■ 2. Reihen

Materialien zur Vorlesung **Elementare Analysis**, Wintersemester 2003 / 4

■ 2.1 Konvergenz

Zwei Anekdoten, von denen Sie hoffentlich schon gehört haben:

Die Anekdote vom kleinen Gauß

(Carl Friedrich Gauß, 1777 – 1855)
Sein Lehrer, der die Schüler etwas länger beschäftigen wollte, stellte der Klasse die Aufgabe, alle Zahlen von 1 bis 50 zu addieren. Doch seine Ruhe währte nicht lange, denn schon bald gab der kleine Gauß ihm die Antwort 1275. Auf die Frage, wie er das so schnell ausgerechnet habe, kam die Antwort, das sei doch einfach:

$$(1 + 50) + (2 + 49) + (3 + 48) + \ldots + (25 + 26)\,,$$

also $25 \cdot 51$.

Die Anekdote von den Weizenkörnern auf den Feldern des Schachbretts

There is a legend about the Shah of ancient Persia, who was so impressed by the newly invented game of chess that he asked to see the inventor and bestow on him the riches of the royal palace. When summoned to the king, the inventor, a poor peasant who was, however, well versed in mathematics, merely requested that one grain of wheat be placed on the first square of the chess board, two grains on the second square, four grains on the third, and so on until the entire board would be covered. The Shah, stunned by the modesty of this request, immediately ordered a sack of grain to be brought in, and his servants patiently began to place the grains on the board. To their utter astonishment, they soon discovered that neither the sack, nor the entire amount of grain in the kingdom, would suffice to fulfill the task, for the 64th term of the progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... *is quite a large number:*
9,223,372,036,854,775,808. *If we tried to place that many grains in a straight line, the line - assuming that each grain is one millimeter in diameter - would be some two light-years long! * ....*

** The word "chess" incidentally, comes from "shah" giving some credence to the legend.*

Aus:
Eli Maor: *To Infinity and Beyond. A Cultural History of the Infinite.*
Boston: Birkhäuser, 1987. 3-7643-3325-1. Seiten 29 – 30.

Eine Variante dieser Anekdote finden Sie bei www.s-c-h-a-c-h-i-n-f-o.de .

```
Table[2^n, {n, 0, 63}]
```

```
{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768,
 65536, 131072, 262144, 524288, 1048576, 2097152, 4194304, 8388608, 16777216,
 33554432, 67108864, 134217728, 268435456, 536870912, 1073741824, 2147483648,
 4294967296, 8589934592, 17179869184, 34359738368, 68719476736, 137438953472,
 274877906944, 549755813888, 1099511627776, 2199023255552, 4398046511104,
 8796093022208, 17592186044416, 35184372088832, 70368744177664, 140737488355328,
 281474976710656, 562949953421312, 1125899906842624, 2251799813685248,
 4503599627370496, 9007199254740992, 18014398509481984, 36028797018963968,
 72057594037927936, 144115188075855872, 288230376151711744, 576460752303423488,
 1152921504606846976, 2305843009213693952, 4611686018427387904, 9223372036854775808}
```

Schließlich haben Sie in einer Übungsaufgabe die Flächeninhalte der Schneeflockenkurven berechnet

Wir wollen aus diesen Beobachtungen zwei Konsequenzen ziehen:
Es wäre nützlich

1. eine Formel für Summen der Gestalt $1 + 2 + 4 + ... + 2^n$ zu finden,
2. Schreibweisen zu vereinbaren für Summen der Gestalt $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Definition 2.1.1:
SUMMENZEICHEN
Es sei (a_n) eine reelle Folge. Es seien $n, m \in \mathbb{N}_0$. Dann wird das Zeichen für die endliche Summe rekursiv definiert

$$\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu := 0 \quad , \text{ falls } m < n \ ,$$
$$\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu := a_n \quad , \text{ falls } m = n \ ,$$
$$\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu := \sum_{\nu=n}^{m-1} a_\nu + a_m \quad , \text{ falls } m > n \ .$$

Mit entsprechend vorsichtiger Interpretation läßt sich diese Definition so formulieren:

$$\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m \ .$$

Das Problem der richtigen Interpretation ist in den drei Punkten "$\cdots$" versteckt.
Die Voraussetzung " (a_n) eine reelle Folge", ist eine bequeme, aber nicht notwendige für die Definition des Summenzeichens!

Es seien (a_n) , (b_n) geeignete Folgen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $k, n, m \in \mathbb{N}_0$

$$\lambda \cdot \left(\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu \right) = \sum_{\nu=n}^{m} \lambda \cdot a_\nu \ ,$$

$$\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu + \sum_{\nu=n}^{m} b_\nu = \sum_{\nu=n}^{m} (a_\nu + b_\nu) \ ,$$

$$\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu - \sum_{\nu=n}^{m} b_\nu = \sum_{\nu=n}^{m} (a_\nu - b_\nu) \ ,$$

und falls $n \le k < m$

$$\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu = \sum_{\nu=n}^{k} a_\nu + \sum_{\nu=k+1}^{m} a_\nu \ .$$

Triviale Folgerungen sind:

$$\sum_{\nu=n}^{m} 1 = m - n + 1 ,$$

$$\sum_{\nu=n}^{m} c_\mu = (m - n + 1) \cdot c_\mu \ .$$

Induktiv lassen sich leicht die folgenden Formeln beweisen:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2},$$

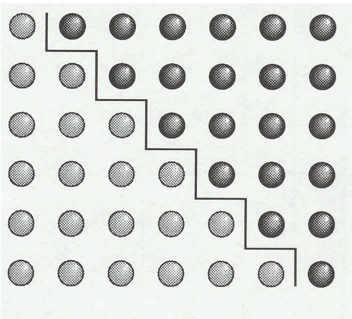
$$\sum_{\nu=1}^{n} (2\nu - 1) = n^2,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

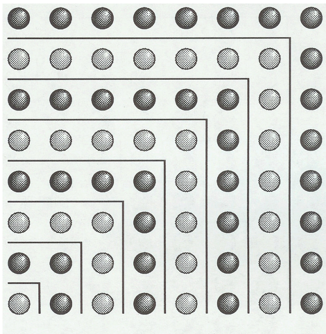
$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}.$$

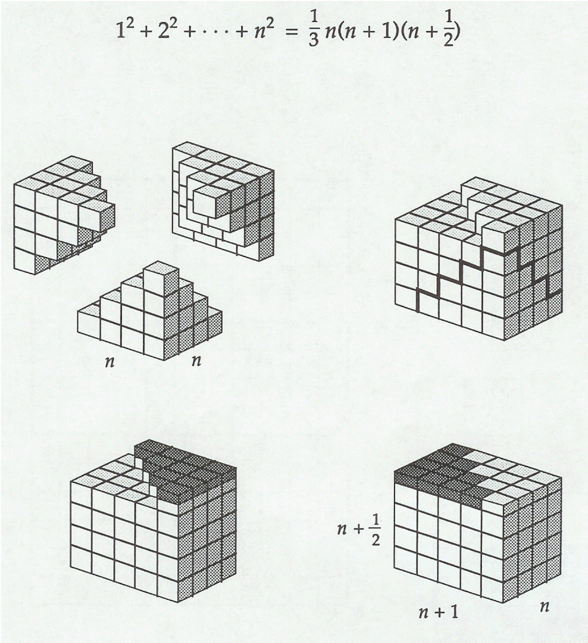
Zu einigen dieser Formeln gibt es schöne "Beweise ohne Worte":
Die Grafiken finden Sie bei:
Roger B. Nelson: *Proofs without Words. Exercises in Visual Thinking.*
Washington: The Mathematical Association of America, 1993, 0-88385-700-6. S. 69, 71, 77.



