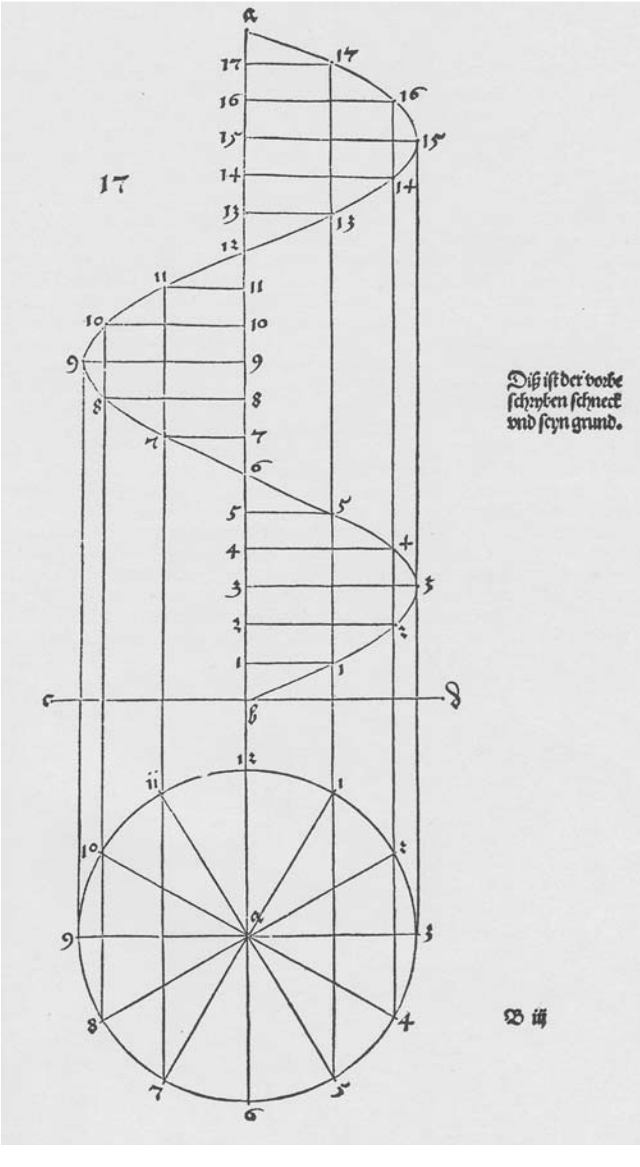
■ 3. Die trigonometrischen Funktionen

Materialien zur Vorlesung **Elementare Analysis**, Wintersemester 2003 / 4



Diß ist der vorbeschryben schneck vnd seyn grund.

Aus: Abrecht Dürer: Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit.
Nürnberg: 1525. Nachdruck: Nördlingen: Verlag Dr. Alfons Uhl, 2000. 3-921503-17-5

Anschaulich lassen sich die trigometrischen Funktionen leicht definieren. Zwei Begriffe führen in dem Zusammenhang jedoch oft zu Verwirrungen: Grad und Bogenmaß. Mit einem Winkelmesser haben Sie schon Winkel in *Grad* gemessen. Die Winkelfunktionen sollen auf den reellen Zahlen definiert werden und zwar mit dem Argument *Bogenmaß*.
Wir haben zu Beginn der Vorlesung ein Verfahren kennengelernt, mit dem die Länge des Einheitskreises, also 2π , nummerisch angenähert werden kann. Das *Bogenmaß* des *vollen* Kreises ist also 2π und dem *vollen* Winkel entsprechen $360°$. Was bedeutet nun ° ? Sie kennen z.B. die Zeichen % , ‰ . Das sind Symbole für reelle Zahlen,

nämlich für 1/100 bzw. 1/1000 . Analog verhält es sich mit mit dem Symbol $\circ$.

