichen:

Betragsfunktion: $f(x) := |x|$



Satz 1.2.3

Dreiecksungleichung

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

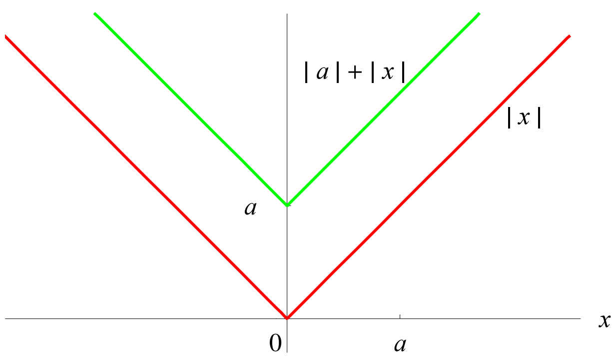
(*i*) $|a+b| \le |a| + |b|$,

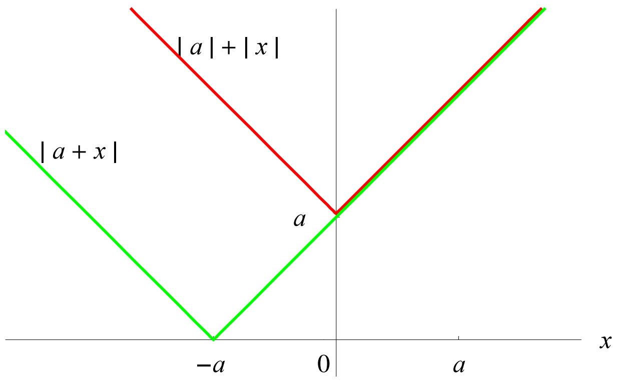
(*ii*) $|a-b| \le |a| + |b|$,

(*iii*) $|a| - |b| \le \big|\, |a| - |b| \,\big| \le |a-b| \le |a| + |b|$.

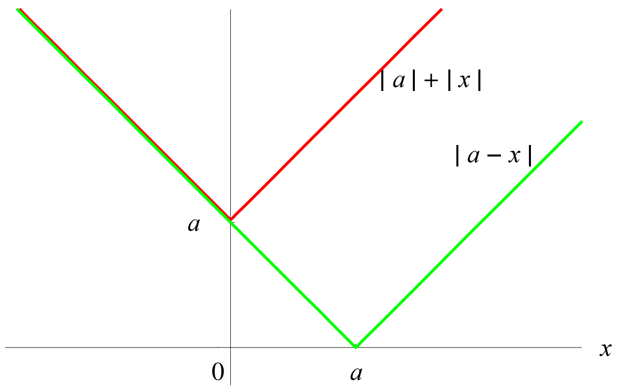
Für ein positives a werden mit den folgenden Grafiken diese Ungleichungen veranschaulicht. Danach folgt zusätzlich der allgemeine Beweis.

Zu (*i*):

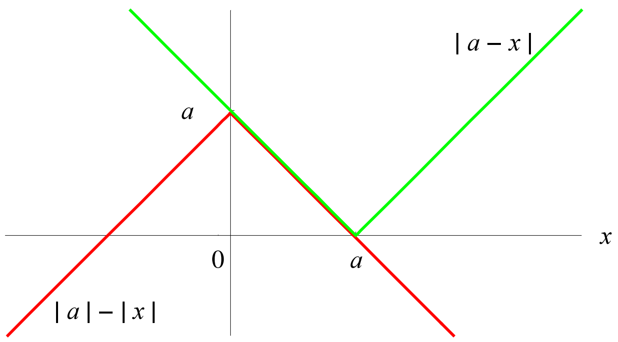


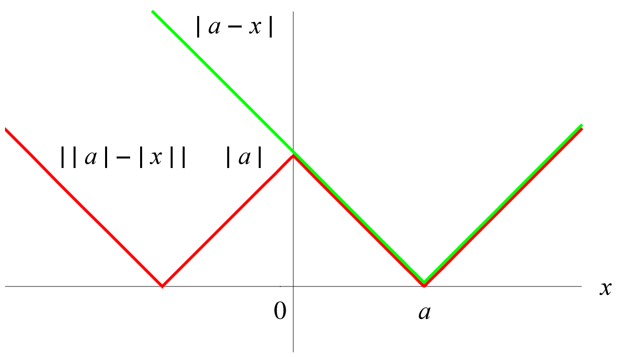


Zu (*ii*):



Zu (*iii*):





Beweis:

Zu (*i*): Es gilt $-a \leq |a|$, $a \leq |a|$, und analog $-b \leq |b|$, $b \leq |b|$.

Durch Addition dieser Ungleichungen folgt

$$-(a+b) \le |a| + |b|, \quad a+b \le |a| + |b| .$$

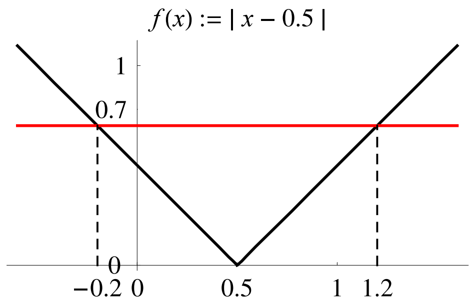
Falls $|a+b| = -(a+b)$, so ist (i) mit dem ersten Teil bewiesen.
Falls $|a+b| = a+b$, so ist (i) mit dem zweiten Teil bewiesen.

Zu (ii): Setze $\alpha := a,\ \beta := -b$.
Nach (i) gilt $|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|$,
also $|a-b| = |\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta| = |a| + |b|$.

Zu (iii): Mit (i) folgt
$|a| = |(a-b)+b| \le |a-b| + |b|$,
$|b| = |(b-a)+a| \le |a-b| + |a|$,
also $|a| - |b| \le |a-b|$ und $|b| - |a| \le |a-b|$.
Das ergibt $\big||a| - |b|\big| \le |a-b|$.

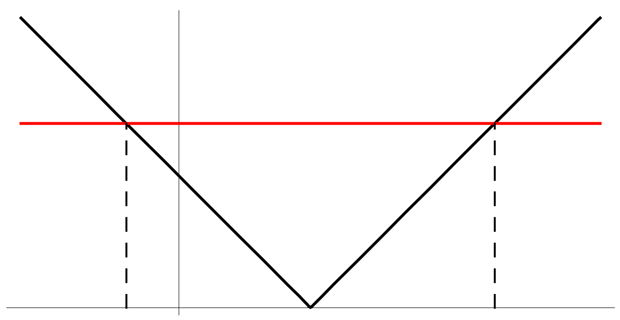
■

Es werden häufig Ausdrücke der Gestalt $|x-a| < \varepsilon$ vorkommen. Zum Verständnis die beiden folgenden Grafiken:
Zuerst als Beispiel $|x-0.5| < 0.7$:



Für $x \in [-0.2, 1.2]$ gilt $|x-0.5| \le 0.7$.