$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$



$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$



Mathematica kennt die o.g. Formeln und viele ähnliche:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu$$

$$\frac{1}{2} n (1 + n)$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} (2\,\nu - 1)$$

$$-n + n (1 + n)$$

Simplify[%]

$$n^2$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^2$$

$$\frac{1}{6} n (1 + n) (1 + 2 n)$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^3$$

$$\frac{1}{4} n^2 (1 + n)^2$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^4$$

$$\frac{1}{30} n (1 + n) (1 + 2 n) (-1 + 3 n + 3 n^2)$$

```
Expand[%]
```

$$-\frac{n}{30}+\frac{n^3}{3}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^5}{5}$$

```
Expand[ Sum[v^8, {v, 1, n}] ]
```

$$\text{Expand}\Big[\sum_{\nu=1}^{n}\nu^8\Big]$$

$$-\frac{n}{30}+\frac{2\,n^3}{9}-\frac{7\,n^5}{15}+\frac{2\,n^7}{3}+\frac{n^8}{2}+\frac{n^9}{9}$$

Entsprechend der geometrischen Folge gibt es die

Definition 2.1.2:
GEOMETRISCHE REIHE
Es seien $a, q \in \mathbb{R}$. Dann wird die Folge (s_n) mit $s_n := \sum_{\nu=0}^{n} a \cdot q^\nu$ als GEOMETRISCHE REIHE bezeichnet.

Selbstverständlich kann der Faktor a vor das Summenzeichen "gezogen" werden. Deshalb soll nun nur die Summe $\sum_{\nu=0}^{n} q^\nu$ untersucht werden.

Satz 2.1.1:
Summenformel für die geometrische Reihe
Es sei $q \in \mathbb{R}$.

(*i*) Ist $q = 1$, so gilt $\sum_{\nu=0}^{n} q^\nu = (n+1)$.

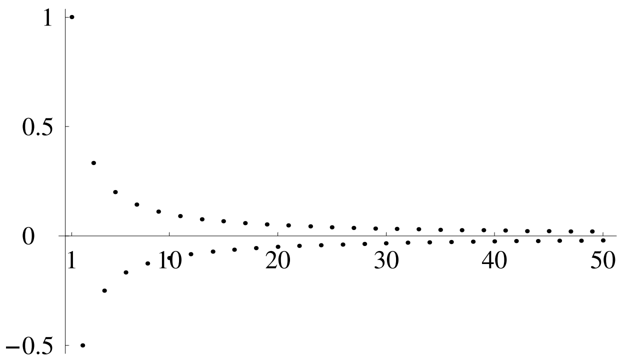
(*ii*) Ist $q \neq 1$, so gilt $\sum_{\nu=0}^{n} q^\nu = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Beweis als Übungsaufgabe.

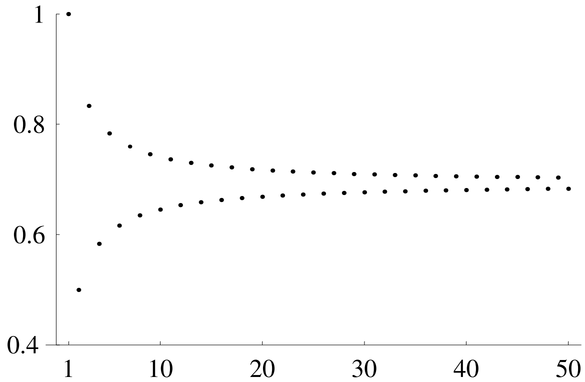
■

Definition 2.1.3:
PARTIALSUMMENFOLGE
Es seien (a_n) eine Folge und $s_n := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$. Dann heißt die Folge (s_n) die PARTIALSUMMENFOLGE der Folge (a_n) .

Ein Anfangsstück der Folge (a_n) mit $a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.



Ein Anfangsstück der zugehörige Partialsummenfolge (s_n) .



<u>Definition 2.1.4:</u>
UNENDLICHE REIHE
Es sei (a_n) eine Folge. Das Symbol

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$$

wird als UNENDLICHE REIHE bezeichnet und in zweierlei Weisen interpretiert:

1) Als Folge: Mit $s_n := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ eine andere Schreibweise für (s_n) .

2) Als reelle Zahl: Falls (s_n) konvergent ist, etwa mit $\lim(s_n) = s$ ($\in \mathbb{R}$), dann ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ein anderes Zeichen für s ; also kurz

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu := s \, .$$

Hieraus $(s_n) = s$ zu schließen, ist trivialerweise falsch. Welche der beiden Interpretationen für das Symbol $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ zutrifft, ergibt sich normaler Weise aus dem Zusammenhang.
Eine beide Interpretationen mischende Sprechweise ist gebräuchlich: $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ konvergiert und hat den Wert s .

Insbesondere bei unendlichen Reihen werden üblicher Weise Folgen (a_n) betrachtet, bei denen auch ein a_0 definiert ist. Dann ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ sinnvoll.

Satz 2.1.2:

Es seien $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent und $k \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert auch $\sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu$ und es gilt:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu + \sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu \ .$$

Beweis:

Es bezeichne $s := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ und $s_n := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ für $n \in \mathbb{N}$ und

$$t_n := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } n < k \\ \sum_{\nu=k}^{n} a_\nu\,, & \text{falls } n \geq k \end{cases} \ .$$

Für $n \geq k$ gilt also $s_n = s_{k-1} + t_n$ bzw. $t_n = s_n - s_{k-1}$. Die konstante Folge (s_{k-1}) konvergiert und ihr Grenzwert ist s_{k-1} . Da $\lim(s_n) = s$, folgt $\lim(t_n) = \lim(s_n) - s_{k-1}$
und damit die Behauptung.

■

Eine direkte Konsequenz dieses Satzes ist: Werden in einer konvergenten Reihe endlich viele Summanden weggelassen bzw. geändert, so konvergiert auch die neue Reihe. Daher werden im Folgenden üblicher Weise Reihen der Gestalt $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ betrachtet, manchmal solche der Gestalt $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ und selten solche der Gestalt $\sum_{\nu=3}^{\infty} a_\nu$.

In den nächsten beiden Sätzen werden die unterschiedlichen Interpretationen aus der Definition von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ angewandt.

Satz 2.1.3:

Es sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent. Dann ist (a_n) eine Nullfolge.

Beweis:

Es sei $s := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 , so dass

$$\left| s - \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \right| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n > n_0 \ .$$

Mit $s_n := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ folgt für $n > n_0$

$$|\, a_{n+1} \,| = |\, s_{n+1} - s_n \,| = |\, s_{n+1} - s + s - s_n \,| \leq |\, s_{n+1} - s \,| + |\, s_n - s \,| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \ .$$

■

Nun zurück zur endlichen geometrischen Reihe. Es drängt sich die Frage auf: Wann konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$, also die unendliche geometrische Reihe.

Satz 2.1.4:

Für $|\, q \,| < 1$ konvergiert die unendliche geometrische Reihe und es gilt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu = \frac{1}{1-q} \ .$$

Für $|\, q \,| \geq 1$ ist die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ divergent.

Beweis:

Es sei $|\, q \,| < 1$. Mit Satz 1.27 folgt, dass (q^n) eine Nullfoge ist. Nach Satz 2.1.1 gilt

$$\sum_{\nu=0}^{n} q^\nu = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} .$$

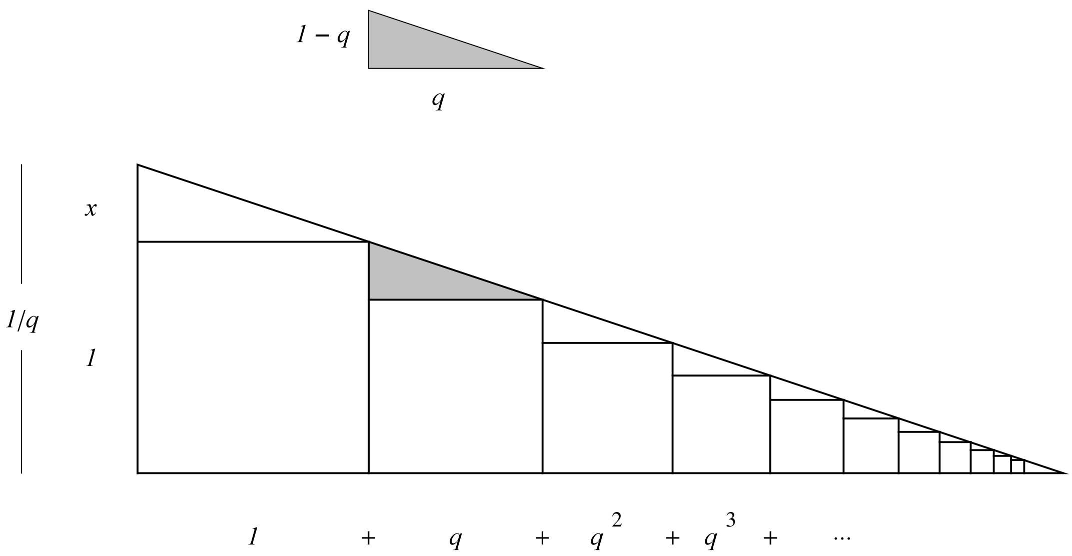
Nun ist auch $\left(\frac{q^n}{1-q}\right)$ eine Nullfolge und damit $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu = \lim\left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{1}{1-q}$.

