■ 4. Differenzierbarkeit, Stetigkeit

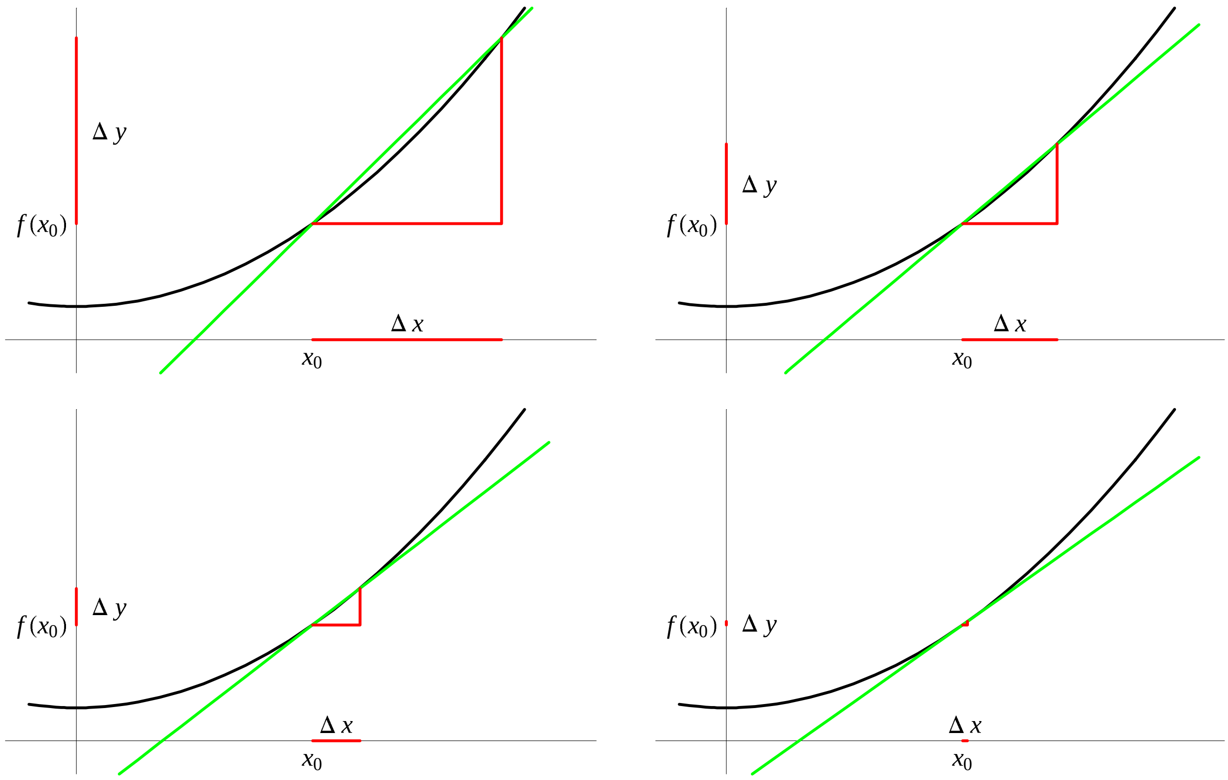
Materialien zur Vorlesung **Elementare Analysis**, Wintersemester 2003 / 4

Historisch ist der Begriff der Differenzierbarkeit lange vor dem der Stetigkeit entwickelt worden. Unterschiedliche Definitionen der Differenzierbarkeit werden von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) und Isaac Newton (1642 – 1727), einem englischen Phyiker und Mathematiker, gegeben.

Die Definition der Stetigkeit, wie sie heute gebräuchlich ist, verbindet sich mit Namen wie Augustin Louis Cauchy, 1789 – 1857, und Karl Weierstraß, 1815 – 1897. H. Heuser schreibt in seinem Lehrbuch der Analysis I (Stuttgart: Teubner, 1982. 3-519-12221-9) auf Seite 156: *Karl Weierstraß [   ]: Auf ihn geht die "Epsilontik" zurück, ohne die wir uns heutzutage die Analysis nicht mehr denken können.*
Auch hier soll Stetigkeit im Zusammenhang mit Differenzierbarkeit motiviert werden. Daher zu Beginn die klassischen Fragestellungen: Wie kann eine Tangente an eine Kurve berechnet werden? Was sind die Änderungsraten bei einer Funktion?

Erinnert sei nochmals an einige Bilder aus einer Animation

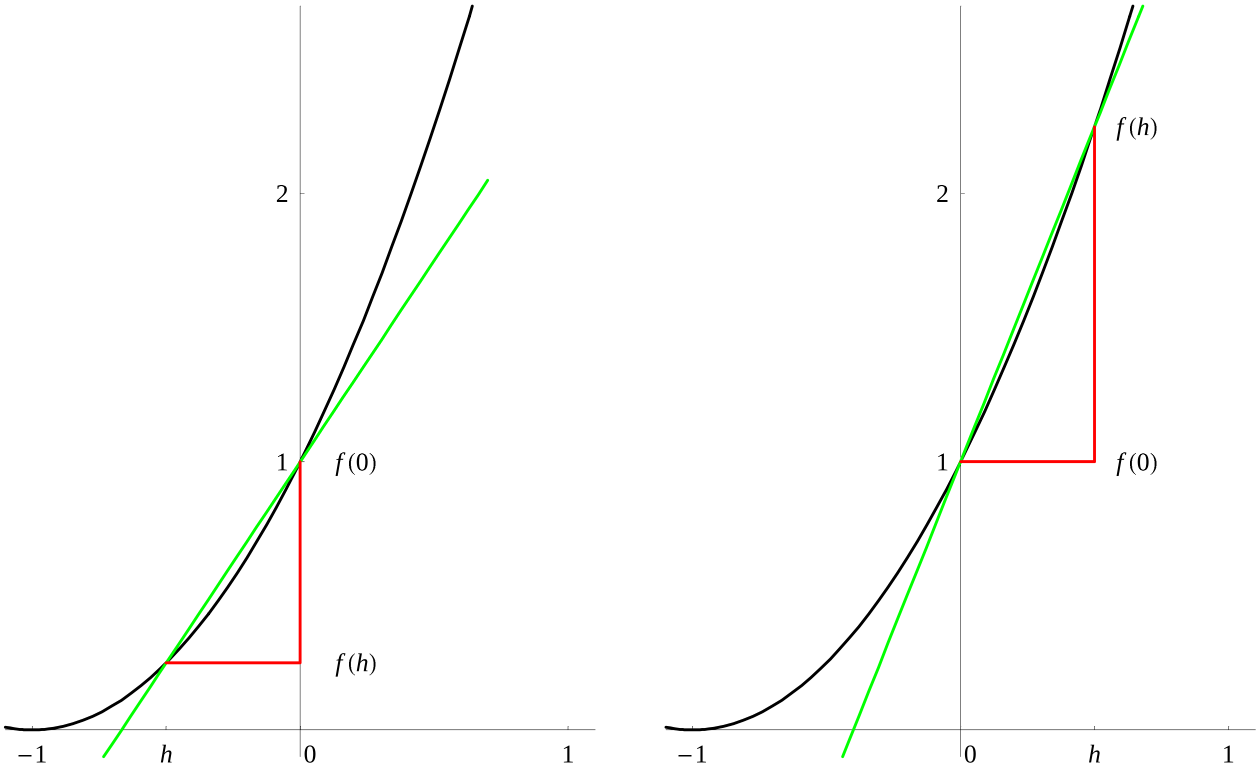
Sekantensteigung



Nun betrachten wir die Funktion $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := (1+x)^2$ an der Stelle $x_0 := 0$.
Die Steigungen zweier Sekanten durch den Punkt $(0, 1) = (0, f(0))$ können mit Hilfe der Steigungsdreiecke in den beiden folgenden Grafiken bestimmt werden.