Beschriften Sie die folgende Grafik für $|x-a| < \varepsilon$.



Jetzt haben wir die Voraussetzungen um einige einfache, aber wichtige Sätze zu beweisen!

<u>Satz 1.2.4</u>
Eindeutigkeit des Grenzwertes
Eine Folge (a_n) hat höchstens einen Grenzwert a .

Beweis:

Der Beweis wird indirekt geführt. Es werde angenommen, dass die Folge zwei Grenzwerte, etwa a und α, besitze, wobei o.B.d.A. $\alpha > a$ sei.

Es sei $\varepsilon := \dfrac{\alpha - a}{2}$ (>0). Dann gibt es ein $n_{0a} \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_{0a}$ gilt
$|a_n - a| < \varepsilon$.

Analog gibt es ein $n_{0\alpha} \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_{0\alpha}$ gilt $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Es sei nun $n_0 := \max(n_{0a}, n_{0\alpha})$. Dann gilt erst recht für alle $n \geq n_0$ auch $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Nun gilt

$$\begin{aligned} \alpha - a &= |\alpha - a| = |\alpha - a_n + a_n - a| = |(a_n - a) - (a_n - \alpha)| \\ &\leq |a_n - a| + |a_n - \alpha| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \alpha - a, \end{aligned}$$

d.h. $\alpha - a < \alpha - a$, was ein klassischer Widerspruch ist.

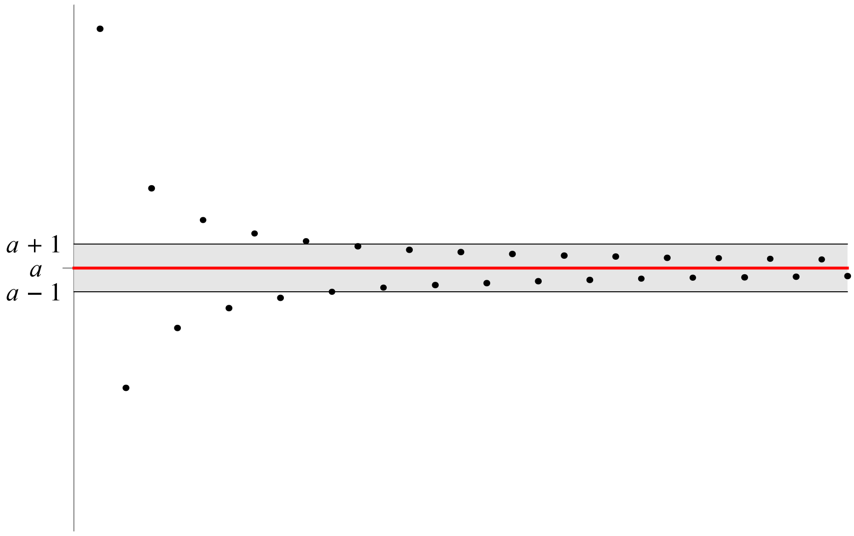
Also kann eine Folge höchstens einen Grenzwert besitzen.

■

Beachten Sie: Mit diesem Satz ist **aber überhaupt nicht** gezeigt, dass eine Folge einen Grenzwert besitzt. Nehmen Sie z.B. $((-1)^n)$!

<u>Satz 1.2.5</u>

Eine konvergente Folge ist beschränkt.



Beweis:

Es seien $a \in \mathbb{R}$ und (a_n) eine Folge mit $\lim(a_n) = a$. Es sei $\varepsilon := 1$. Dann gibt es ein n_0, so dass für alle $n > n_0$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon = 1$. Mit der Dreiecksungleichung folgt daraus

$$|a_n| - |a| \leq |a_n - a| < 1, \text{ also } |a_n| < |a| + 1 .$$

Es sei nun

$$M := \max\{\ |a_1|,\ |a_2|,\ \dots,\ |a_{n_0}|,\ |a| + 1\ \} .$$

Dann gilt für alle a_m, dass $|a_m| < M$, d.h. $(|a_n|)$ ist beschränkt und damit auch (a_n).

■

Bevor einige weitere Folgen auf Konvergenz untersucht werden sollen, noch der

<u>Satz 1.2.6</u>

BERNOULLIsche Ungleichung

(Jacob Bernoulli, 1654 - 1705, Schweizer Mathematiker)

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $x > -1$. Dann gilt

(i) $\quad (1 + x)^n \geq 1 + n x$.

Ist noch $n > 1$ und $x > 0$, so gilt

(ii) $\quad (1 + x)^n > 1 + n x$.

Beweis durch vollständige Induktion:

Für $n = 0$ ist (i) richtig. Es sei nun $x \neq 0$.

I: Induktionsanfang:

Für $n = 0$ gilt $(1 + x)^0 = 1 \geq 1 + 0 x$;
für $n = 1$ gilt $(1 + x)^1 = 1 + 1 x$; ,
und für $n = 2$ gilt $(1 + x)^2 = 1 + 2 x + x^2 > 1 + 2 x$.

II: Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung:

Für ein $n \geq 1$ gelte $(1 + x)^n \geq 1 + n x$.

Induktionsbehauptung:

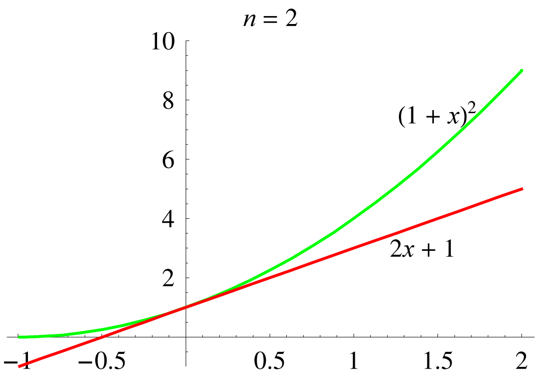
Dann gilt $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1) x$.