Gilt $|\, q \,| \geq 1$, so ist (q^n) keine Nullfolge. Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ kann daher nach Satz 2.1.3 nicht konvergieren.

Für $q = \frac{1}{2}$ folgt $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, also die bemerkenswerte Beziehung

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = 1 .$$

Ein anschaulicher Beweis für die Summenformel der geometrischen Reihe läßt sich mit Hilfe der folgenden Grafik führen.
Aus:
Roger B. Nelson: *Proofs without Words. Exercises in Visual Thinking.*
Washington: The Mathematical Association of America, 1993, 0-88385-700-6. Seite 119.



Das kleine graue Dreieck habe die Katheten $1-q$ und q . Die linke Kathete des großen Dreiecks errechnet sich mit Hilfe des Strahlensatzes wie angegeben zu $\frac{1}{q}$:

$$\frac{1-q}{q} = \frac{x}{1} , x + 1 = \frac{1-q}{q} + \frac{q}{q} = \frac{1}{q} .$$

Die Seitenlänge jedes folgenden Quadrats verringert sich um den Faktor q . Die Seitenlängen sind also $1, q, q^2, q^3, q^4$, … . Wiederum folgt mit dem Strahlensatz

$$\frac{1 + q + q^2 + q^3 + \cdots}{\frac{1}{q}} = \frac{q}{1-q} ,$$

woraus sich $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-q}$ ergibt.

Eine einschlägige Geschichte:

Das Paradoxon von Zenon

(Zenon von Elea, ~ –490 - ~ –425)

Nowhere was this fear of the infinite better manifested than in the famous paradoxes of Zeno, a philosopher who lives in Elea in the fourth century B.C. His paradoxes, or "arguments," as they were called, deal with motion and continuity, and in one of them he proposed to show that motion is impossible. His argument seems quite convincing: in order for a runner to move from one point to another, he must first cover half the distance between the two points, then the half of the remaining distance, then the half what remains next, and so on ad infinitum (Fig.1 1) . Since this requires an infinite number of steps, Zeno argued, the runner would never reach his destination. Of course, Zeno knew full well that the runner would reach the end point after a finite lapse of time. Yet he did not resolve the paradox; rather, he left it for future generations. In this at least he was humble, admitting that the infinite was beyond his and his generation's intellectual reach. Zeno's paradox had to wait another twenty centuries before they would resolved.

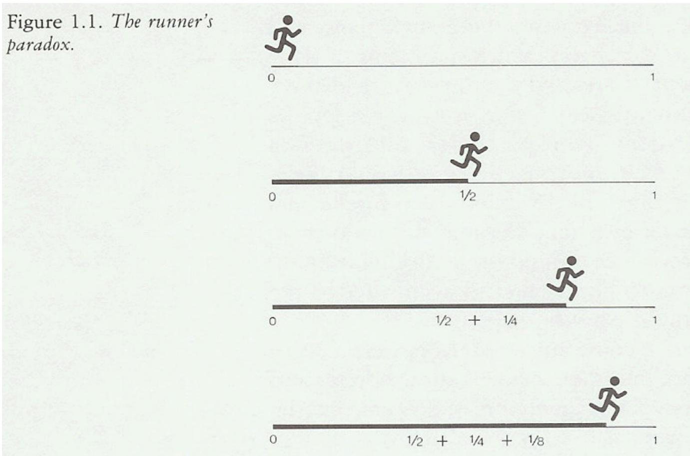


Figure 1.1. *The runner's paradox.*

Aus: Eli Maor: To Infinity and Beyond. A Cultural History of the Infinite.
Boston: Birkhäuser, 1987. 3-7643-3325-1. Seiten 3 – 4.

Eine andere Form diese Paradoxons wird als die Geschichte von Achill und der Schildkröte erzählt.

Als weiteres Beispiel für konvergente Reihen beweisen wir

<u>Satz 2.1.5:</u>

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1 .$$

Beweis:

Für $n \geq 1$ gilt mit $\frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + \cdots + (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}) =$$

$$= 1 + (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}) + (-\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}) + \cdots + (-\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n}) - \tfrac{1}{n+1} =$$

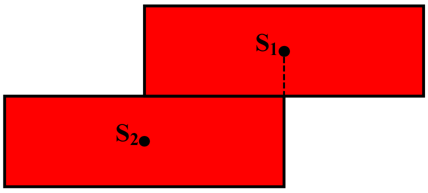
$$= 1 - \tfrac{1}{n+1} .$$

Nun ist $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ Nullfolge. Damit folgt die Behauptung.

■

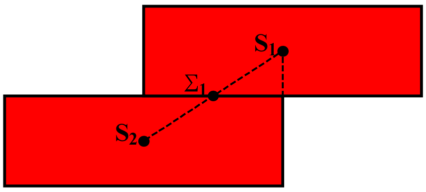
Stellen Sie sich vor, Sie würden mit Ziegelsteinen (bzw. Dominosteinen oder anderen quaderförmigen, homogenen Teilen) ohne Mörtel eine "Brücke" bauen. Wie groß kann die Spannweite werden?
Der folgende Text und die Grafiken benutzen als Vorlage den Aufsatz:
Peter Müller: *Ziegelsteine und Divergenz*. Praxis der Mathematik, 25, 152 - 153, 1983.

Der maximale Überhang bei zwei übereinanderliegenden Ziegelsteinen wird erreicht, falls der Schwerpunkt S_1 des oberen Ziegelsteins genau über dem Rand des unteren Ziegelsteins liegt. Die Ziegel sollen die Länge 2 haben.



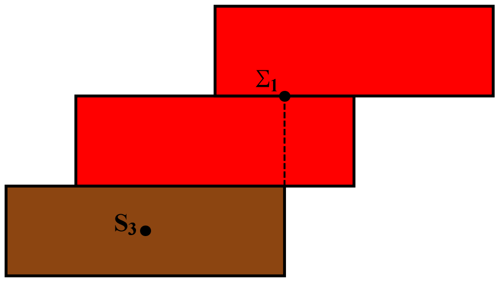
Also ist die Länge des Überhangs gleich 1 .

Der gemeinsame Schwerpunkt Σ_1 der beiden Ziegelsteine liegt auf der Mitte der Verbindungslinie $\overline{S_1 S_2}$.

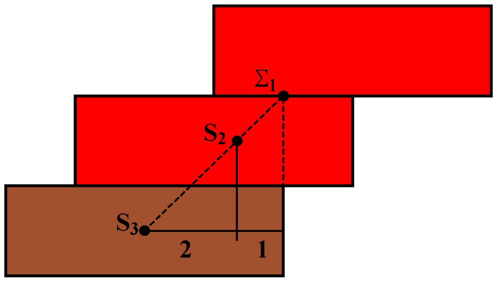


Also ist die maximale Länge des zweiten Überhangs gleich $\frac{1}{2}$.

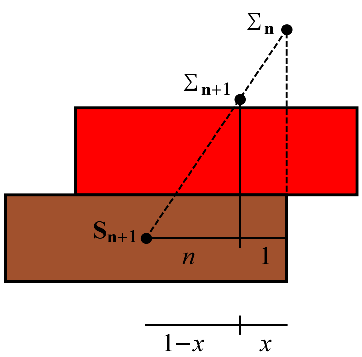
Wird unter die ersten beiden Ziegelsteine ein weiterer gelegt, dann wird der maximale Überhang erreicht, falls der Schwerpunkt Σ_1 genau über dem Rand des unteren Ziegels liegt.
Wie kann nun der gemeinsame Schwerpunkt Σ_2 dieser drei Ziegel bestimmt werden?



Auf Grund physikalischer Gesetze liegt Σ_2 auf der Verbindungslinie $\overline{\Sigma_1 S_3}$. Bei Σ_1 können Sie sich das doppelte Gewicht $2\,G$ der zwei oberen Ziegel konzentriert vorstellen, bei S_3 das Gewicht G des unteren Ziegels. Dann ist die Projektion der Strecke $\overline{\Sigma_1 S_3}$ im Verhältnis $1:2$ zu teilen, um den Schwerpunkt Σ_2 zu finden. Also ist die maximale Länge des dritten Überhangs gleich $\frac{1}{3}$.