Es sei $h < 0$, dann ergibt das linke Steigungsdreieck:

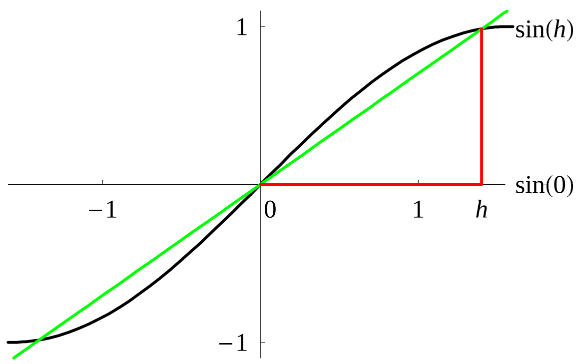
$$m_-(h) := \frac{f(0) - f(h)}{0 - h} = \frac{1 - (h+1)^2}{-h} = \frac{-h^2 - 2h}{-h} = 2 + h \ .$$



Es sei $h > 0$. Das rechte Steigungsdreieck liefert:

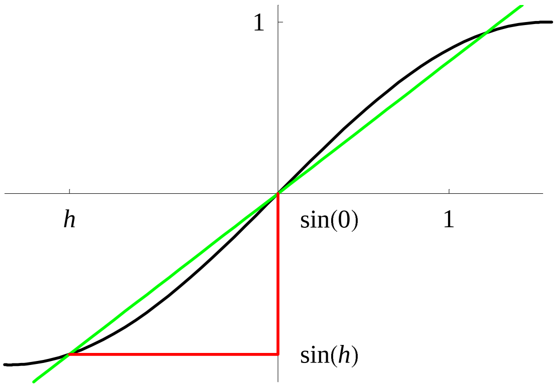
$$m_+(h) := \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \frac{(h+1)^2 - 1}{h} = \frac{h^2 + 2h}{h} = 2 + h \, .$$

Also ist sowohl links wie rechts von Null die Steigung der Sekante $2 + h$. Geometrisch "gehen" die Sekanten in die Tangente über, wenn $h = 0$. Die Tangentensteigung im Punkt $(0, 1)$ an den Graph von f ist also 2 .
Nun soll das gleiche Schema bei der Sinusfunktion versucht werden. Es sei also $f(x) := \sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $x_0 = 0$.
Zuerst sei $h > 0$.



Dieses Steigungsdreieck liefert:

$$m_+(h) := \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \frac{\sin(h) - \sin(0)}{h} = \frac{\sin(h)}{h} \ .$$

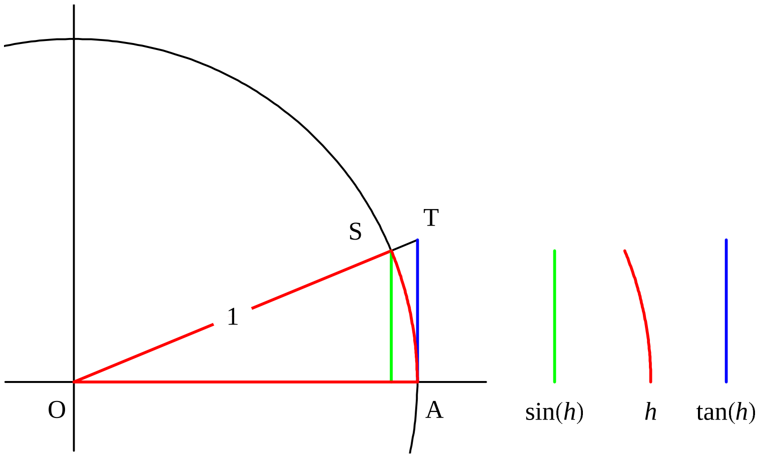


Dieses Steigungsdreieck liefert:

$$m_-(h) := \frac{f(0) - f(h)}{0 - h} = \frac{\sin(0) - \sin(h)}{-h} = \frac{\sin(h)}{h} \ .$$

Wieder sind die Terme für $m_+(h)$ und $m_-(h)$ gleich. Doch kann in dem Ausdruck $\frac{\sin(h)}{h}$ jetzt h nicht einfach Null gesetzt werden!

Die klassische Grafik um $\frac{\sin(h)}{h}$ abzuschätzen, sollte so aussehen:



Dann folgt mit

$\delta(A, S)$:= Flächeninhalt des Dreiecks A O S ,
$\delta(A, T)$:= Flächeninhalt des Dreiecks A O T ,
$\kappa(A, S)$:= Flächeninhalt des Kreissektors A O S

die Ungleichung

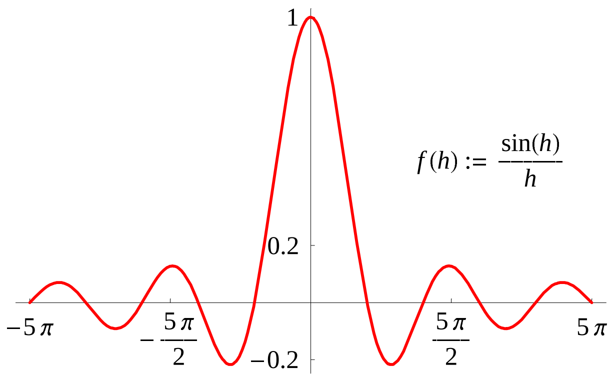
$$\delta(A, S) < \kappa(A, S) < \delta(A, T) \ .$$

Nun gilt $\delta(A, S) = \frac{\sin(h)}{2}$, und da $r = 1$, $\kappa(A, S) = \frac{h}{2\pi} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{h}{2}$, $\delta(A, T) = \frac{\tan(h)}{2}$