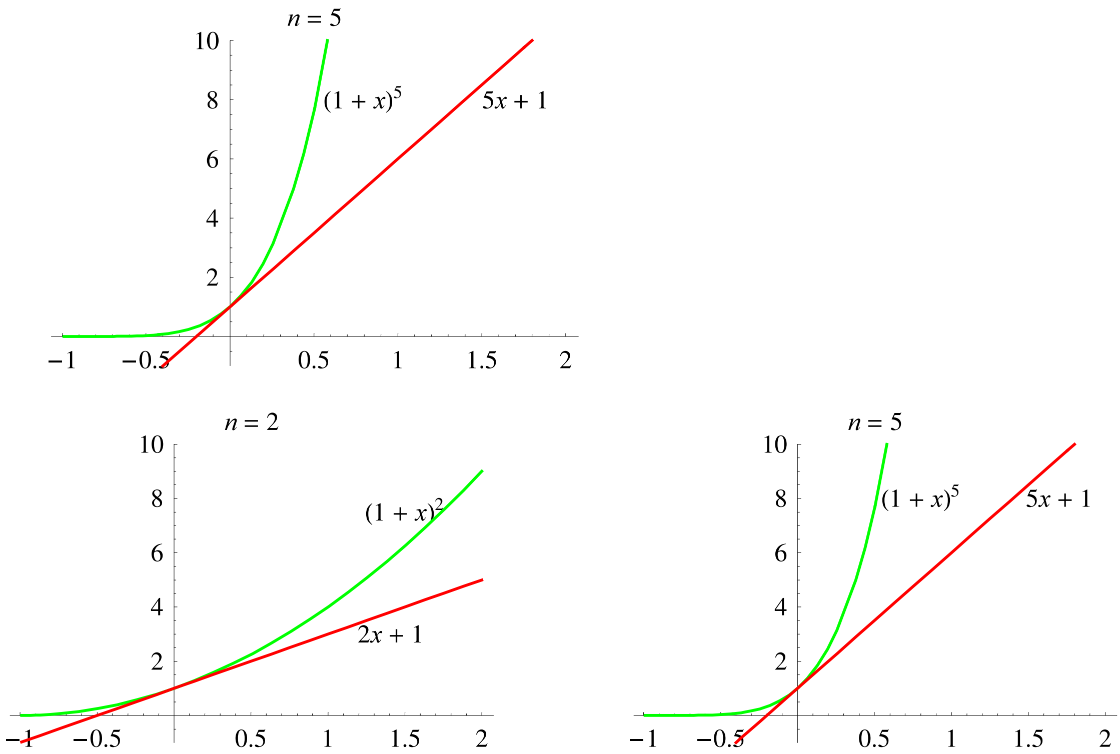
Beweis dafür:

$$
\begin{aligned}
(1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n (1 + x) \geq (1 + n x)(1 + x) \\
&= 1 + x + n x + n x^2 > 1 + (n + 1) x ,
\end{aligned}
$$

was zu beweisen war.

Zwei Grafiken zur Bernoullischen Ungleichung:





■

Mit der Bernoullischen Ungleichung beweisen wir jetzt

Satz 1.2.7

Es sei $|q| < 1$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Beweis:

Für $q = 0$ ist die Behauptung wieder trivial. Es sei also $q \neq 0$. Dann ist $0 < |q| < 1$ und damit $1 < \frac{1}{|q|}$.

Es sei $h := \frac{1}{|q|} - 1$; also ist $h > 0$ und $\frac{1}{|q|} = 1 + h$.

Es sei nun $\varepsilon > 0$ gewählt. Nach Archimedes gibt es ein $n_0 > \frac{1}{\varepsilon \cdot h}$. Es sei $n > n_0$.

Nun folgt $\left| \frac{1}{q} \right|^n = (1 + h)^n \geq 1 + n\,h > n\,h \geq n_0\,h > \frac{1}{\varepsilon}$. Daraus folgt $|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$ für $n \geq n_0$.

■

Auf den Seiten 1.2 1 bzw 2 finden Sie Beispiele für geometrische Folgen mit $q = 1.014, 0.99, 0.9, 0.5, -0.9$.

Der Beweis von Satz 1.2.7 möge Ihnen etwas "böhmisch" (oder "spanisch", wie Sie wollen) vor kommen. "Wie kommt man denn da drauf ?" ist die naheliegende Frage.

Nun ja; mir wurde dazu im ersten Semester gesagt: "Das ist die Intuition im stillen Kämmerlein"; also so zu sagen die Vorstufe des Elfenbeinturmes! Aber so ist es nicht. Selbstverständlich stecken hinter solchen Beweisen Jahrhunderte von Erfahrungen; doch Tausende von Studierenden haben es dann schließlich gelernt, und warum sollte es bei Ihnen nicht auch klappen. Ich werde mich zumindest bemühen. Deshalb weiter einige einfache Beispiele.

Satz 1.2.8

Es sei $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

Beweis:

Zu $\varepsilon > 0$ muss ein n_0 gefunden werden, so daß für $n > n_0$ gilt
$\left| \frac{1}{n^p} - 0 \right| = \frac{1}{n^p} < \varepsilon$.
Die letzte Ungleichung ist äquivalent zu $\frac{1}{\varepsilon} < n^p$, und es gilt sicherlich $n < n^p$.
Also, wenn $\frac{1}{\varepsilon} < n_0 \le n$ ist, könnte ein Beweis klappen:
Es sei also nun $\varepsilon > 0$ und $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n \ge n_0$ folgt $\left| \frac{1}{n^p} - 0 \right| = \frac{1}{n^p} \le \frac{1}{n_0^p} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

■

Satz 1.2.9

Rechenregeln für Grenzwerte

Es seien $a \in \mathbb{R}$ und es gelte $\lim(a_n) = a$ bzw. $\lim(b_n) = b$. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann gilt

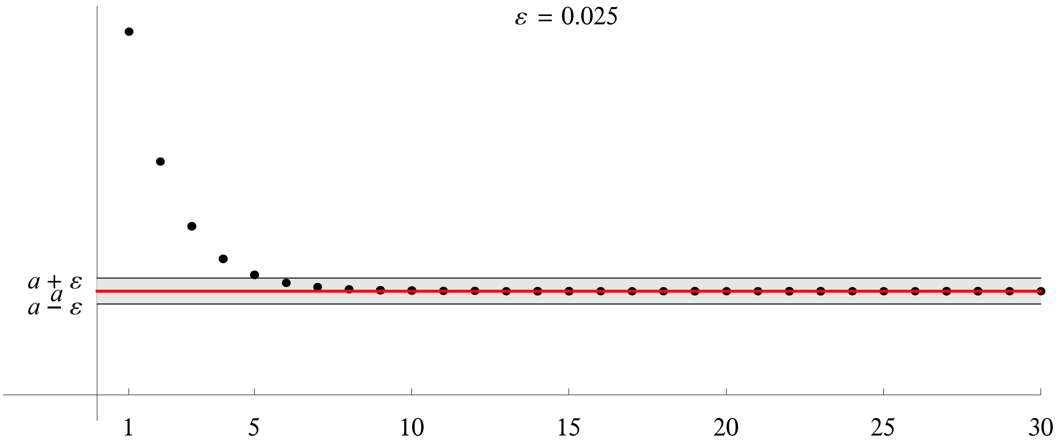
(i) $\lim(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim(a_n) = \lambda \cdot a$,