Allgemein läßt sich die maximale Länge des n-ten Überhangs mit der folgenden Grafik berechnen. Σ_n sei der gemeinsame Schwerpunkt der n ersten Ziegelsteine, S_{n+1} sei der Schwerpunkt des $(n+1)$-ten Ziegelsteines. Gesucht ist der Schwerpunkt Σ_{n+1} der $(n+1)$ Ziegelsteine. Bei Σ_n greift das Gewicht $n \cdot G$ an, bei S_{n+1} das Gewicht G . Daher ist die Projektion der Strecke $\overline{\Sigma_n S_{n+1}}$ im Verhältnis $n:1$ zu teilen. Wird ein $(n+2)$-ter Stein untergelegt, so sei der neue Überhang x .



Dann ist $\frac{1-x}{x} = \frac{n}{1}$, d.h. $1 - x = n \cdot x$, also $x = \frac{1}{n+1}$.
Damit summieren sich die maximalen Überhänge der ersten $n+2$ Steine zu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} \ .$$

Wie groß werden nun diese Werte?

Satz 2.1.6:

Die HARMONISCHE REIHE $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ ist divergent.

Beweis:

Es sei $k \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{\nu=1}^{2^k} \frac{1}{\nu} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{2^k}$$

$$= (1 + \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}) + \cdots + (\tfrac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \tfrac{1}{2^k})$$

$$> 1 \cdot \tfrac{1}{2} + 2 \cdot \tfrac{1}{4} + 4 \cdot \tfrac{1}{8} + \cdots + 2^{k-1} \cdot \tfrac{1}{2^k}$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{2} \qquad (k \text{ Summanden})$$

$$= \tfrac{k}{2} \quad .$$

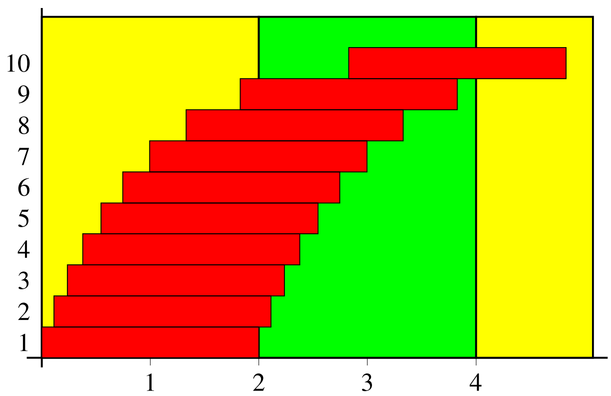
Die Partialsummen s_{2^k} wachsen und werden größer als jede vorgegebene Zahl. Damit ist eine divergente Teilfolge der Partialsummenfolge gefunden. Daher kann $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ nicht konvergieren.

■

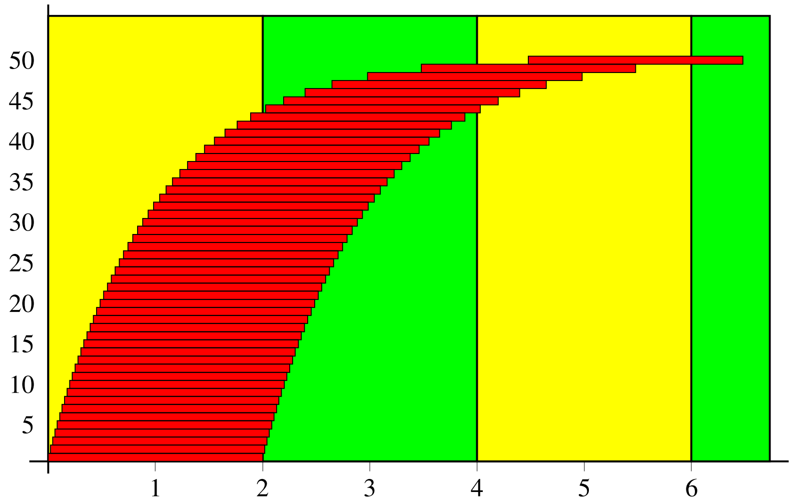
Mit den oben betrachteten idealisierten Ziegelsteinen läßt sich also ein beliebig großer Überhang bauen!

Zur Erstellung der folgenden Grafiken wurden Teile des *Mathematica*-Programms `OverhangingDominoes` benutzt. Es findet sich bei: Ed Packel, Stan Wagon: Animating Calculus. New York, Springer,1997. 0-387-94748-5

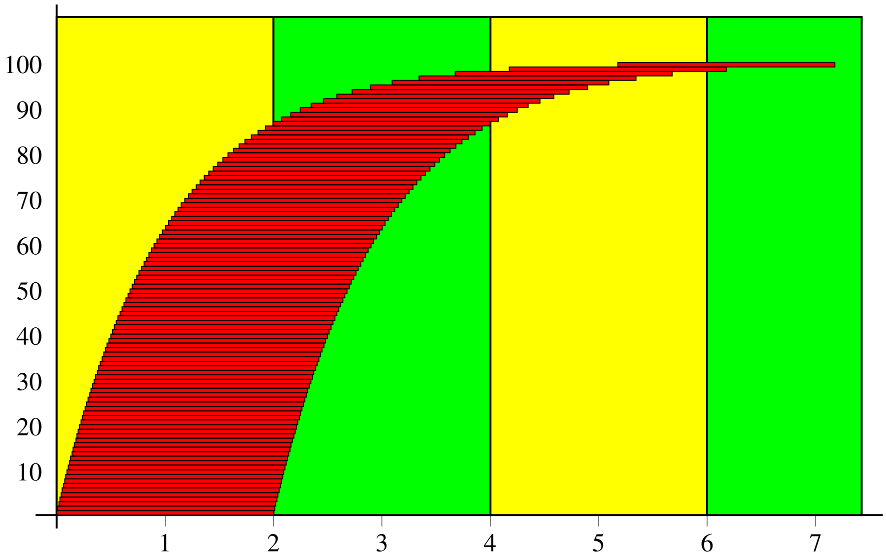
```
OverhangingDominoes[10];
```



```
OverhangingDominoes[50];
```




```
OverhangingDominoes[100];
```



Eine direkte Folgerung aus Satz 1.2.9, also den Rechenregeln für Grenzwerte, ist

<u>Satz 2.1.7:</u>

Es seien (a_n) , (b_n) Folgen und $\lambda \in \mathbb{R}$. $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ seien konvergent. Dann gilt

(i) $\quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda \cdot a_\nu = \lambda \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$,

(ii) $\quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu + b_\nu)$,

(iii) $\quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu - b_\nu)$.

Ein Beweis sei exemplarisch für (i) skizziert:

Es sei $s_n := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$. Dann gilt $\lambda \cdot s_n = \lambda \cdot \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda \cdot a_\nu$. Mit Satz 1.2.9 (i) folgt

$$\lim(\lambda\cdot s_n) = \lambda\cdot\lim(s_n) = \lambda\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\ .$$

Andererseits gilt $\lim(\lambda\cdot s_n) = \lim\left(\sum_{\nu=0}^{n}\lambda\cdot a_\nu\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda\cdot a_\nu$.

■

Es ist für viele Reihen mühseelig die Konvergenz direkt nachzuweisen, also ohne einige zusätzliche Aussagen über konvergente Reihen zu benutzen. Einfacher wird es, wenn einige elementare Sätze benutzt werden können.

<u>Satz 2.1.8:</u>

Es seien $c_\nu > 0$ für $\nu\in\mathbb{N}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ konvergent. Weiterhin sei (λ_ν) eine nicht negative, beschränkte Folge; also gelte $0\le\lambda_\nu < K$ für alle $\nu\in\mathbb{N}$. Dann konvergiert auch

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_\nu\cdot c_\nu\ .$$

Beweis:

Es sei $s_n := \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu$. Da $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ konvergent und $c_\nu > 0$, gilt mit $s := \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$, dass $s_n < s$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Es folgt $\sigma_n := \sum_{\nu=0}^{n}\lambda_\nu\cdot c_\nu \le \sum_{\nu=0}^{n} K\cdot c_\nu \le K\cdot s_n < K\cdot s$.

Damit ist (σ_n) eine monoton wachsende nach oben beschränkte Folge, also konvergent.