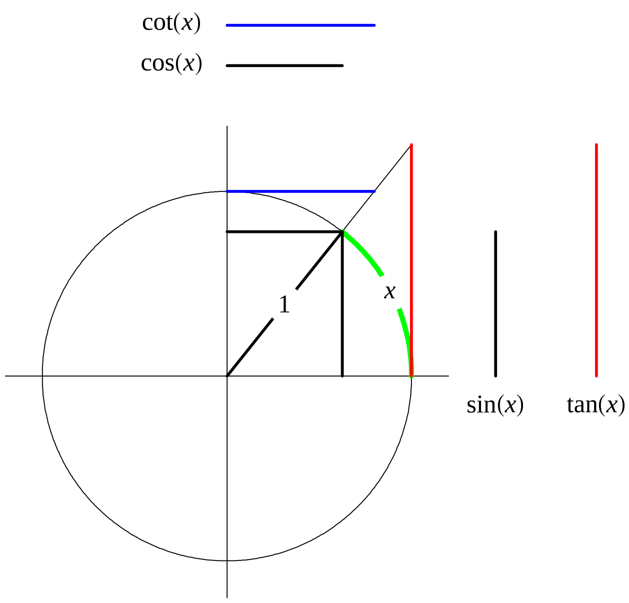
Da $\quad 360^\circ = 2\pi$,

folgt $\quad \circ = \frac{\pi}{180}$ ($\approx 0.01745 \ldots$) .

$\circ$ ist also eine spezielle mathematische Konstante.

Nun zu den anschaulichen Definitionen der trigonometrischen Funktionen, also der Winkelfunktionen.

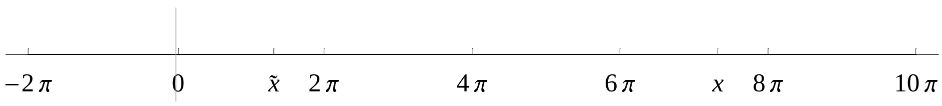
Im ersten Quadranten, also für $0 < x < \frac{\pi}{2}$, werden die reellen Funktionen SINUS (: sin), COSINUS (: cos), TANGENS (: tan) und COTANGENS (: cot) mit Hilfe der folgende Grafik definiert:



Der Strahlensatz liefert die Beziehungen

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \ , \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \ ;$$

also auch $\tan(x) = \frac{1}{\cot(x)}$.



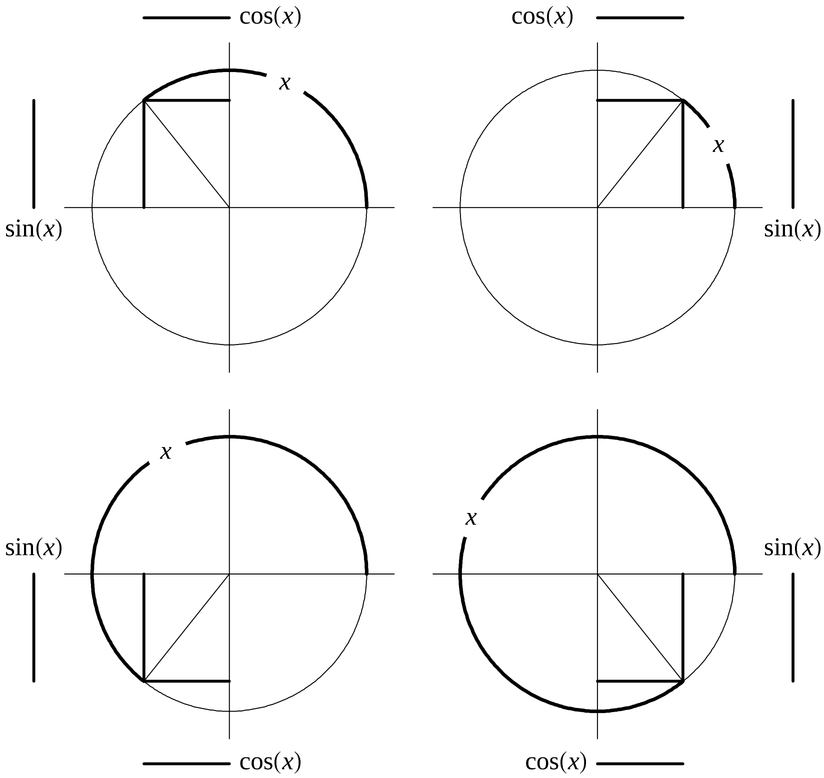
Für $x = 0$ seien $\sin(0) := 0$, $\cos(0) := 1$ und für $x = \frac{\pi}{2}$ seien $\sin(\frac{\pi}{2}) := 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) := 0$.

Deshalb seien $\tan(0) := 0$ und $\cot(\frac{\pi}{2}) := 0$. Die Funktion tan ist für $\frac{\pi}{2}$ und die Funtion cot für 0 nicht definiert!