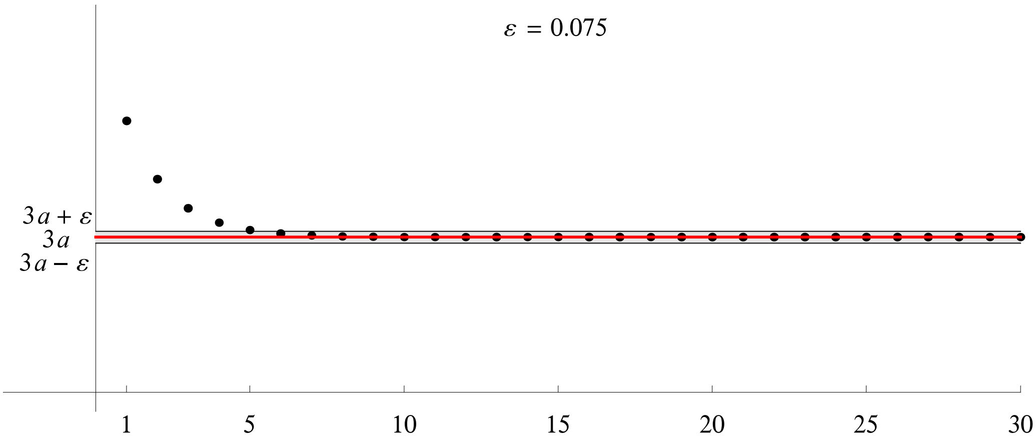
(ii) $\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n) = a + b$,

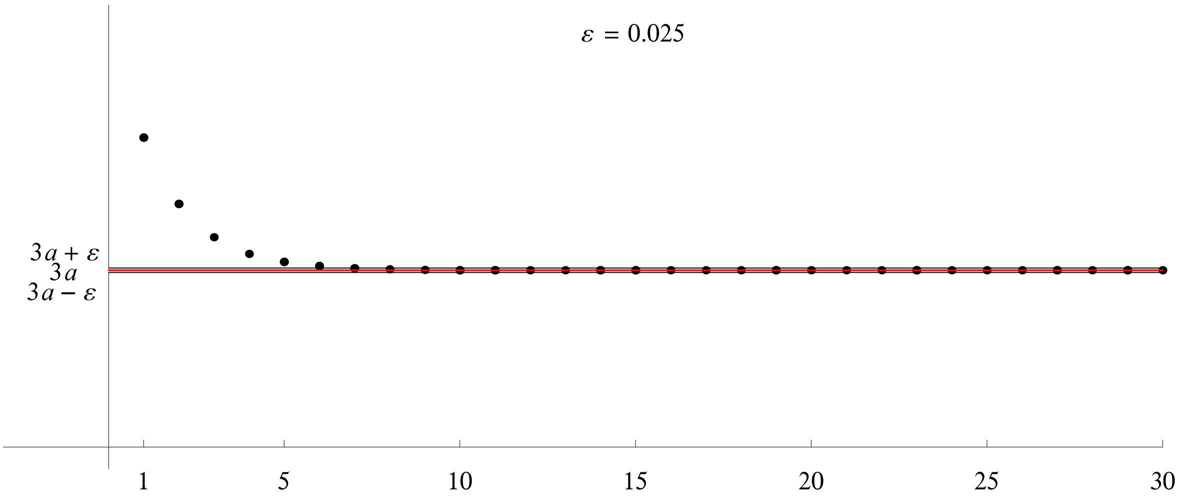
(iii) $\lim(a_n \cdot b_n) = \left(\lim(a_n) \right) \cdot \left(\lim(b_n) \right) = a \cdot b$,

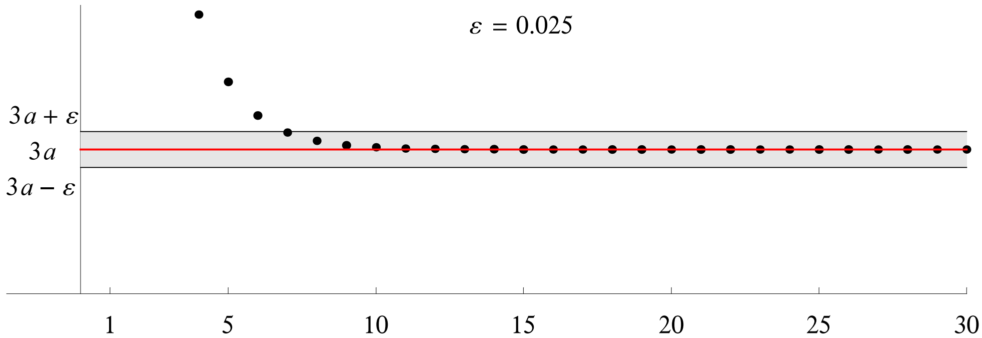
(iv) $\lim\left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} = \frac{a}{b}$, falls $b_n,\ b \neq 0$.

Auf der nächsten Seite folgen Grafiken zu (i) . Danach kommen die Beweise.









Beweis:

Zu (*i*):

Es sei $\lambda \neq 0$. Die Gleichung $|\lambda \cdot a_n - \lambda \cdot a| = |\lambda| \cdot |a_n - a|$ liefert die Beweisidee.

Es sei $\varepsilon > 0$. Da $\lim(a_n) = a$, gibt es auch zu $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ ein n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$ $|a_n - a| < \tilde{\varepsilon}$ gilt. Damit folgt $|\lambda \cdot a_n - \lambda \cdot a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < |\lambda| \cdot \tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, was zu beweisen war.

Zu (*ii*): Es sei $\varepsilon > 0$. Da $\lim(a_n) = a$, gibt es auch zu $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2}$ ein $n_{0\,a}$, so dass für alle $n \geq n_{0\,a}$ $|a_n - a| < \tilde{\varepsilon}$.
Analog gibt es, da $\lim(b_n) = b$, zu $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2}$ ein $n_{0\,b}$, so dass für alle $n \geq n_{0\,b}$ $|b_n - b| < \tilde{\varepsilon}$.
Es sei nun $n_0 := \max(n_{0\,a}, n_{0\,b})$. Dann gilt erst recht $|a_n - a| < \tilde{\varepsilon}$ und $|b_n - b| < \tilde{\varepsilon}$ für alle $n \geq n_0$. Also gilt auch $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Zu (*iii*): Nach Satz 1.2.5 gibt es ein $A \in \mathbb{R}^+$ mit $|a_n| < A$.
Der kleine Trick, das richtige n_0 zu einem ε zu finden, beruht jetzt auf folgender identischer Umformung und trivialen Abschätzung:
$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n \cdot b_n - a_n \cdot b + a_n b - a \cdot b| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)\,b| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a|$.
1. Fall: Es sei $b \neq 0$. Es sei $\varepsilon > 0$.
Zu $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{2|b|}$ gibt es ein $n_{0\,a}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon_1$ für alle $n \geq n_{0\,a}$. Zu $\varepsilon_2 := \frac{\varepsilon}{2\,A}$ gibt es ein $n_{0\,b}$, so dass $|b_n - b| < \varepsilon_2$ für alle $n \geq n_{0\,b}$.
Setze nun wieder $n_0 := \max(n_{0\,a}, n_{0\,b})$, dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a|$$

$$< A \cdot \varepsilon_2 + |b| \cdot \varepsilon_1 = A \cdot \frac{\varepsilon}{2\,A} + \left|b\right| \cdot \frac{\varepsilon}{2|b|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

2. Fall: Es sei $b = 0$. Führen Sie den Beweis analog.

Zu (*iv*): Wegen (*iii*) genügt es zu zeigen, dass, falls $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$

$$\lim\left(\tfrac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{\lim(b_n)}.$$

Beweis dazu:
Es sei nun $\tilde{\varepsilon} := \frac{|b|}{2}$. Dann gibt es ein n_{01} , so dass $|b_n - b| \leq \tilde{\varepsilon} = \frac{|b|}{2}$ für alle $n \geq n_{01}$. Mit der Dreiecksungleichung folgt $|b| - |b_n| \leq |b - b_n| = \left|b_n - b\right| < \frac{|b|}{2}$, also auch $\frac{|b|}{2} < \left|b_n\right|$, d.h. insbesondere $b_n \neq 0$ für alle $n > n_{01}$.