und damit folgt $\sin(h) < h < \tan(h)$, bzw. nach Division mit $\sin(h)$

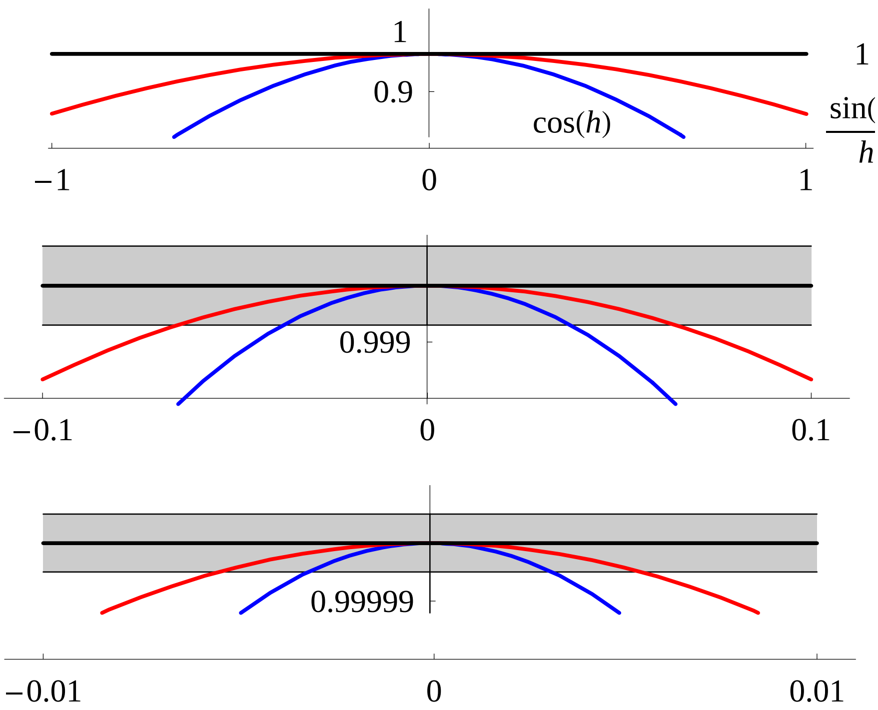
$$1 < \frac{h}{\sin(h)} < \frac{1}{\cos(h)}, \text{ woraus } \cos(h) < \frac{\sin(h)}{h} < 1 \text{ folgt}$$

Diese letzte Beziehung ist für $h > 0$ hergeleitet. Sie gilt aber auch für $h < 0$.



Versucht man jetzt in der Nähe von Null für $h \neq 0$ die Graphen der Funktionen $f_1 : h \to \cos(h)$, $f_2 : h \to \frac{\sin(h)}{h}$, $f_3 : h \to 1$ zu zeichnen, so scheint klar zu sein, dass ein "sinnvoller" Wert für f_2 bei Null nur Eins sein kann.

In der Nähe von Null scheinen sich die Werte von $\frac{\sin(h)}{h}$ von Eins nur beliebig wenig zu unterscheiden.



Diese Überlegungen führen zu der

<u>Definition 4.1:</u>
GRENZWERT einer Funktion
Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Die Funktion f hat an der Stelle $x_0 \in I$ einen GRENZWERT $\varphi \in \mathbb{R}$, genau dann, wenn
zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in I$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - \varphi| < \varepsilon$.

<u>Übliche Schreibweise:</u> $\lim_{x \to x_0} f(x) = \varphi$.

Ich ziehe diese Schreibweise vor: $\lim_{x_0} f(x) = \varphi$ oder noch besser $\lim_{x_0} f = \varphi$.

<u>Übliche Sprechweisen:</u> f hat bei x_0 den Grenzwert φ bzw. der Limes von f bei x_0 ist φ .

Beachten Sie $0 < |\ x - x_0\ |$, also $x \neq x_0$.

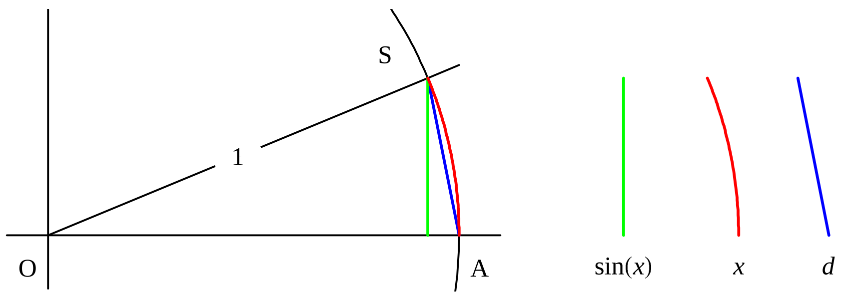
Der Beweis über die Eindeutigkeit des Grenzwertes von Funktionen verläuft analog zum Beweis von Satzes 1.2.4, der die Eindeutigkeit des Grenzwertes bei Folgen behandelt.

Viele Grenzwerte sind einfach zu berechnen. Doch soll hier jetzt endlich $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ bewiesen werden.

<u>Satz 4.1</u>
Es gilt $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Beweis:
Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ seien $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ und $f(0) := 1$.

$f(0)$ kann beliebig definiert werden. Der gewählte Wert spielt in diesem Beweis keine Rolle!



Es sei $x > 0$. Aus der Grafik folgt dann, dass die Länge des Bogens, also x , größer ist als der Abstand von $A = (1, 0)$ nach $S = (\cos(x),\ \sin(x))$, der $\sqrt{\sin^2(x) + (1 - \cos(x))^2}$ beträgt.

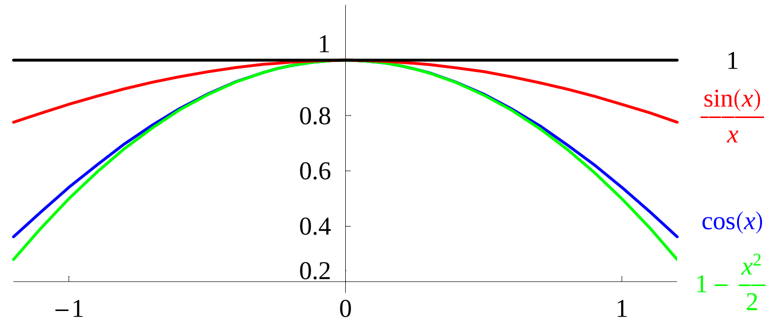
Also gilt $x^2 > \sin^2(x) + (1 - \cos(x))^2 = \sin^2(x) + 1 - 2\cos(x) + \cos^2(x) = 2 - 2\cos(x)$,

d.h. $\cos(x) > 1 - \frac{x^2}{2}$.

Weiter oben war schon $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$ bewiesen worden, so dass nun gilt

$$1 - \frac{x^2}{2} < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \text{ bzw. } -\frac{x^2}{2} < \frac{\sin(x)}{x} - 1 < 0 .$$

Diese Ungleichung läßt sich auch für negative x beweisen.



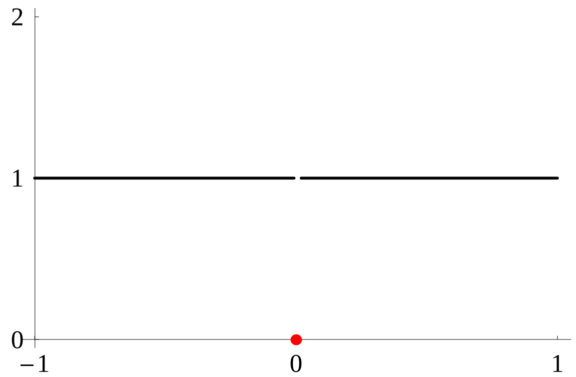
Es sei also wie oben $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ definiert für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es seien $\varepsilon > 0$ beliebig, $\delta := \varepsilon$ und es gelte $0 < |\,x\,| < \min(\delta, 1)$.

Dann folgt $\quad |\,f(x) - 1\,| = \left|\,\frac{\sin(x)}{x} - 1\,\right| < \frac{x^2}{2} < x^2 < \left|\,x\,\right| < \delta = \varepsilon$.