Weiterhin folgt $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Nicht verschwiegen werden soll, dass bei dieser Definition die Schwierigkeiten in der Messung der Bogenlänge versteckt sind.

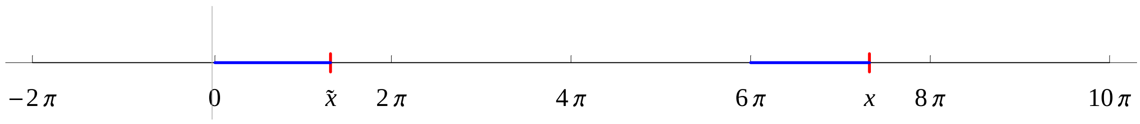
Für den zweiten, dritten und vierten Quadranten, also für $x \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi]$, werden dann die Funktionen Sinus und Cosinus mit Hilfe der folgenden Grafiken erklärt:



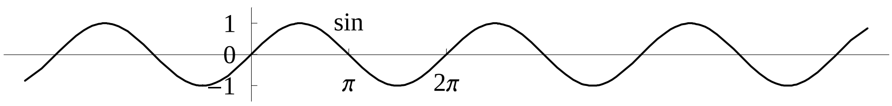
Damit sind die Funktionen Sinus und Cosinus insgesamt für $x \in [0,\ 2\pi]$ definiert.

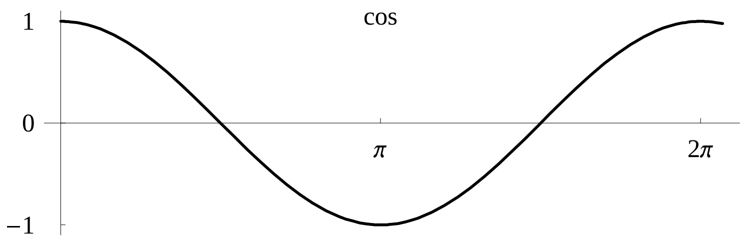
Die letzten Grafiken motivierten auch die Beziehungen

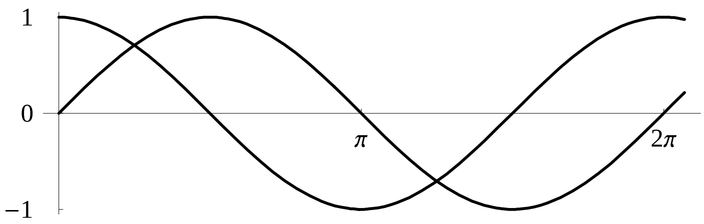
$$\sin(x) = -\sin(-x)\ ,\ \cos(x) = \cos(-x)\ .$$



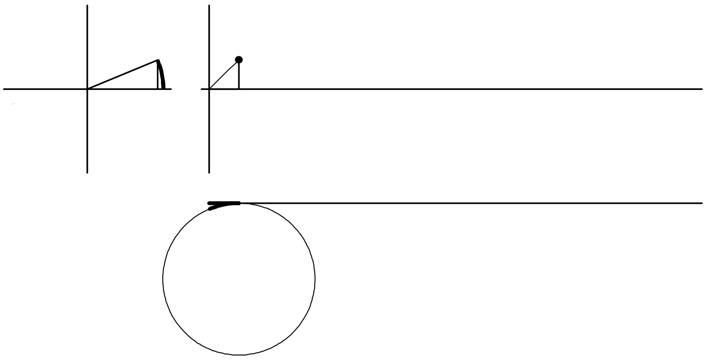
Für $x \in \mathbb{R} \setminus [0,\ 2\pi]$ lassen sich nun die Funktionen Sinus und Cosinus definieren durch "periodische Fortsetzung". Es seien $\tilde{x}$ und $k \in \mathbb{Z}$ so gewählt, dass $k \neq 0$, $\tilde{x} \in [\ 0, 2\pi\ [$ und $x = \tilde{x} + 2k\pi$.
Dann sei $\sin(x) := \sin(\tilde{x})$.