Die nötige Idee liefert

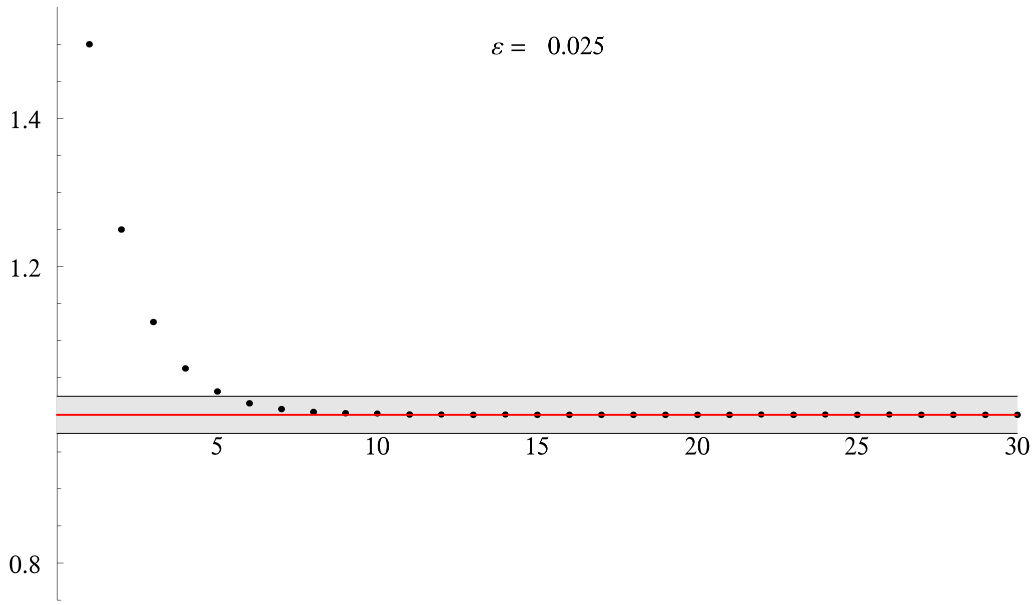
$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n \cdot b}\right| \leq \frac{2}{b^2}\left|b_n - b\right|$$

für alle $n \geq n_{01}$.

Es sei nun wieder $\varepsilon > 0$. Dann gibt es zu $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon \cdot b^2}{2}$ ein n_{02} , so dass $|b_n - b| \leq \varepsilon_1$ für alle $n \geq n_{02}$. Setze auch jetzt wieder $n_0 := \max(n_{01}, n_{02})$, dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n \cdot b}\right| \leq \frac{2}{b^2}\left|b_n - b\right| \leq \frac{2}{b^2}\,\varepsilon_1 = \varepsilon\ .$$

■



Im Zusammenhang mit den Aussagen (*i*) – (*iv*) von Satz 1.2.9 werden häufig Fehler gemacht: Es werden nur die Gleichungen (*i*) – (*iv*) betrachtet und nicht aber die Voraussetzung, dass nämlich die Grenzwerte von (a_n) bzw. (b_n) existieren.

Deshalb einige Gegenbeispiele:

Zu (*i*): Setzen Sie $\alpha_n := (-1)^n$ und $\lambda = 0$. Dann ist $\lambda \cdot \alpha_n = 0$, und damit ist $\lim(\lambda \cdot \alpha_n) = 0$, aber ein Grenzwert von (α_n) existiert nicht.

Zu (*ii*): Setzen Sie $\alpha_n := (-1)^n$ und $\beta_n := -\alpha_n$. Mit $\alpha_n + \beta_n = 0$ gilt dann $\lim(\alpha_n + \beta_n) = 0$, aber weder ein Grenzwert von (α_n) noch von (β_n) existiert.
Zu (*iii*): Setzen Sie $\alpha_n := (-1)^n$ und $\beta_n := \alpha_n$. Dann ist $\alpha_n \cdot \beta_n = 1$. Jetzt gilt $\lim(\alpha_n \cdot \beta_n) = 1$, aber wieder existiert ein Grenzwert von (α_n) bzw. (β_n) nicht.
Als weiteres Gegenbeispiel betrachten Sie $\alpha_n := (-1)^n$ und $\beta_n := \frac{1}{n}$. Die Folge $(\frac{(-1)^n}{n})$ kam schon mehrfach vor. Es gilt $\lim(\alpha_n \cdot \beta_n) = 0$, $\lim(\beta_n) = 0$, aber ... .
Zu (*iv*): Untersuchen Sie etwa die Fälle:

$$\begin{array}{lcccccc} \alpha_n & := & \frac{1}{n^2} & , & \beta_n & := & \frac{1}{n} & ; \\ \alpha_n & := & (-1)^n & , & \beta_n & := & (-1)^n & ; \\ \alpha_n & := & n & , & \beta_n & := & n^2 & . \end{array}$$

<u>Satz 1.2.10</u>
Rechenregeln für Grenzwerte
Es seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen mit $\lim(a_n) = a$ bzw. $\lim(b_n) = b$. Für alle $n > \overline{n} \in \mathbb{N}$ gelte $a_n \le b_n$.
Dann gilt

$$a = \lim(a_n) \le \lim(b_n) = b .$$

Beweis:
Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_{0\,a}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ und damit $a - \varepsilon < a_n$ für alle $n > n_{0\,a}$. Analog gibt es ein $n_{0\,b}$, so dass $b_n < b + \varepsilon$ für alle $n > n_{0\,b}$. Es sei nun $n_0 := \max(\overline{n}, n_{0\,a}, n_{0\,b})$. Dann folgt für alle $n > n_0$
$a - \varepsilon < a_n \le b_n < b + \varepsilon$ und damit $a < b + 2\,\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt $a \le b$.

■

Am Beispiel $a_n := \dfrac{1}{n^2}$, $b_n := \dfrac{1}{n}$ sehen Sie, dass der Fall $a = b$ eintreten kann.