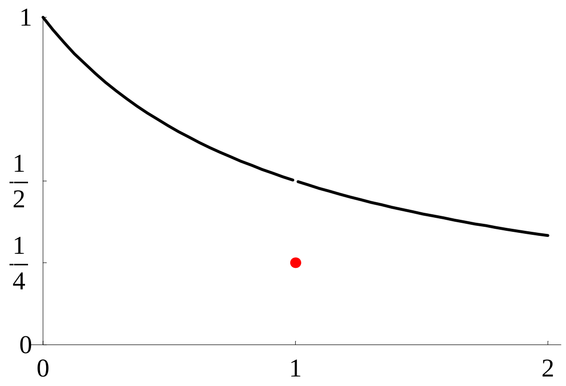
■

Nun einige Beispiele:

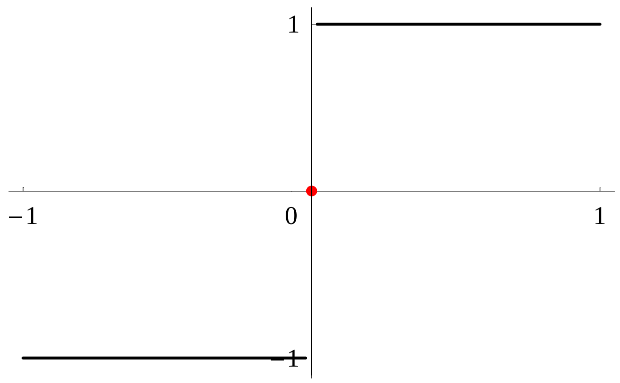
Beispiel 4.1:
Für $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ sei $f(x) := 1$ und $f(0) := 0$.
Dann hat f bei Null den Grenzwert 1, obwohl $f(0) \neq 1$.



Beispiel 4.2:
Für $x \in [0, 2] \setminus \{1\}$ sei $f(x) := \frac{x-1}{x^2-1}$ und $f(1) := a$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Für $x \neq 1$ gilt $f(x) = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$.
Ohne Beweis sei schon festgestellt, dass $\lim\limits_{1} f(x) = \frac{1}{2}$. Wenn $a = \frac{1}{2}$ gewählt wäre, dann wäre auch $\lim\limits_{1} f(x) = f(1)$.



<u>Beispiel 4.3:</u>
Für $x \in [-1, 1]$ sei $f(x) := \text{sign}(x)$, also $f(x) = -1$ für $x < 0$, $f(x) = 1$ für $x > 0$ und $f(0) = 0$.
Dann hat f bei Null keinen Grenzwert, obwohl die Werte von f rechts und links von Null jeweils konstant sind, jedoch unterschiedlich.



Die letzte Feststellung motiviert die

<u>Definition 4.2:</u>
EINSEITIGER Grenzwert
Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$.
Die Funktion f hat an der Stelle $x_0 \in I$ den RECHTSSEITIGEN Grenzwert $\rho \in \mathbb{R}$, genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in I$ mit $0 < x - x_0 < \delta$ gilt $|\, f(x) - \rho \,| < \varepsilon$.

<u>Übliche Schreibweise:</u> $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \rho$.

Ich ziehe diese Schreibweise vor: $\lim\limits_{x_0 +} f(x) = \rho$ oder noch besser $\lim\limits_{x_0 +} f = \rho$.

<u>Übliche Sprechweisen:</u> f hat bei x_0 den rechtsseitigen Grenzwert ρ bzw. der rechtsseitige Limes von f bei x_0 ist ρ .

Analog wird der LINKSSEITIGE Grenzwert definiert:

Die Funktion f hat an der Stelle $x_0 \in I$ den LINKSSEITIGEN Grenzwert $\lambda \in \mathbb{R}$, genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in I$ mit $0 < x_0 - x < \delta$ gilt $|\, f(x) - \lambda \,| < \varepsilon$.

<u>Übliche Schreibweise:</u> $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lambda$.

Ich ziehe diese Schreibweise vor: $\lim\limits_{x_0-} f(x) = \lambda$ oder noch besser $\lim\limits_{x_0-} f = \lambda$.

<u>Übliche Sprechweisen:</u> f hat bei x_0 den linksseitigen Grenzwert λ bzw. der linksseitige Limes von f bei x_0 ist λ .

Jetzt ist als Ergänzung zu Beispiel 4.3 leicht zu beweisen:

$$\lim_{0-} \text{sign} = -1 \ , \ \lim_{0+} \text{sign} = +1 \ .$$

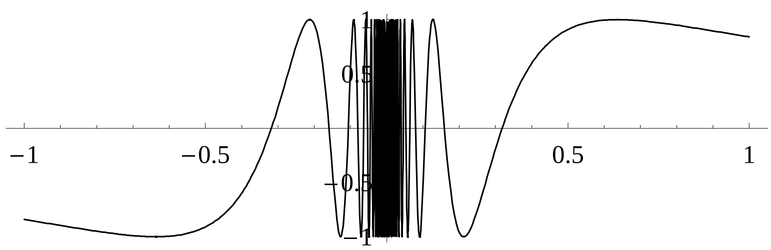
<u>Satz 4.2:</u>
Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$.
Es sei $x_0 \in \,]\,a, b[$. Dann existiert der Grenzwert von f bei x_0 **,** genau dann, wenn sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert von f bei x_0 existieren und beide gleich sind.
Mit entsprechend vorsichtiger Interpretation läßt sich diese Aussage so formulieren:

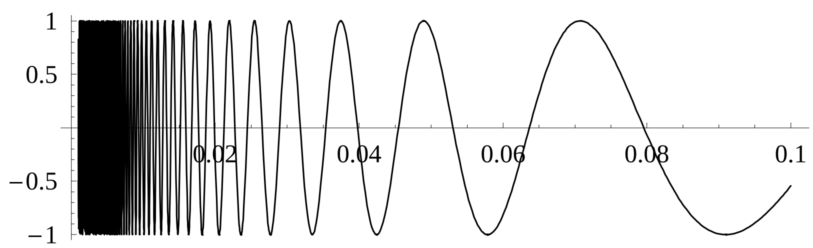
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \ .$$

Der Beweis ist eine einfache Übungsaufgabe.

■

<u>Beispiel 4.4:</u>
Für $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ seien $f(x) := \sin(\frac{1}{x})$ und $f(0) := 0$.
Dann existiert weder ein links- noch ein rechtsseitiger Grenzwert von f bei Null, denn etwa für $n \in \mathbb{N}$ und $x_n := \frac{1}{n\pi}$ gilt $f(x_n) = 0$; bzw. für $y_n := \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$ gilt $f(y_n) = 1$.
Es kann gezeigt werden, dass zu jedem $\alpha \in [-1, 1]$ eine Folge (α_n) existiert mit $\lim(\alpha_n) = 0$ und $\lim(f(\alpha_n)) = \alpha$.