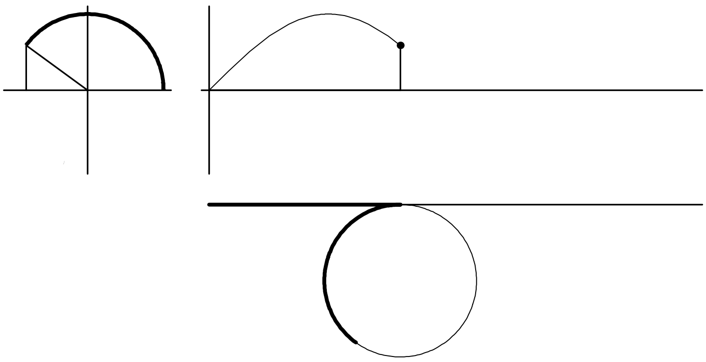




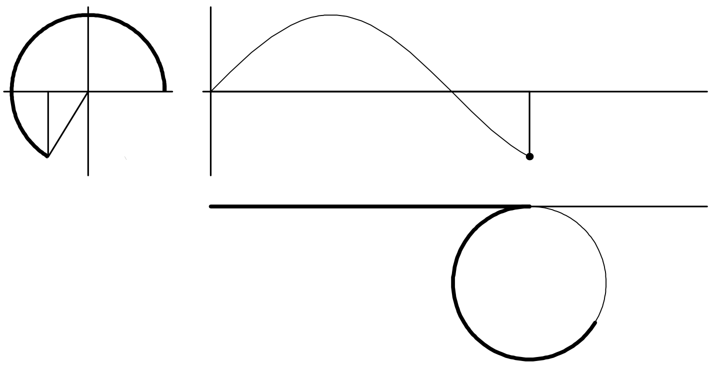
Nun vier Bilder aus der Animation Sinusentwicklung:

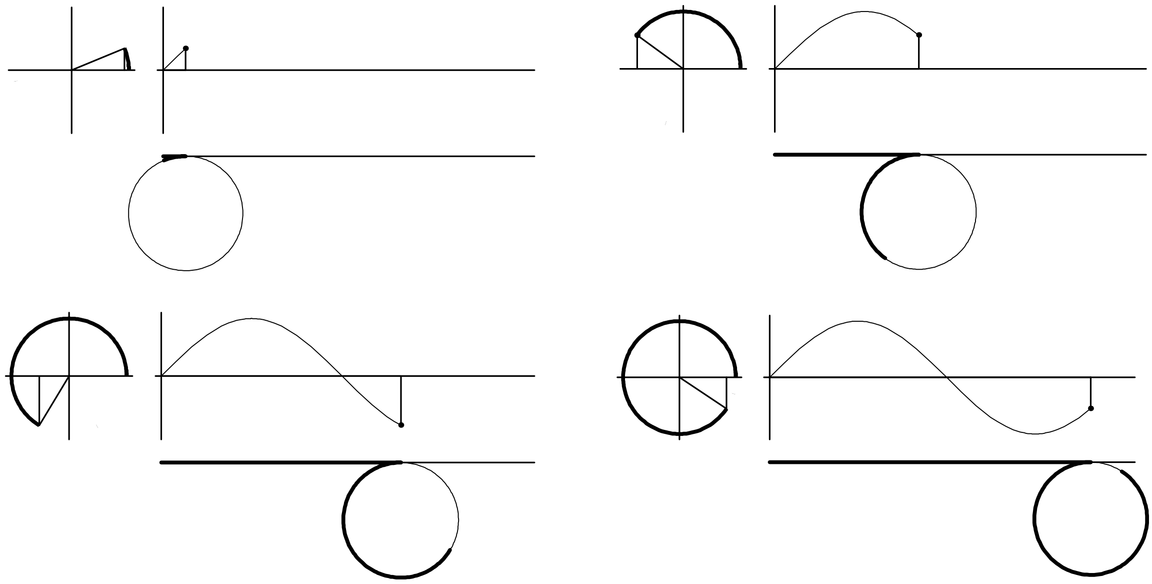


```
pse2 = se[ 4Pi/5 ];
```



```
pse3 = se[ 7Pi/6+0.5 ];
```