<u>Definition1.2.5:</u>
MONOTONIE VON FOLGEN
Es sei (a_n) eine reelle Folge. (a_n) heißt

monoton wachsend, falls	$a_n \le a_{n+1}$	,
streng monoton wachsend, falls	$a_n < a_{n+1}$	,
monoton fallend, falls	$a_n \ge a_{n+1}$	,
streng monoton fallend, falls	$a_n > a_{n+1}$	

für alle $n \in \mathbb{N}$.
Gelten die Beziehungen zwischen a_n und a_{n+1} erst ab einem n_0 , also für alle $n \ge n_0$, so heißt die Folge entsprechend monoton für $n \ge n_0$.

Auf Seite 1.2 4 wird ein Anfangsstück der Folge (a_n) gezeigt, wobei $a_n := \dfrac{20^n}{n!}$. Für $n \ge 20 := n_0$ ist diese Folge monoton fallend, denn: Es sei $n \ge 20$. Dann gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{20^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{20^n}{n!}} = \frac{20}{n+1} < 1 ,$$

d.h. $a_{n+1} < a_n$.

In dieser Vorlesung wird ein anschaulicher, vielleicht auch naiver Begriff von den reellen Zahlen benutzt. Im Zusammenhang mit der Berechnung von π nach Archimedes kamen zwei Folgen $(E_{2\,n})$ und $(U_{2\,n})$ vor, wobei in unserer jetzigen Betrachtungsweise die Folge (E_{2n}) monoton wächst und (U_{2n}) monoton fällt. Weiterhin hatten wir ausgerechnet, dass $E_n < U_n$ und $0 < U_n - E_n < \frac{64}{n^2}$. Damit folgt $\lim(E_{2n}) = \lim(U_{2n})$. Der gemeinsame Grenzwert definiert die reelle Zahl 2π . Aber auch schon eine der beiden Folgen allein definiert 2π . Diese Beobachtung an einem Spezialfall gilt allgemeiner: Es gilt der

<u>Definition 1.2.11:</u>
BESCHRÄNKTE FOLGE, SCHRANKE
Es sei (a_n) eine reelle Folge.
(a_n) heißt BESCHRÄNKT, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| < K$. Entsprechend heißt K dann ABSOLUTE SCHRANKE der Folge (a_n) .
(a_n) heißt NACH OBEN BESCHRÄNKT, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n < K$. Entsprechend heißt K dann OBERE SCHRANKE der Folge (a_n) .
(a_n) heißt NACH UNTEN BESCHRÄNKT, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $K < a_n$. Entsprechend heißt dann UNTERE SCHRANKE der Folge (a_n) .

<u>Satz 2.1.11</u>
Grenzwert monotoner, beschränkter Folgen
Es sei (a_n) eine monoton (bzw. streng monoton) wachsende, nach oben beschränkte Folge. Dann existiert $\lim(a_n)$.
Falls M eine obere Schranke von (a_n) ist, dann ist $\lim(a_n) \le M$ . .
Es sei (b_n) eine monoton (bzw. streng monoton) fallende, nach unten beschränkte Folge. Dann existiert $\lim(b_n)$.
Falls K eine untere Schranke von (b_n) ist, dann ist $K < \lim(b_n)$.

Satz 1.2.11 gilt entsprechend, wenn die Folgen erst ab einem n_0 monoton sind. Satz 1.2.11 wird in dieser Vorlesung nicht bewiesen. Dazu wären zusätzliche Kenntnisse über eine Grundlegung der reellen Zahlen nötig.

☹ ☹ ☹

Im Falle einer monoton wachsenden Folge (a_n) kann die Menge $\mathbb{M}$ aller oberen Schranken von (a_n) gebildet werden. Die "kleinste" dieser oberen Schranken, Supremum von (a_n) genannt, in Zeichen $\sup(a_n)$, ist dann der Grenzwert der Folge. Auch diese Aussage kann in dieser Vorlesung nicht bewiesen werden.
Die Aussagen von Satz 1.2.11 können in anderem stofflichen Zusammenhang zur Definition reeller Zahlen dienen.

<u>Beispiel:</u>
Es sei $a_n := -\frac{1}{n}$. Dann ist (a_n) streng monoton wachsend und $a_n < 0$. Jede nicht negative reelle Zahl M ist obere Schranke der Folge (a_n) . Null ist die kleinste obere Schranke, also das Supremum von (a_n) .

Es sei bekannt, dass $\sqrt{2}$ irrational ist. Um einen Näherungswert für $\sqrt{2}$ zu berechnen, können Sie etwa probieren: Mit $x_1 := 1.4 = \frac{7}{5}$ ist $x_1^2 = \frac{49}{25} < 2$, und mit $y_1 := 1.5 = \frac{3}{2}$ ist $y_1^2 = \frac{9}{4} > 2$. Wird jetzt $z_1 := \frac{2}{x_1} = \frac{10}{7}$ gesetzt, so gilt $z_1^2 = \frac{100}{49} > 2$. z_1 ist aber eine bessere Näherung für $\sqrt{2}$ als x_1 . Also kann $x_2 := \frac{1}{2}(x_1 + z_1) = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right)$ als nächste Näherung von $\sqrt{2}$ probiert werden. Dieses Verfahren motiviert den

<u>Satz 1.2.12:</u>
Heronverfahren
Heron von Alexandria (um 60)
Es seien $a > 0$ und $x_1 > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$.
Dann gilt $\lim(x_n) = \sqrt{a}$.

Beweis:

Allgemein gilt für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ als Beziehung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha \cdot \beta} \ .$$

Beweis hierfür:Aus $(\alpha-\beta)^2 \geq 0$, d.h. $\alpha^2 - 2\,\alpha\beta + \beta^2 \geq 0$, folgt $\alpha^2 + 2\,\alpha\beta + \beta^2 \geq 4\,\alpha\beta$

und damit $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$.

Wird nun für $\alpha := x_n$ und $\beta := \frac{a}{x_n}$ gesetzt, so folgt

$x_n + \frac{a}{x_n} \geq 2\sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = 2\sqrt{a}$. Also ist $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{a}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Es sein nun $n \geq 2$. Dann gilt mit $\sqrt{a} \leq x_n$ auch $a \leq x_n^2$
und damit $\frac{a}{x_n} \leq x_n$ und $x_n + \frac{a}{x_n} \leq 2\,x_n$, woraus $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \leq x_n$ folgt.
Also ist (x_n) monoton fallend für $n \geq 2$.

Da auch $x_{n+1} \geq \sqrt{a}$ für $n \geq 1$, ist (x_{n+2}) eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge, also konvergent. Damit konvergiert auch (x_n) . Es sei $w := \lim(x_n)$. Dann gilt $w = \lim(x_{n+1})$, und da $w \neq 0$ auch $\lim\left(\frac{a}{x_n}\right) = \frac{a}{w}$ nach Satz 1.2.9 .

Aus der Gleichung $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ folgt durch Limesbildung mit Satz 1.2.9

$w = \frac{1}{2}\,(w + \frac{a}{w})$ bzw. $w^2 = \frac{1}{2}\,(w^2 + a)$, d.h. $w^2 = a$.