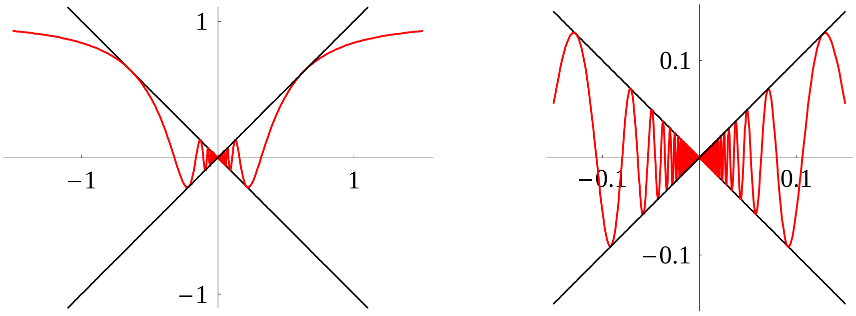




Die Grafiken können das Verhalten der Funktion in der Nähe von Null nur andeutungsweise wiedergeben!

<u>Beispiel 4.5:</u>
Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ seien $f(x) := x \sin(\frac{1}{x})$ und $f(0) := 0$.
Dann gilt $\lim\limits_{x \to 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$.
Beweis:
Es sei $\varepsilon > 0$ und $\delta := \varepsilon$. Da $|\sin(\alpha)| \leq 1$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, folgt für alle $x \in \,]-\delta, \delta[\,$, $x \neq 0$

$$|\ f(x) - f(0)\ | = |\ x \sin(\tfrac{1}{x})\ - 0\ | \leq |\ x\ | < \delta = \varepsilon\ .$$

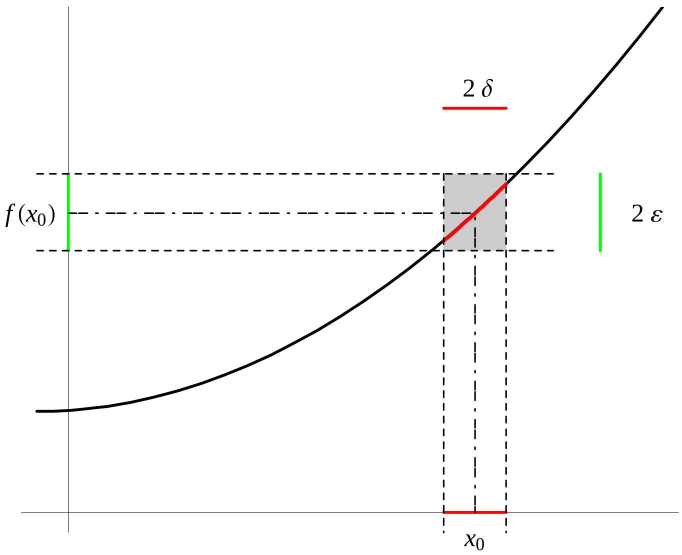


In einigen der vorangegangenen Beispiele existierte $\lim_{x \to x_0} f(x) = \varphi$ und hatte den Wert $f(x_0)$. Dafür gibt es die

Definition 4.3:
STETIGKEIT
Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt der Stelle $x_0 \in I$ STETIG, genau dann, wenn

zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in I$ mit $|\ x - x_0\ | < \delta$ gilt $|\ f(x) - f(x_0)\ | < \varepsilon$.

f heißt AUF I stetig, falls f stetig ist für alle $x_0 \in I$.



Zeichnen Sie bitte an den Koordinatenachsen noch die Werte $x_0 \pm \delta$ bzw. $f(x_0) \pm \varepsilon$ ein.

Hinweis: Im Folgenden sei immer $a < b$ und damit das Intervall $[a, b]$ nicht leer.

Satz 4.3:
Es seien $I := [a,\ b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Dann ist f auf I stetig.

Beweis:
(Vergleichen Sie diesen Beweis mit dem Beweis dafür, dass eine konstante Folge konvergiert, also Satz 1.2.1 .)

Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Es sei $\varepsilon > 0$ und $\delta := 1$. Dann gilt für alle $x \in I$ und damit erst recht für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ auch $|f(x) - f(x_0)| = |c - c| < \varepsilon$.

■

<u>Satz 4.4:</u>
Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x$. Dann ist f auf I stetig.

Beweis:
Es sei $x_0 \in I$ beliebig. Es sei $\varepsilon > 0$ und $\delta := \varepsilon$. Dann gilt für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ auch $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

■

<u>Satz 4.5:</u>
Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := |x|$. Dann ist f auf I stetig.
Beweis:
Es sei $x_0 \in I$ beliebig. Es sei $\varepsilon > 0$ und $\delta := \varepsilon$. Dann gilt für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ auch $|f(x) - f(x_0)| = \big|\, |x| - |x_0| \,\big| \le |x - x_0| < \delta = \varepsilon$
nach der Dreiecksungleichung .

■

<u>Bemerkung:</u> Da in den Sätzen 4.4 und 4.5 das Intervall I jeweils beliebig war,

<u>Beispiel 4.6:</u>
1. Dirichlet-Funktion (1829), (Peter Gustav Lejeune-Dirichlet. 1805-1859)
Für $x \in [0, 1]$ sei

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \text{ irrational} \\ 1, & \text{falls } x \text{ rational} \end{cases} .$$

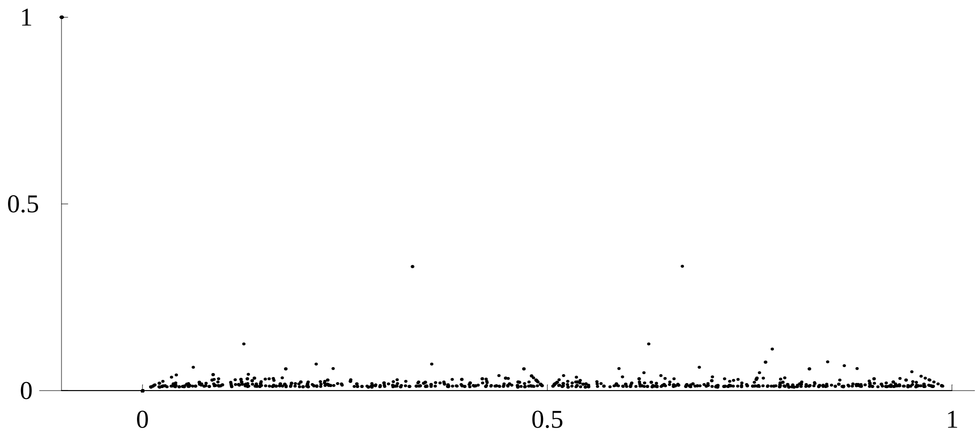
Für <u>kein</u> x_0 besitzt f Grenzwerte. Denn in jedem Intervall, das x_0 umfaßt, liegen sowohl rationale als auch irrationale Zahlen. Also werden in jedem (noch so kleinen) Intervall die Funktionswerte Null und Eins angenommen. Deren Differenz ist aber nicht unter beliebiges ε zu bringen.