An den ersten Grafiken dieses Abschnittes läßt sich noch erkennen

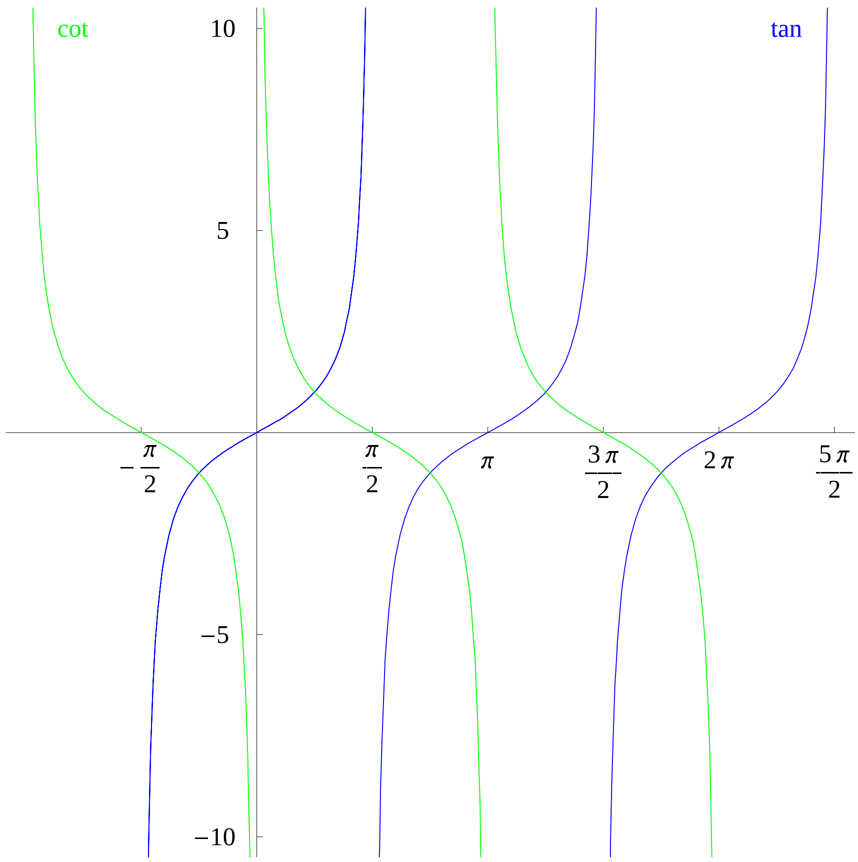
$$\begin{aligned} \sin(x) &= \cos(\tfrac{\pi}{2} - x) \quad , \\ \sin(\tfrac{\pi}{2} + x) &= \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) \quad , \\ \cos(\tfrac{\pi}{2} + x) &= -\sin(x) \quad . \end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ wobei $n \in \mathbb{Z}$, sei nun definiert

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad ,$$

und für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ sei definiert

$$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad .$$



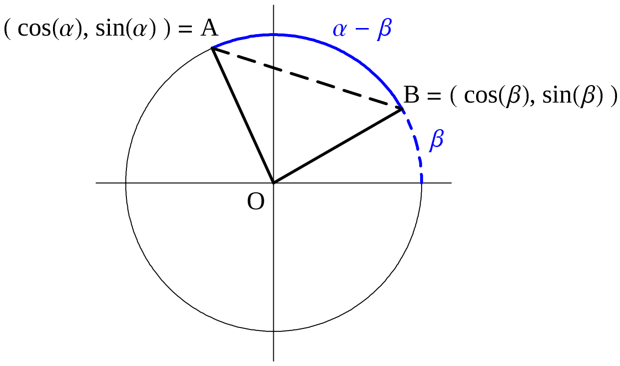
Einige geometrisch einfach berechenbare Werte der trigonometrischen Funktionen:

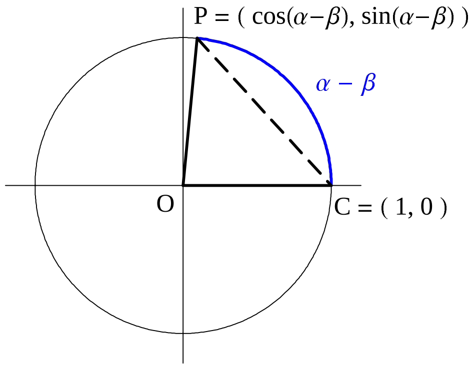
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\neg$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot	$\neg$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\neg$

Für das weitere Vorgehen werden noch die Additionstheoreme von sin und cos gebraucht, es seien $x,\ y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \ , \\
\sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \ , \\
\\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \ , \\
\cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \ .
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung läßt sich mit Hilfe der nächsten Grafiken plausibel machen:





Auf dem Einheitskreis liegen die Punkte A und B

$$A := (\cos(\alpha),\ \sin(\alpha))\ ,\ B := (\cos(\beta),\ \sin(\beta))\ .$$

Das Dreieck AOB der linken Figur ist kongruent zu dem Dreieck POC in der rechten Figur. Also ist der Abstand von A nach B gleich dem Abstand von C nach P.
Daraus folgt

$$\begin{aligned} d(A,B)^2 &= (\cos(\alpha)-\cos(\beta))^2 + (\sin(\alpha)-\sin(\beta))^2 \\ &= \cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos^2(\beta) + \sin^2(\alpha) - 2\sin(\alpha)\sin(\beta) + \sin^2(\beta) \\ &= 2 - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) - 2\sin(\alpha)\sin(\beta)\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(C,P)^2 &= (1-\cos(\alpha-\beta))^2 + (0-\sin(\alpha-\beta))^2 \\ &= 1 - 2\cos(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) + \sin^2(\alpha-\beta) \\ &= 2 - 2\cos(\alpha-\beta)\ . \end{aligned}$$

Wegen $d(A,B)^2 = d(C,P)^2$ folgt

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\ .$$

Ersetzen von β durch $-\beta$ ergibt

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(-\beta) + \sin(\alpha)\sin(-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\ ,$$

da cos eine gerade bzw. sin eine ungerade Funktion ist.

Mit $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ folgt

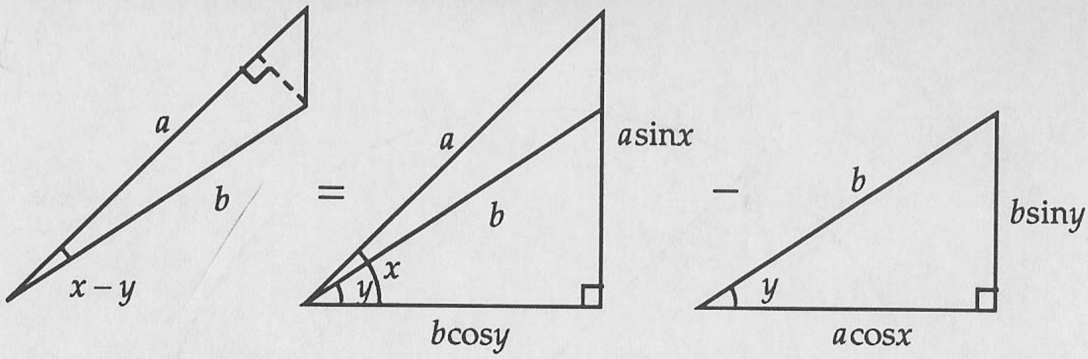
$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \cos(\tfrac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)) = \cos((\tfrac{\pi}{2}-\alpha) - \beta) \\ &= \cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)\cos(\beta) + \sin(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)\sin(\beta) \\ &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\ . \end{aligned}$$

Wird darin nun β durch $-\beta$ ersetzt, so folgt

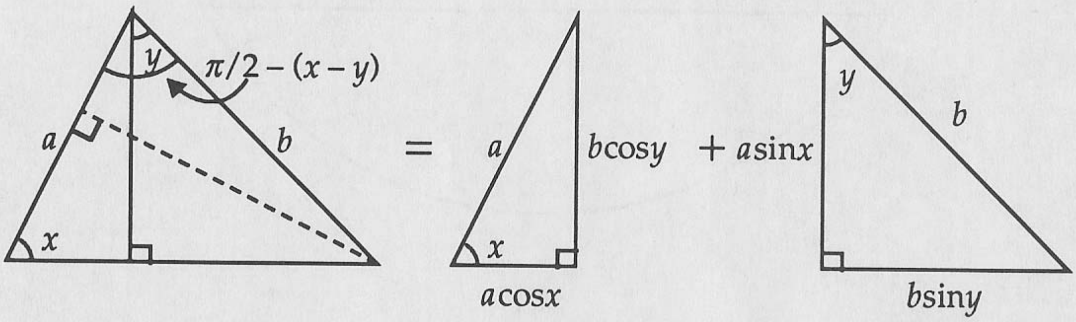
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(-\beta) + \cos(\alpha)\sin(-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)\ .$$

Eine andere Herleitung der Additionstheoreme motivieren die folgenden Grafiken.

Aus: Roger B. Nelson: *Proofs without Words. Exercises in Visual Thinking.*
Washington: The Mathematical Association of America, 1993, 0-88385-700-6. Seite 30.



$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$



$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$