Also gilt $w = \lim(x_n) = \sqrt{a}$.

∎

Einige Möglichkeiten mit *Mathematica* :

```
heron2[x_] := 1/2 (x + 2/x);
FixedPoint[heron2, 1.0]
```

```
1.41421
```

```
FixedPointList[heron2, 1.0]
```

```
{1., 1.5, 1.41667, 1.41422, 1.41421, 1.41421, 1.41421}
```

```
√2.
```

```
1.41421
```

```
N[√2, 17]
```

```
1.4142135623730950
```

```
liste1 = FixedPointList[heron2, 1.0, 10]
```

```
{1., 1.5, 1.41667, 1.41422, 1.41421, 1.41421, 1.41421}
```

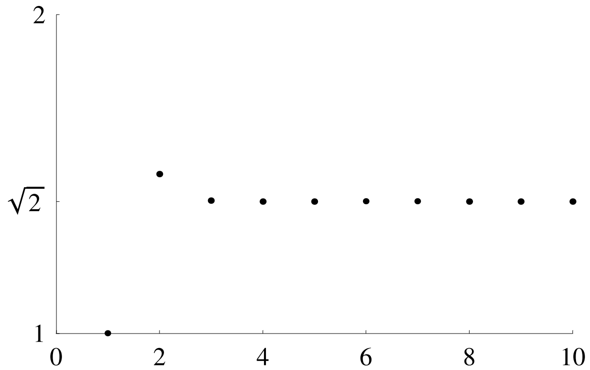
```
liste10 = FixedPointList[heron2, 10.0]
```

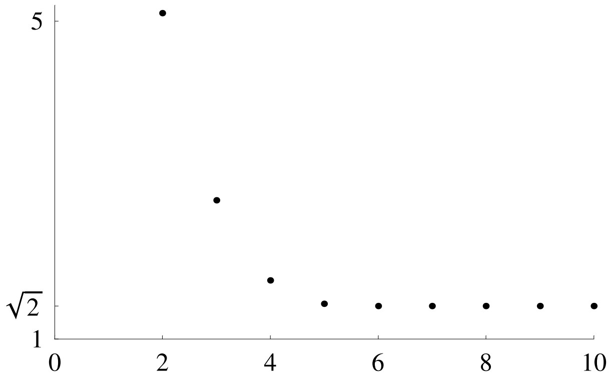
{10., 5.1, 2.74608, 1.73719, 1.44424, 1.41453, 1.41421, 1.41421, 1.41421, 1.41421}

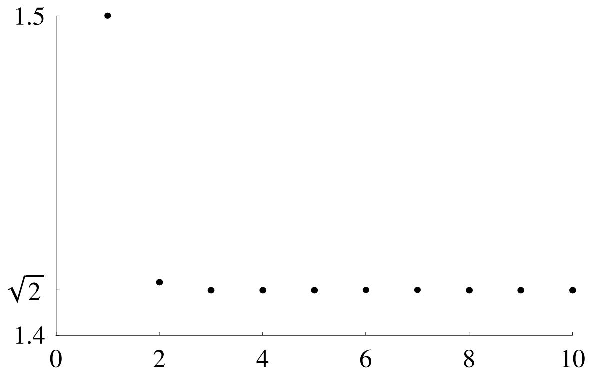
```
liste14 = FixedPointList[heron2, 1.40]
```

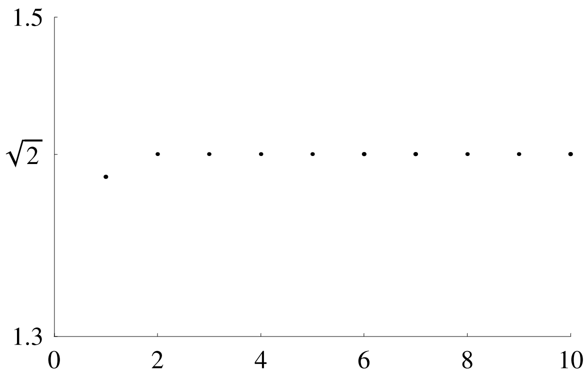
{1.4, 1.41429, 1.41421, 1.41421, 1.41421}

Für $a = 2$ soll das Heronverfahren veranschaulicht werden. Zuerst mit den zwei "schlechten" Startwerten 1 bzw. 10:









Wird ein "guter" Startwert, etwa 1.4 , gewählt, so "konvergiert das Verfahren sehr schnell":

Es ist deshalb sinnvoll, bei diesem Beispiel durchaus Tabellen der berechneten Werte anzusehen.
Zuerst mit dem Startwert 3/2 die entstehenden Brüche der sukzessive ausgerechneten Näherungswerte für $\sqrt{2}$:

```
FixedPointList[heron2, 3 / 2, 5]
```

$$\left\{\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \frac{886731088897}{627013566048}, \frac{1572584048032918633353217}{1111984844349868137938112}\right\}$$

Diese Brüche ermöglichen kaum eine Einsicht in das Konvergenzverhalten! Dezimalbrüche sind bei derartigen Betrachtungen besser geeignet. Dazu dezimale Approximationen:

```
N[%, 17]
```

```
{1.5000000000000000, 1.4166666666666667, 1.4142156862745098,
 1.4142135623746899, 1.4142135623730950, 1.4142135623730950}
```

Für die Startwerte 10, 1, 1.5, 1.4 ergeben sich die folgende Werte als genäherte Dezimalbrüche beim Heronverfahren zur Berechnung von $\sqrt{2}$:

10	1	1.5	1.4
5.1	1.5	1.416666666666666	1.414285714285714
2.746078431372549	1.416666666666666	1.414215686274509	1.414213564213564
1.737194874379598	1.414215686274509	1.414213562374689	1.414213562373095
1.444238094866231	1.414213562374689	1.414213562373095	1.414213562373095
1.414525655148737	1.414213562373095	1.414213562373095	1.414213562373095
1.414213596802269	1.414213562373095	1.414213562373095	1.414213562373095
1.414213562373095	1.414213562373095	1.414213562373095	1.414213562373095
1.414213562373095	1.414213562373095	1.414213562373095	1.414213562373095
1.414213562373095	1.414213562373095	1.414213562373095	1.414213562373095

Nun zu der EULERschen Zahl e (Leonhard Euler, 1707 – 1783) :

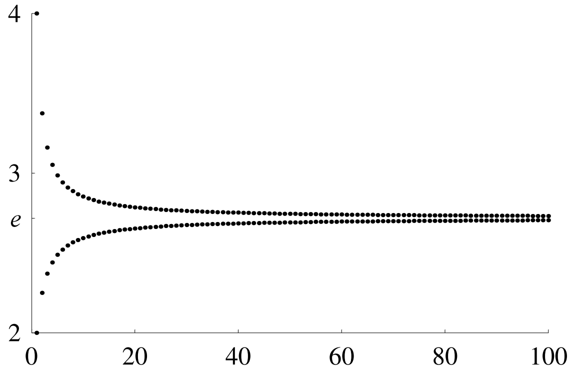
```
N[ⅇ, 17]
```

```
2.7182818284590452
```

```
ⅇ ⅇ
```

Dazu gibt es ein schönes Buch:
Eli Maor

Die Zahl e – Geschichte und Geschichten
Basel: Birkhäuser, 1996. 3-7643-5093-8



Satz 1.2.13

e als Grenzwert

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ und $y_n := (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. Dann gilt:

(i) (x_n) wächst streng monoton,

(ii) (y_n) fällt streng monoton.