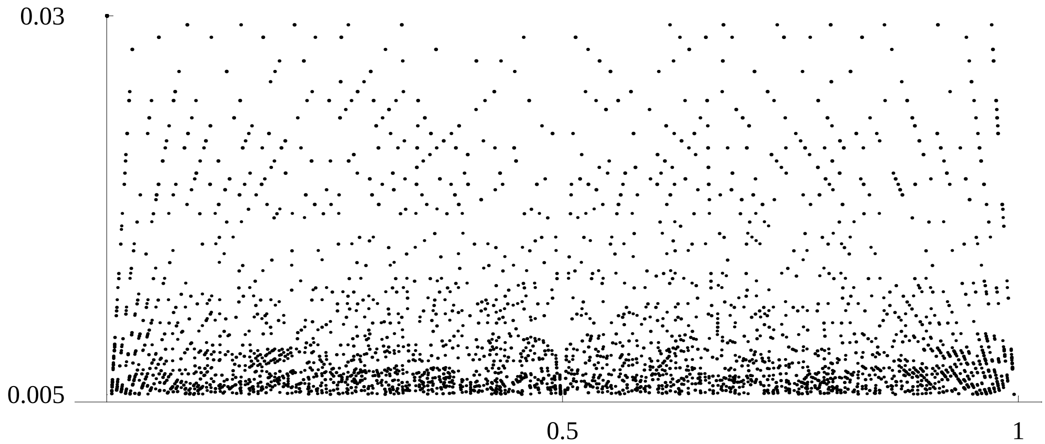
Jeder Versuch, diese Funktion grafisch darzustellen, muss scheitern.

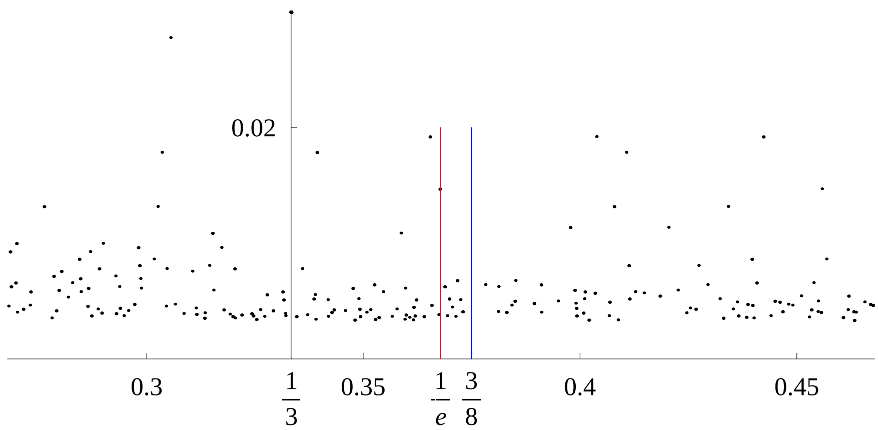
<u>Beispiel 4.7:</u>
2. Dirichlet-Funktion (1829)
Für $x \in [0, 1]$ sei

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \text{ irrational} \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x \text{ rational und } x = \frac{p}{q} \text{ mit teilerfremden } p,\ q \in \mathbb{N}_0 \end{cases} .$$

f ist für jedes irrationale x_0 stetig und für jedes rationale x_1 unstetig !







Beweis:

Es sei x_0 rational und $x_0 = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden p und q. Es sei $\varepsilon := \frac{1}{2q}$ und $\delta > 0$ beliebig. In jedem Intervall $]\, x_0 - \delta,\ x_0 + \delta\, [$ liegt ein irrationales $\overline{x}$. Also gilt

$$|\ f(\overline{x}) - f(x_0)\ | = \left|\ 0 - \frac{1}{q}\ \right| = \frac{1}{q} > \frac{1}{2q} = \varepsilon\ .$$

Es seien nun x_0 irrational und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_q \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_q} < \varepsilon$. Das Intervall $[0, 1]$ enthält nur endlich viele Brüche der Gestalt $\frac{r}{s}$ (r, s teilerfremd) mit Nennern $s < n_q$. Es sei $\delta := \min\limits_{s<n_q} \left(\left|\ x_0 - \frac{r}{s}\ \right|\right)$.

Nun ist $0 \leq f(x) < \frac{1}{n_q}$ für $x \in [0, 1] \cap\ ]\, x_0 - \delta,\ x_0 + \delta\, [$,

d.h.

$$\left|\ f(x) - f(x_0)\ \right| < \left|\ f(x) - 0\ \right| < \frac{1}{n_q} < \varepsilon\ .$$

■

Satz 4.6:

Es seien $I := [a,\ b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$. f sei bei x_0 stetig. Ist $f(x_0) > 0$, so gibt es ein $\delta^+ > 0$, so dass $f(x) > 0$ für alle $x \in I \cap [x_0 - \delta^+,\ x_0 + \delta^+]$. Ist $f(x_0) < 0$, so gibt es ein $\delta^- > 0$, so dass $f(x) < 0$ für alle $x \in I \cap [x_0 - \delta^-,\ x_0 + \delta^-]$.

Beweis für $f(x_0) > 0$:

Es sei $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in I$ mit $|\ x - x_0\ | < \delta$ gilt:

$$|\ f(x) - f(x_0)\ | < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} ,$$

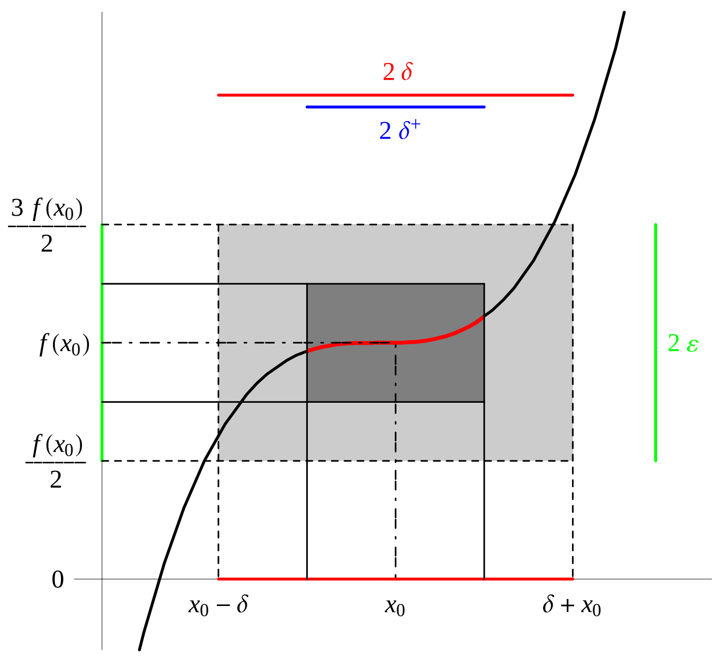
d.h. $-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}$

also $0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3}{2} f(x_0)$.

Es sei nun $\delta^+ := \frac{\delta}{2}$, dann gilt $[x_0 - \delta^+,\ x_0 + \delta^+] \subset\ ]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta[$ und damit für alle $x \in I \cap [x_0 - \delta^+,\ x_0 + \delta^+]$ erst recht die letzte Ungleichung.

Der Fall $f(x_0) < 0$ wird analog bewiesen.

■



Als Sprechweise hat sich eingebürgert die

Definition 4.3:

OFFENE bzw. ABGESCHLOSSENE UMGEBUNG.

Das offene Intervall $]\,x_0 - \delta,\ x_0 + \delta\,[$ wird OFFENE δ–Umgebung von x_0 genannt. Das abgeschlossene Intervall

$[x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$ heißt ABGESCHLOSSENE δ–Umgebung von x_0 .

Satz 4.6 läßt sich dann folgendermaßen merken: Wenn eine Funktion f in x_0 stetig und ungleich Null ist, dann ist sie auch in einer ganzen abgeschlossenen Umgebung von x_0 ungleich Null.