■

<u>Satz 2.1.8:</u>

Es seien $c_\nu \ge 0$ für $\nu\in\mathbb{N}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ konvergent. Ferner gelte $0\le a_\nu\le c_\nu$ für alle $\nu\in\mathbb{N}$.

Dann konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$.

Beweis:

Es sei $\lambda_\nu := \frac{a_\nu}{c_\nu}$, falls $c_\nu > 0$ und sonst sei $\lambda_\nu := 0$. Dann gelten $0\le\lambda_\nu\le 1$ und $\sum_{\nu=0}^{n}\lambda_\nu\cdot c_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$. Mit dem vorigen Satz folgt nun die Behauptung.

■

Mit dem letzten Satz folgt, dass $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(\nu+1)^2}$ konvergiert, denn $\frac{1}{(\nu+1)^2} < \frac{1}{\nu(\nu+1)}$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1$ nach Satz 2.1.5.

Damit ist auch $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$ konvergent.

Der Beweis für $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6}$ übersteigt den Umfang dieser Vorlesung. Er wurde 1736 von Euler gefunden. *Mathematica* kennt die Reihensumme:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6}$$

Mit dem nächsten Satz läßt sich die Konvergenz sehr vieler Reihen nachweisen.

<u>Satz 2.1.10:</u>

Konvergenzkriterium von Leibniz
(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 – 1716)

Es sei (a_n) eine streng monoton fallende Nullfolge.
Dann konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\, a_\nu$.

Es gilt $\left|\, \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\, a_\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\, a_\nu \,\right| \le a_{n+1}$;

d.h. es existiert eine Fehlerabschätzung bei der Berechnug des Reihenwertes.

Reihen der hier betrachteten Art werden alternierende Reihen genannt.

Beweis:
Es sei $s_n := \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\, a_\nu$. Nun gilt für $k,\, n \in \mathbb{N}_0$
(*) $\quad s_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \cdots + (a_{2n} - a_{2n+1})$
und
(**) $\quad a_k - a_{k-1} > 0$.
Daher bilden die Teilsummen mit ungeraden Index eine monoton wachsende Folge.
Da
(***) $\quad s_{2n} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{2n-1} - a_{2n})$
bilden die Teilsummen mit geradem Index eine monoton fallende Folge. Weiterhin folgt aus (*) und (**), dass $0 < s_{2n+1}$, und mit (***) und (**), dass $s_{2n} < a_0$.
Außerdem gilt $0 < s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} < s_{2n} < a_0$.
Also sind die Folgen (s_{2n+1}) und (s_{2n}) monotone beschränkte Folgen, d.h. konvergent. Es bezeichne nun $s := \lim(s_{2n+1})$ und $S := \lim(s_{2n})$.
Dann folgt $S - s = \lim(s_{2n}) - \lim(s_{2n+1}) = \lim(a_{2n+1}) = 0$,
da $\quad s_{2n} - s_{2n+1} = s_{2n} - (s_{2n} - a_{2n+1}) = a_{2n+1}$
und (a_n) eine Nullfolge ist. Also ist $S = s$.

Mit $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\, a_\nu$ konvergiert auch $\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(-1)^{\nu}\, a_\nu$. Dann gilt mit

$$r_n := s_n - \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\, a_\nu = \sum_{\nu=n+1}^{\infty}(-1)^{\nu}\, a_\nu$$
$$= (-1)^{n+1}\left(a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots \right) .$$

Also folgt für den Reihenrest r_n , dass $|\, r_n \,| \le a_{n+1}$.

■

Die geometrischen Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-q)^{\nu}$ mit $0 < q < 1$ sind alternierende Reihen.
Ein weiteres, berühmtes Beispiel für alternierende Reihen ist

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \cdots = \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}}{2\nu+1} .$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{2\,\nu + 1}$$

$$\frac{\pi}{4}$$

■ 2.2 Absolute Konvergenz

Nun noch zwei Definitionen:

Definition 2.1.5:
ABSOLUTE Konvergenz, BEDINGTE Konvergenz
Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ heißt ABSOLUT konvergent, wenn die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} | a_\nu |$ konvergent ist.
Konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, aber $\sum_{\nu=0}^{\infty} | a_\nu |$ nicht, so heißt die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ BEDINGT konvergent.

Satz 2.1.11:
Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} | a_\nu |$ sei konvergent. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$.

Beweis:
Wegen $0 \leq \frac{1}{2} \left(a_\nu + | a_\nu | \right) \leq | a_\nu |$ kovergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(a_\nu + | a_\nu | \right)$ nach Satz 2.1.9 .

Wegen $0 \leq \frac{1}{2} \left(-a_\nu + | a_\nu | \right) \leq | a_\nu |$ konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(-a_\nu + | a_\nu | \right)$.

Nun gilt aber auch $a_\nu = \frac{1}{2} \left(a_\nu + | a_\nu | \right) - \frac{1}{2} \left(-a_\nu + | a_\nu | \right)$.

Also konvergiert nach Satz 2.1.7 (*iii*) auch $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$.

■

Dieser Satz wird üblicherweise kurz mit dem Cauchyschen Konvergenzkriterium bewiesen (August Louis Cauchy, 1789 - 1857, französicher Mathematiker). Nun wurde in dieser Vorlesung auf das berühmte Kriterium verzichtet. Deshalb musste für den letzten Satz ein elementarer, aber etwas längerer Beweis geliefert werden.

Satz 2.1.12:
Quotientenkriterium
Zu der Folge (a_n) existiere ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_0$ gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q .$$

Dann ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ absolut konvergent.

Beweis:
Es folgt $| a_{n_0+1} | \leq q \cdot | a_{n_0} |$, $| a_{n_0+2} | \leq q \cdot | a_{n_0+1} | \leq q^2 \cdot | a_{n_0} |$ und allgemein $| a_{n_0+k} | \leq q \cdot | a_{n_0+k-1} | \leq q^k \cdot | a_{n_0} |$ für $k \in \mathbb{N}$.
Also gilt für alle $n \geq \nu > n_0$

$$| a_\nu | \leq q^{\nu-n_0} \cdot | a_{n_0} |$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{n} | a_\nu | = \sum_{\nu=0}^{n_0} | a_\nu | + \sum_{\nu=n_0}^{n} | a_\nu | \leq \sum_{\nu=0}^{n_0} | a_\nu | + \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} \sum_{\nu=n_0}^{\infty} q^\nu .$$

Da $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu = \frac{1}{1-q}$, ist die Partialsummenfolge $\left(\sum_{\nu=0}^{n} | a_\nu | \right)$ beschränkt und monoton wachsend; also ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ absolut konvergent.

■

Ähnlich kann der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 2.1.13:
Wurzelkriterium
Zu der Folge (a_n) existiere ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_0$ gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \;.$$

Dann ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ absolut konvergent.

Mit Satz 2.1.12 folgt leicht für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$.
Später wird gezeigt, dass $e^x = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$. Die Anwendungen des Wurzelkriteriums ergeben sich nicht so leicht.

In Satz 2.1.6 wurde gezeigt, dass $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = \infty$. Nach dem Leibnizkriterium (Satz 2.1.10) konvergiert $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu}$ und es ist beweisbar, dass $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} = \ln(2)$.