(iii) $\lim(x_n) = \lim(y_n) = : e$.

Beweis:

Zu (i): Streng monotones Wachsen der Folge (x_n) erfordert den Nachweis von $x_{n-1} < x_n$ für alle $n \geq 2$, d.h. $(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1} < (1 + \frac{1}{n})^n$. Diese Bedingung ist äquivalent zu

$(1 + \frac{1}{n-1})^{-1} < \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n$. Nun folgt durch elementare Bruchrechnung

$$(1 + \frac{1}{n-1})^{-1} = (\frac{n-1+1}{n-1})^{-1} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \ ,$$

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}} = \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n-1+1}{n-1}} = \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}} = \frac{(n+1)\,(n-1)}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2} \ ,$$

so dass also noch zu beweisen bleibt: $1 - \frac{1}{n} < (1 - \frac{1}{n^2})^n$.
Hier hilft wieder die Bernoullische Ungleichung (Satz 1.2.7) weiter:

$$1 - \frac{1}{n} = 1 + n \cdot (-\frac{1}{n^2}) < (1 - \frac{1}{n^2})^n \ .$$

Also ist   streng monoton wachsend.

Zu (ii): Es wird wieder analog vorgegangen. Streng monotones Fallen von (y_n) bedeutet:

$$(1 + \frac{1}{n-1})^n > (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \ .$$

.

Diese Ungleichung ist gleichbedeutend mit der folgenden:

(*) $\left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n > 1 + \frac{1}{n}$.

Mit $\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\frac{n-1+1}{n-1}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n^2}{n^2-1} = 1 + \frac{1}{n^2-1}$

ist (*) äquivalent zu

$(1 + \frac{1}{n^2-1})^n > 1 + \frac{1}{n}$.

Die Bernoullische Ungleichung liefert für $n > 1$

$(1 + \frac{1}{n^2-1})^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$,

was noch zu beweisen war.

Zu (iii): Es gilt $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = y_n \leq y_1 = 4$.
Also ist (x_n) eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge. Damit ist (x_n) konvergent.
Andererseits folgt mit $2 = x_1 \leq x_n < y_n$, dass (y_n) eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge ist. Damit ist auch (y_n) konvergent.
Nun gilt
$y_n - x_n = (1 + \frac{1}{n})^n ((1 + \frac{1}{n}) - 1) = \frac{1}{n} \cdot x_n$.

Es bezeichne $\lim(x_n) = : x$ und $\lim(y_n) = : y$. Dann folgt:

$$|x - y| = |(x - x_n) + (x_n - y_n) + (y_n - y)|$$

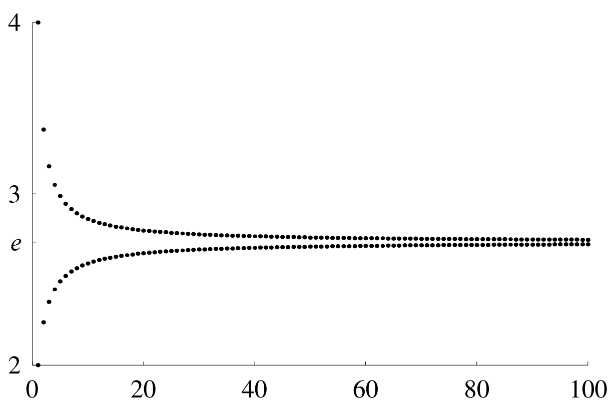
$$\leq \quad x - x_n \quad + \quad \frac{x_n}{n} \quad + \quad y_n - y$$

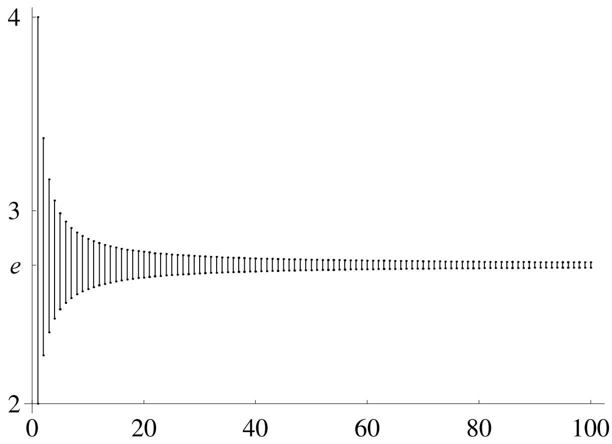
■

$(\frac{x_n}{n})$ ist nach Satz 1.2.9 eine Nullfolge, ebenso sind es $(x - x_n)$ und $(y_n - y)$. Damit läßt sich $|x - y|$ durch die Glieder der Summe dreier Nullfolgen abschätzen, d.h. $x - y = 0$.
Der gemeinsame Grenzwert der Folgen (x_n) und (y_n) wird e genannt. Diese Bezeichnung geht auf Leonhard Euler zurück. e wird Eulersche Zahl genannt.

In dem letzten Abschnitt wurde gezeigt, wie für jedes positive, reelle a mit Hilfe von Folgen $\sqrt{a}$ beliebig genau bestimmt werden kann. Zu e wurden ebenfalls zwei Näherungsfolgen konstruiert. Früher hatten wir auch schon für π zwei Näherungsfolgen bestimmt.

Vergleichen Sie die folgende Grafik mit der nächsten.





Das Verfahren, nämlich eine reelle Zahl durch zwei monotone Folgen "einzuschachteln", motiviert die

Definition:
INTERVALLSCHACHTELUNG
Es seien (x_n) , (y_n) reelle Folgen mit $x_n < y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es seien (x_n) streng monoton wachsend (y_n) streng monoton fallend. Dann heißt die Folge $\left([x_n, y_n] \right)$ der abgeschlossenen Intervalle $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung, wenn die reelle Folge $(y_n - x_n)$ eine Nullfolge ist. Schreibweise: $\langle x_n \mid y_n \rangle$.

Die reellen Zahlen lassen sich begründen mit dem

Intervallschachtelungsprinzip:
Jede Intervallschachtelung $\langle x_n \mid y_n \rangle$ mit rationalen x_n, y_n bestimmt genau eine reelle Zahl r ; d.h. es gibt genau eine reelle Zahl r , die in allen Intervallen $[x_n, y_n]$ liegt.

Weiterhin gilt $\lim(x_n) = r = \lim(y_n)$.