Der Zusammenhang zwischen Grenzwerten von Folgen und Grenzwerten von Funktionen wird hergestellt von dem wichtigen und nützlichen

Satz 4.7:
Folgenkriterium für Grenzwerte von Funktionen.
Es seien $I := [a,\ b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ und $\varphi \in \mathbb{R}$.
Genau dann gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \varphi$,
wenn $\lim\,(f(x_n)) = \varphi$
für JEDE Folge (x_n) mit $x_n \in I$, $x_n \neq x_0$ und $\lim(x_n) = x_0$ gilt.

Beweis:
1.Beweisteil:
Es gelte mit den Bezeichnungen der Behauptung $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \varphi$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|\ f(x) - \varphi\ | < \varepsilon$ für alle $x \in I$ mit $|\ x - x_0\ | < \delta$.
Es sei (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \in I$, $x_n \neq x_0$ und $\lim(x_n) = x_0$. Da $\lim(x_n) = x_0$ und $x_n \neq x_0$, gibt es zu $\delta > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $0 < |\ x_n - x_0\ | < \delta$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Damit gilt für alle diese x_n auch $|\ f(x_n) - \varphi\ | < \varepsilon$,
d.h. $\lim\,(f(x_n)) = \varphi$.

2. Beweisteil:
Es wird vorausgesetzt, dass für jede Folge (x_n) der in der Behauptung beschriebenen Art auch $\lim\,(\,f(x_n)\,) = \varphi$ gilt.
Der Beweis wird nun indirekt geführt!
Annahme: f habe bei x_0 keinen Grenzwert φ .
D.h.: Es gilt nicht: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in I$ mit $0 < |\ x - x_0\ | < \delta$ auch $|\ f(x) - \varphi\ | < \varepsilon$ gilt.
Also gibt es ein $\overline{\varepsilon} > 0$, so dass nicht gilt: Es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in I$ mit $0 < |\ x - x_0\ | < \delta$ auch $|\ f(x) - \varphi\ | < \overline{\varepsilon}$ gilt.
D.h. es gibt ein $\overline{\varepsilon} > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ gilt: Nicht für alle $x \in I$ mit $0 < |\ x - x_0\ | < \delta$ gilt auch $|\ f(x) - \varphi\ | < \overline{\varepsilon}$. Dies wiederum bedeutet: Es gibt ein $\overline{\varepsilon} > 0$, so dass es zu jedem $\delta > 0$ ein x_δ gibt mit $0 < |\ x_\delta - x_0\ | < \delta$ und $|\ f(x_\delta) - \varphi\ | \geq \overline{\varepsilon}$. Also gibt es insbesondere zu jedem $\delta_n := \frac{1}{n}$ ein $x_n \in I$ mit $0 < |\ x_n - x_0\ | < \delta_n$ und $|\ f(x_n) - \varphi\ | \geq \overline{\varepsilon}$.
Damit gilt aber $\lim(x_n) = x_0$ und die Folge $(f(x_n))$ hat nicht den Grenzwert φ , im Widerspruch zur Voraussetzung in diesem Beweisteil.

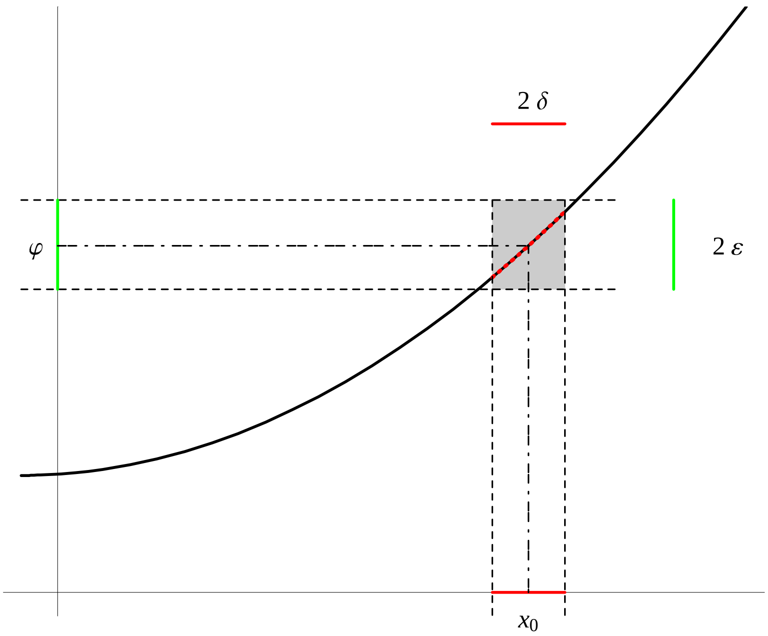
∎

Mit Quantoren läßt sich die obige Argumentationskette mit Bedacht so darstellen:

$$\neg\ \Big(\bigwedge_{\varepsilon > 0}\ \bigvee_{\delta > 0}\ \bigwedge_{x \in I}\ 0 < |\ x - x_0\ | < \delta\ :\ |\ f(x) - f(x_0)\ | < \varepsilon\Big)$$

$$\bigvee_{\bar{\varepsilon}>0} \; \bigwedge_{\delta>0} \; \bigvee_{x_\delta \in I} \; 0 < | \; x_\delta - x_0 \; | < \delta : | \; f(x_\delta) - f(x_0) \; | \geq \bar{\varepsilon}$$

Versuchen Sie bitte die fehlenden Zwischenschritte einzutragen.



Die Anwendung von Satz 4.7 auf stetige Funktionen liefert

Satz 4.8:
Folgenkriterium für stetige Funktionen.
Es seien $I := [a,\ b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$.
Genau dann ist f stetig bei x_0 ,

wenn $\lim (f(x_n)) = f(\lim(x_n)) = f(x_0)$

für JEDE Folge (x_n) mit $x_n \in I$ und $\lim(x_n) = x_0$ gilt.

Der Beweis folgt direkt aus Satz 4.7 mit der Definition der Stetigkeit.

■

Zu beachten ist, dass in diesem Fall nicht – wie in Satz 4.7 – ausgeschlossen ist, dass $x_n = x_0$.

Satz 4.9:
Regeln für stetige Funktionen
Es seien $I := [a,\ b]$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ und f, g stetig bei x_0. Es sei noch $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

(*i*) $\lambda \cdot f$ ist bei x_0 stetig, d.h.
$\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda \cdot f)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

(*ii*) $f + g$ ist bei x_0 stetig, d.h.

$$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0) \ .$$

(*iii*) $f \cdot g$ ist bei x_0 stetig, d.h.

$$\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0) = (f\cdot g)(x_0) \ .$$

(*iv*) Falls $g(x_0) \neq 0$, ist $\frac{f}{g}$ bei x_0 stetig, d.h.

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f}{g}(x_0) \ .$$

Die Beweise sind direkte Folgerungen aus den Sätzen 4.8 und 1.2.9 . (*i*) läßt sich auch einfach mit (*iii*) beweisen. Es ist hier so angeführt, um die vollständige Analogie zu Satz 1.2.9 zu erhalten.
Bei (*iv*) ist zu beachten, dass g nach Satz 4.6 nicht nur bei x_0 , sondern in einer ganzen abgeschlossenen Umgebung von x_0 ungleich Null ist.