Mit dieser Reihe läßt sich schön ein – für Sie hoffentlich überraschendes – Phänomen darstellen:

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + - \cdots = \ln(2) \;.$$

Nun wird diese Zeile mit $\frac{1}{2}$ multipliziert und so daruntergeschrieben:

$$\tfrac{1}{2} \qquad - \tfrac{1}{4} \qquad + \tfrac{1}{6} \qquad - \tfrac{1}{8} + - \cdots = \tfrac{1}{2} \ln(2) \;.$$

Werden die jetzt untereinanderstehenden Glieder addiert, so ergibt sich

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} + \cdots = \tfrac{3}{2} \ln(2) \;.$$

Richard Courant (1888 - 1972) bemerkt in seinem Buch *Differential- und Integralrechnung I.* Berlin: Springer Verlag, 1971, auf Seite 328 dazu:

Diese letzte Reihe läßt sich aber offenbar durch eine Umordnung aus der ursprünglichen herstellen und der Wert der Reihe hat sich dabei mit dem Faktor $\frac{3}{2}$ *multipliziert. Man kann sich leicht vorstellen, wie die Entdeckung dieses scheinbaren Paradoxons auf die Mathematiker des 18. Jahrhunderts gewirkt haben muß, welche gewohnt waren, mit unendlichen Reihen ohne Rücksicht auf ihr Konvergenzverhalten zu operieren.*

Die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu}$ konvergiert sehr "langsam". Durch einen einfachen Trick kann die schneller konvergierende Reihe mit dem Wert $\ln 2$ gebildet werden:

$$\ln(2) = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + - \cdots = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} \,,$$

bzw.

$$\ln(2) = 0 + 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + - \cdots = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)} \;.$$

Werden diese beiden Reihen gliedweise addiert, so ergibt sich:

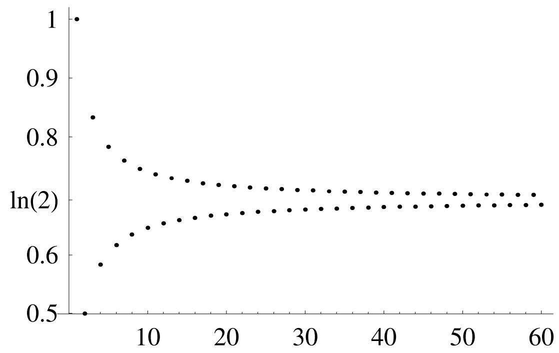
$$2\ln(2) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + - \cdots = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu(\nu-1)}\,.$$

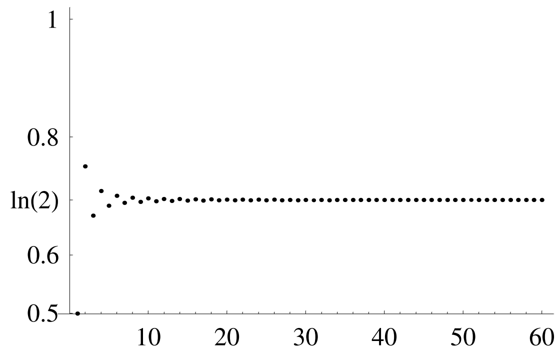
ln(2) hat ungefähr den Wert 0.6931 .

```
Log[2.]

0.693147

N[Log[2], 17]

0.69314718055994531
```

Im linken Diagramm sind die ersten 60 Partialsummen

von $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}$ und im rechten die von $\frac{1}{2}\left(1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu(\nu-1)}\right)$ dargestellt. Damit werden die unterschiedlichen Konvergenzgeschwindigkeiten deutlich.





■ 2.3 Bedingte Konvergenz und Umordnungen

Ohne Beweise seien noch die beiden folgenden Sätze angeführt:

Satz 2.1.14:
Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ sei konvergent. Es seien

$$a_\nu^+ := \begin{cases} a_\nu, & \text{falls } a_\nu > 0 \\ 0\;, & \text{falls } a_\nu \leq 0 \end{cases},$$

$$a_\nu^- := \begin{cases} -a_\nu, & \text{falls } a_\nu < 0 \\ 0\;, & \text{falls } a_\nu \geq 0 \end{cases}.$$

Dann gilt $a_\nu = a_\nu^+ - a_\nu^-$.

Ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ absolut konvergent, so sind es auch die Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^+$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^-$.

Ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ bedingt konvergent, so gilt $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^+ = \infty$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^- = \infty$.

Es ist beweisbar, daß eine bedingt konvergente Reihe so umgeordnet werden kann, daß sie zu einem beliebig vorgesehenen Wert konvergiert.

Satz 2.1.15:
Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ sei bedingt konvergent. Es sei $\sigma \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gibt es eine Umordnung u der Indices, also eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{u(\nu)} = \sigma \; .$$

Ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ absolut konvergent, so gilt für jede Umordnung u

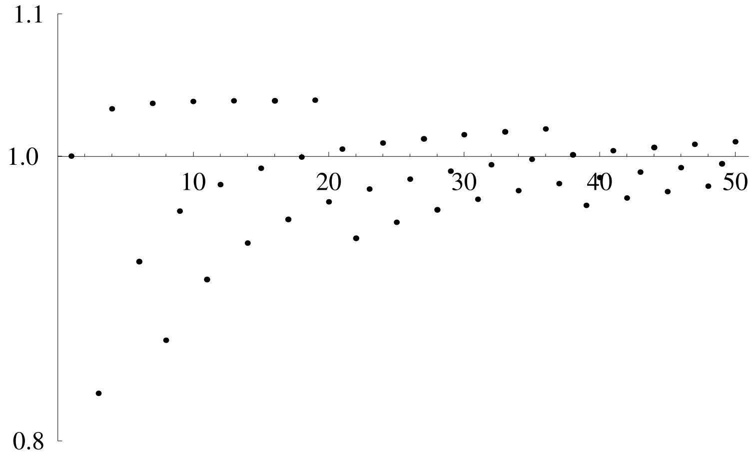
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{u(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \; .$$

Der erste Teil dieses Satzes soll an drei Beispielen mit der alternierenden harmonischen Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}$ verdeutlicht werden.

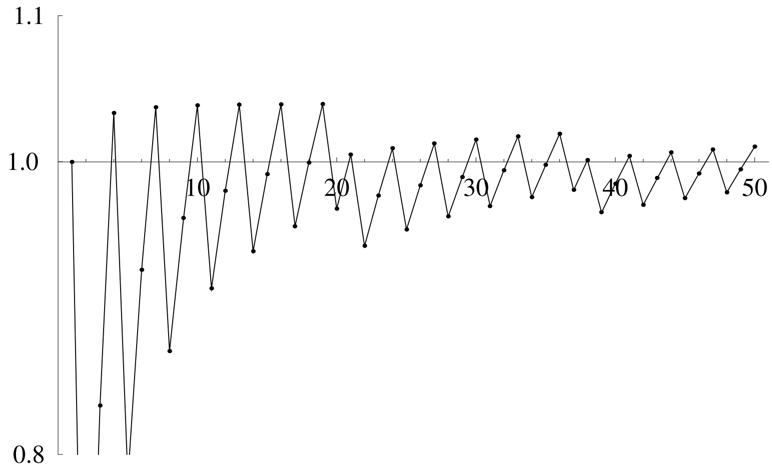
Für die Grafiken und Anfangsstücke der Reihen wurden Teile des *Mathematica*-Programms `Harmonic-Rearrangement` benutzt. Siehe die Seiten 241 ff. bei Ed Packel, Stan Wagon: *Animating Calculus*. New York: Springer, 1996. 0-387-94748-5

Zuerst eine Umordnung zum Wert 1.

```
HarmonicRearrangement[1]

The rearranged series: 1 - 1/2 + 1/3 + 1/5 - 1/4 + 1/7 + 1/9 - 1/6 + 1/11 + 1/13 - 1/8 + 1/
  15 + 1/17 - 1/10 + 1/19 + 1/21 - 1/12 + 1/23 + 1/25 - 1/14 + 1/27 - 1/16 + 1/29 + 1/
  31 - 1/18 + 1/33 + 1/35 - 1/20 + 1/37 + 1/39 - 1/22 + 1/41 + 1/43 - 1/24 + 1/45 + 1/
  47 - 1/26 + 1/49 - 1/28 + 1/51 + 1/53 - 1/30 + 1/55 + 1/57 - 1/32 + 1/59 + 1/61 - 1/
  34 + 1/63 + 1/65 - 1/36 + 1/67 + 1/69 - 1/38 + 1/71 + 1/73 - 1/40 + 1/75 - 1/42 +
  1/77 + 1/79 - 1/44 + 1/81 + 1/83 - 1/46 + 1/85 + 1/87 - 1/48 + 1/89 + 1/91 - 1/50
```

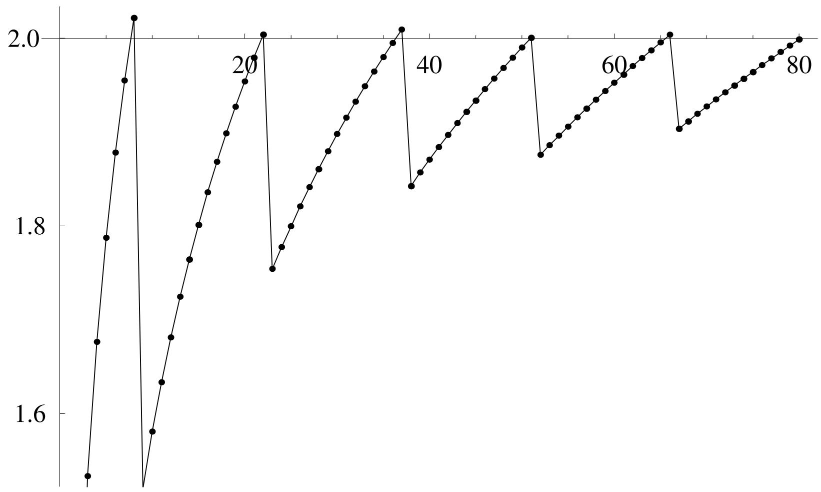


Diese erste grafische Darstellung wirkt etwas verwirrend. Werden die benachbarten Werte der Partialsummenfolge miteinander verbunden, so wird die Darstellung übersichtlicher:

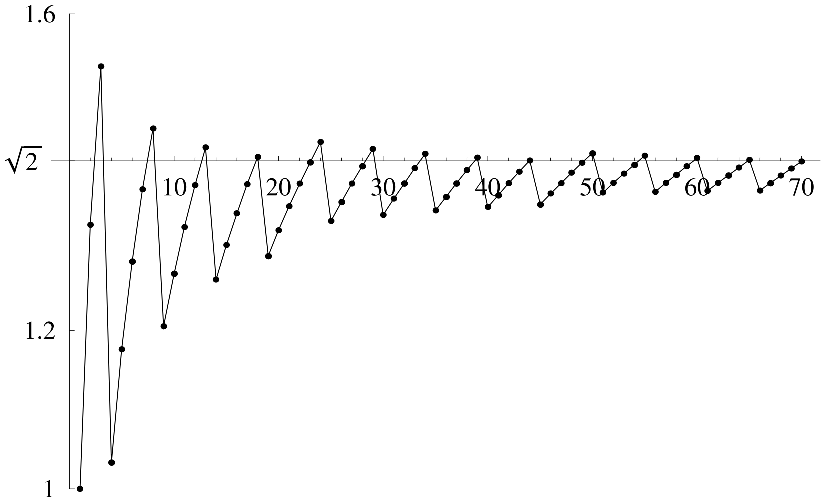


Die entsprechenden Umordnungen für 2 und $\sqrt{2}$ und die dazugehörigen Grafiken:

```
HarmonicRearrangement[ 2 ];

The rearranged series: 1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9 + 1/11 + 1/13 + 1/15 - 1/2 + 1/17 + 1/19 + 1/
  21 + 1/23 + 1/25 + 1/27 + 1/29 + 1/31 + 1/33 + 1/35 + 1/37 + 1/39 + 1/41 - 1/4 + 1/43 +
  1/45 + 1/47 + 1/49 + 1/51 + 1/53 + 1/55 + 1/57 + 1/59 + 1/61 + 1/63 + 1/65 + 1/67 +
  1/69 - 1/6 + 1/71 + 1/73 + 1/75 + 1/77 + 1/79 + 1/81 + 1/83 + 1/85 + 1/87 + 1/89 + 1/
  91 + 1/93 + 1/95 - 1/8 + 1/97 + 1/99 + 1/101 + 1/103 + 1/105 + 1/107 + 1/109 + 1/111 +
  1/113 + 1/115 + 1/117 + 1/119 + 1/121 + 1/123 - 1/10 + 1/125 + 1/127 + 1/129 + 1/131 +
  1/133 + 1/135 + 1/137 + 1/139 + 1/141 + 1/143 + 1/145 + 1/147 + 1/149 + 1/151 - 1/12
```




```
HarmonicRearrangement[ √2 ]

The rearranged series: 1 + 1/3 + 1/5 - 1/2 + 1/7 + 1/9 + 1/11 + 1/13 - 1/4 + 1/15 + 1/17 + 1/
  19 + 1/21 - 1/6 + 1/23 + 1/25 + 1/27 + 1/29 - 1/8 + 1/31 + 1/33 + 1/35 + 1/37 + 1/39 -
  1/10 + 1/41 + 1/43 + 1/45 + 1/47 - 1/12 + 1/49 + 1/51 + 1/53 + 1/55 - 1/14 + 1/57 + 1/
  59 + 1/61 + 1/63 - 1/16 + 1/65 + 1/67 + 1/69 + 1/71 - 1/18 + 1/73 + 1/75 + 1/77 + 1/
  79 + 1/81 - 1/20 + 1/83 + 1/85 + 1/87 + 1/89 - 1/22 + 1/91 + 1/93 + 1/95 + 1/97 - 1/
  24 + 1/99 + 1/101 + 1/103 + 1/105 - 1/26 + 1/107 + 1/109 + 1/111 + 1/113 + 1/115 - 1/28
```



Das Konstruktionsprinzip für die Umordnungen ist im Grunde einfach. Sei der "Zielwert" $\sigma > 0$. Dann werden solange die ersten a_ν^+ addiert, bis σ zum ersten Mal "übertroffen" wird. Nun werden solange die ersten a_ν^- subtrahiert, bis die Summe insgesamt σ "unterschreitet". Jetzt werden wieder die nächsten a_ν^+ addiert, bis σ wieder überschritten wird, dann wird wieder subtrahiert usw., usw. .

Da $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^+ = \infty$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^- = \infty$, können nach jedem Schritt immer noch a_ν^+ und a_ν^- für den weiteren Prozess gefunden werden.

■ 2.4 Dezimalbruchentwicklungen

Wir sind es gewohnt reelle Zahlen als Dezimalbrüche darzustellen: $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$, $-\frac{1}{4} = -0.25$, etc..

Die in dieser Vorlesung bewiesenen Sätze über unendliche Reihen ermöglichen jetzt die

<u>Definition 2.1.6:</u>
DEZMALBRUCH, DEZIMALBRUCHENTWICKLUNG
Es sei $Z \in \mathbb{N}_0$ und (z_n) sei eine Folge natürlicher Zahlen mit $z_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Das Symbol $Z, z_1 z_2 z_3 \ldots := Z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{10^n}$ heißt DEZMALBRUCH oder DEZIMALBRUCHENTWICKLUNG der dargestellten reellen Zahl $Z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{10^n}$.
Nach Satz 2.1.4 konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ und damit nach Satz 2.1.8 auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{10^n}$.

Statt eines "Dezimalkommas" wird in diesem Skript meist ein "Dezimalpunkt" verwendet.

Mit Satz 2.1.4 ist auch eine sinnvolle Interpretation des Symbols $0.\overline{3}$ möglich, denn es steht für

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{3}{1-\frac{1}{10}} - 3 = \frac{3}{\frac{9}{10}} - 3 = \frac{10}{3} - \frac{9}{3} = \frac{1}{3} \ .$$

Analog folgt

$$0.999\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{1-\frac{1}{10}} - 9 = 10 - 9 = 1 \ .$$

<u>Definition 2.1.7:</u>
ENDLICHER DEZMALBRUCH, PERIODISCHER DEZIMALBRUCH
Der Dezimalbruch $Z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{10^n}$ heißt ENDLICH, falls es ein n_0 gibt, so dass für alle $n > n_0$ gilt $z_n = 0$.
Ein Dezimalbruch mit sich periodisch wiederholender Ziffernfolge, heißt PERIODISCHER Dezimalbruch.

Überlegen Sie sich, wie die Dezimalbruchentwicklungen für negative, reelle Zahlen gebildet werden können.

Wie eben am Beispiel $0.\overline{9} = 1$ deutlich wurde, gibt es reelle Zahlen, die zwei Dezimalbruchentwicklungen haben.

Am Beispiel von $\sqrt{2}$ soll nun das Prinzip verdeutlicht werden, mit dem eine Dezimalbruchentwicklung einer Zahl gefunden werden kann:

$\sqrt{2}$ muß größer Eins und kleiner Zwei sein. Also werden die Quadrate von 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 berechnet: 1.21, 1.44, 1.69, 1.96, 2.25.
Daraus folgt $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$.
Nun wieder das gleiche Verfahren: Die Quadrate von 1.41, 1.42 sind 1.9881, 2.0164.
Daraus folgt $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$.
Die Quadrate von 1.411, 1.412, 1.413, 1.414, 1.415 sind 1.99092, 1.99374, 1.99657, 1.9994, 2.00222.
Also ist $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$.
Usw., etc.

Die ersten 100 Kommastellen von $\sqrt{2}$:

```
w2 = N[√2, 100]
```

```
1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679737990732478462107038
 8503875343276415 73
```

```
NumberForm[w2, DigitBlock → 3, NumberSeparator -> " "]
```

```
1.414 213 562 373 095 048 801 688 724 209 698 078 569 671 875 376
  948 073 176 679 737 990 732 478 462 107 038 850 387 534 327 641 573
```

Die Regeln für die Addition von Dezimalbrüchen sind für endliche Dezimalbrüche einfach, erheblich komplizierter jedoch für periodische, wie die folgenden Beispiele zeigen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0.\overline{3} & + & 0.1\overline{6} & = & 0.5 & = & \frac{1}{3}+\frac{1}{6} \quad , \\ 0.\overline{1} & + & 0.\overline{9} & = & 1.\overline{1} & = & \frac{1}{9}+1 \quad , \\ 0.\overline{0714285} & + & 0.\overline{428571} & = & 0.5 & = & \frac{1}{14}+\frac{6}{14} \quad . \end{array}$$

```
N[1/14, 17]
```

```
0.071428571428571429
```

```
N[6/14, 17]
```

```
0.42857142857142857
```

```
0.3 + 0.16 - 0.5
```

```
-0.04
```

```
0.1 + 0.9 - 10/9
```

```
-0.111111
```

```
0.0714285 + 0.428571 - 0.5
```

$-5.\times 10^{-7}$

■ 2.5 Eine Reihendarstellung von e

als krönender Abschluss dieses Kapitels Reihen ein kurzer Satz mit einem längeren Beweis:

Satz 2.1.16:

$$\lim_{n\to\infty} (1+\tfrac{1}{n})^n = \lim\left((1+\tfrac{1}{n})^n \right) = e = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tfrac{1}{\nu!} \ .$$

Beweis:

Nach Satz 1.2.13 ist e definiert als $\lim\left((1+\frac{1}{n})^n \right)$.

Der weitere Beweis gliedert sich in mehrere Schritte.

==

Zuerst soll

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \leq 3$$

gezeigt werden.

==

Für $\nu \geq 3$ gilt $\quad \nu \neq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu > 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{\nu-1}$.

Daher folgt für $n \geq 3$

$$\begin{aligned} s_n := \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &< 1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 \ . \end{aligned}$$

Also gilt für alle n , dass $s_n < 3$, also ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \leq 3$, und die Reihe konvergiert.

Es sei vorläufig $E := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}$.

==

Für $n \geq 3$ soll nun

$$s_n > (1 + \tfrac{1}{n})^n > s_n - \frac{3}{2\,n}$$

gezeigt werden.

==

Im Grenzwert folgt aus dieser Ungleichung

$$E = \lim(s_n) \geq \lim\left((1 + \tfrac{1}{n})^n \right) = e \geq \lim(s_n - \tfrac{3}{2\,n}) = \lim(s_n) \ = E \ ,$$

also $E \geq e \geq E$, d.h. $e = E$.

==

Nun ist

$$\begin{aligned} (1 + \tfrac{1}{n})^n \ &= 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} + \cdots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{n \cdot 1}{1 \cdot n} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot n \cdot 2 \cdot n} + \cdots + \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot n \cdot 2 \cdot n \cdot 3 \cdot n \ \cdots \ k \cdot n} + \cdots + \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{1 \cdot n \cdot 2 \cdot n \cdots n \cdot n} \\ &= \ 1 + 1 + \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \ \cdots \ \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \ \cdots \ \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n!} \\ &= \ 1 + 1 + \quad \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2!} \quad + \cdots + \quad \frac{n-1}{n} \ \cdots \ \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{1}{k!} \quad + \cdots + \quad \frac{n-1}{n} \ \cdots \ \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n!} \\ &= \ 1 + 1 + \ (1 - \tfrac{1}{n}) \cdot \tfrac{1}{2!} + \cdots + (1 - \tfrac{1}{n}) \cdot (1 - \tfrac{2}{n}) \cdots (1 - \tfrac{k-1}{n}) \cdot \tfrac{1}{k!} + \cdots + (1 - \tfrac{1}{n}) \cdots (1 - \tfrac{n-1}{n}) \ \tfrac{1}{n!} \end{aligned}$$

$$(*) \qquad = \ 2 + \sum_{k=2}^{n} (1 - \tfrac{1}{n}) \cdot (1 - \tfrac{2}{n}) \cdots (1 - \tfrac{k-1}{n}) \cdot \frac{1}{k!}$$

$$< \ 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \ ,$$

da $0 < (1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}) < 1$.

Andererseits gilt $(1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n}) \ = \ 1 - \frac{1+2}{n} + \frac{2}{n^2} > 1 - \frac{1+2}{n}$

und damit $(1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n})(1 - \frac{3}{n}) > (1 - \frac{1+2}{n})(1 - \frac{3}{n}) = 1 - \frac{1+2+3}{n} + \frac{9}{n^2} > 1 - \frac{1+2+3}{n}$.

So ist induktiv leicht zu beweisen, dass für $k > 2$ gilt:

$$\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\tfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\tfrac{k-1}{n}\right) > 1-\frac{1+2+3+\cdots+(k-1)}{n} > 1-\frac{k(k-1)}{2n}\ .$$

Mit (*) folgt für $n > 2$

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n > 2+\sum_{k=2}^{n}\left(1-\frac{k(k-1)}{2n}\right)\frac{1}{k!} \;=\; 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{k\cdot(k-1)}{1\cdot 2\cdots(k-1)\cdot k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!} \;=\; \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}$$

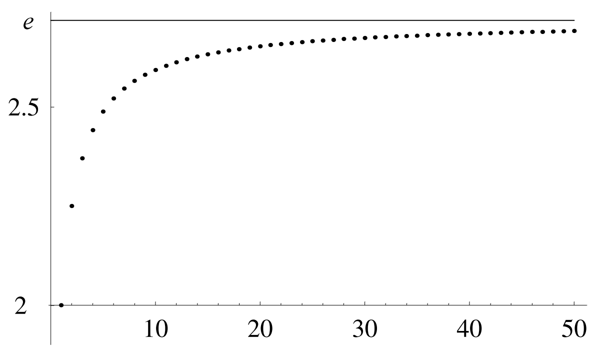
$$\geq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{3}{2n}\ ,$$

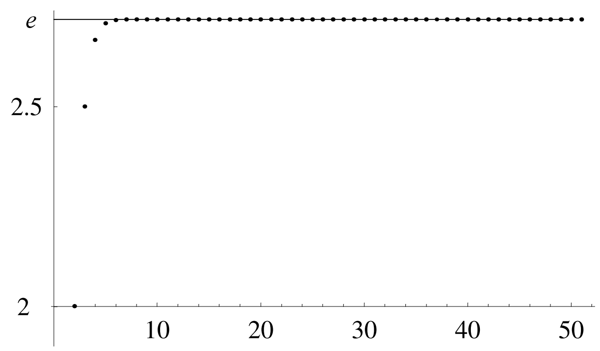
da wie oben gezeigt $\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} \leq 3$.

■ ■ ■

Die nächsten beiden Grafiken zeigen die Anfangsstücke der Folgen

$$\left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\right) \text{ und } \left(\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}\right)\ .$$





Nachdem nun auch in dieser Vorlesung – wie es sich gehört – $\lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = e = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}$ "ordentlich" bewiesen ist, noch eine Bemerkung zu der Vergänglichkeit der Erkenntnis:

Eine Herausforderung an den Mathematiker, die von keinem Computer bewältigt werden kann, ist dagegen die Behauptung, daß

$$\left\langle\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\right\rangle_{n\in\mathbb{N}} \;\textit{und}\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

denselben Grenzwert besitzen.

Heute bewältigt dieser Computer mit *Mathematica* diese Herausforderung ganz locker:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$\mathbb{e}$

Das ist der *Mathematica*–Ausdruck für e .

$$\texttt{Limit}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},\ n\to\infty\right]$$

e

Zur Überprüfung der beiden Ausdrücke und um auch noch die Zeit zu messen, die *Mathematica* auf diesem Computer braucht, die nächste Eingabe:

$$\texttt{Timing}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} == \texttt{Limit}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},\ n\to\infty\right]\right]$$

{0.01 Second, True}

Das obige Zitat findet sich im Jahre 1983 auf Seite 77 bei: Werner Blum, Günter Törner: *Didaktik der Analysis*. Göttingen: Vandenhoeck&Ruprecht, 1983. 3-525-40545-6.