■

Satz 4.10:
Verkettung stetiger Funktionen
Es seien $I := [a,\ b]$, $J := [c, d]$ und $g: I \to \mathbb{R}$, $f: J \to \mathbb{R}$. g sei stetig bei $x_0 \in I$ und $g(x) \in J$ für alle $x \in I$. f sei bei $g(x_0)$ stetig. Dann ist auch $f \circ g$ bei x_0 stetig.

Beweis:
Es sei $x_0 \in I$. Es sei (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \in I$ und $\lim (x_n) = x_0$.
Dann gilt $g(x_n) \in J$ für alle n . Da g stetig bei x_0 , gilt $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. Nach dem Folgenkriterium (Satz 4.8) folgt, da f bei $g(x_0)$ stetig ist, auch

$$\lim_{x\to x_0} (f\circ g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(g(x_0)) = (f\circ g)(x_0) \ .$$

■

Als Folgerung der Sätze 4.9 und 4.10 ergibt sich die Stetigkeit der elementaren Funktionen wie Polynomfunktionen und rationalen Funktionen. Darauf wird später noch eingegangen.

Oft herrscht die falsche Vorstellung "eine stetige Funktion sei in einem Zug durchziehbar"; das soll heißen: Der Graph der Funktion läßt sich ohne abzusetzen zeichnen. Beispiel 4.7 möge dagegen genügend Bedenken erwecken. Die falsche Vorstellung wird jedoch durch den folgenden – richtigen! – Satz genährt.

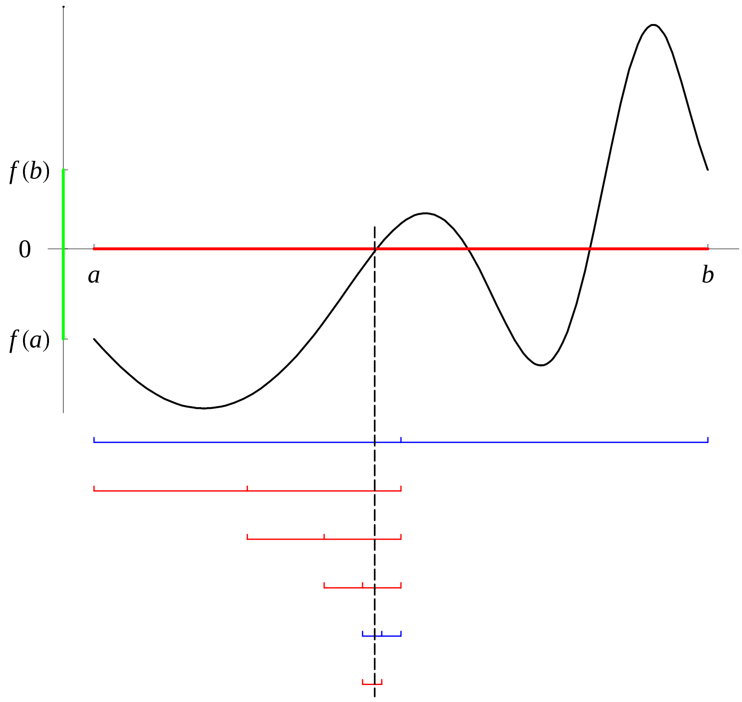
Satz 4.11:
Zwischenwertsatz
Es seien $I := [a,\ b]$ und $f: I \to \mathbb{R}$ auf I stetig.

z i) Es gelte $f(a) < 0 < f(b)$.
Dann gibt es ein $x_0 \in\ ]a,\ b[$ mit $f(x_0) = 0$.

z ii) Es seien nun $f(a) =: \alpha$ und $f(b) =: \beta$ und $\alpha \neq \beta$.
Dann gibt es zu JEDEM γ zwischen α und β ein $x_\gamma \in\ ]a,\ b[$ mit $f(x_\gamma) = \gamma$.

Diese Eigenschaft auf Intervallen stetiger Funktionen wird die Zwischenwerteigenschaft genannt.

Beweis zu z i):
Mit Hilfe der sog. Intervallhalbierungsmethode wird eine Intervallschachtelung für eine Nullstelle von f konstruiert. Dieses Verfahren soll zuerst am Beispiel der folgenden Grafik motiviert werden. Es sind von Ihnen noch einige Bezeichnungen in die Grafik einzutragen.



Es werden zwei Folgen (u_n) und (o_n) (entsprechend unten und oben) mit $u_n, o_n \in I$ konstruiert, für die gilt

(i) $\quad a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq o_{n+1} \leq o_n \leq b$,

(ii) $\quad o_n - u_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$,

(iii) $\quad f(u_n) \leq 0 \leq f(o_n)$.

(i) bedeutet insbesondere, dass die Folgen (u_n) und (o_n) monoton und beschränkt sind. Sie sind also auch konvergent und es gelte

$$u := \lim(u_n) \text{ und } o := \lim(o_n) .$$

Nun die rekursive Konstruktion der Folgen (u_n) und (o_n) :
Am Anfang seien $u_o := a$ und $o_0 := b$ gesetzt. Es seien nun für ein $n \in \mathbb{N}_0$ u_n und o_n schon definiert.
Dann sei $m_n := \frac{1}{2}(u_n + o_n)$. $m_n \in I$ gilt trivialerweise.
1. Fall: $f(m_n) \leq 0$. Dann wird $u_{n+1} := m_n$ gesetzt und $o_{n+1} := o_n$.
2. Fall: $f(m_n) > 0$. Dann wird $u_{n+1} := u_n$ und $o_{n+1} := m_n$ gesetzt.

Die so konstruierten Folgen (u_n) und (o_n) erfüllen *qua* Konstruktion die Bedingungen (i) und (iii).
Durch Induktion wird (ii) bewiesen:
I: Induktionsanfang: $n = 0$. Dann gilt $o_0 - u_0 = b - a = \frac{1}{2^0}(b-a)$.
II: Induktionsschritt: Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $o_n - u_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$.
Dann folgt für

$$o_{n+1} - u_{n+1} = \begin{cases} o_n - (u_n + o_n)/2 = (o_n - u_n)/2 & \text{im Fall 1} \\ (u_n + o_n)/2 - u_n = (o_n - u_n)/2 & \text{im Fall 2} \end{cases} ,$$

also in jedem Fall

$$o_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}\,(o_n - u_n) = \frac{1}{2^{n+1}}\,(b - a)\ .$$

Mit (*ii*) folgt nun sofort die Existenz eines x_0 mit $\lim(u_n) = x_0 = \lim(o_n)$.
Mit (*iii*) und der Stetigkeit von f folgt $\lim(f(u_n)) = \lim(f(o_n))$.
Andererseits folgt mit (*iii*) $\lim(f(u_n)) \le 0$ und $\lim(f(o_n)) \ge 0$.
Also ergibt sich insgesamt $0 = \lim(f(u_n)) = f(\lim(u_n)) = f(x_0)$.
Der Beweis zu *z ii*) folgt als Verallgemeinerung aus *z i*):
1. Fall: Es gelte $\alpha := f(a) < f(b) =: \beta$ und es sei $\gamma \in\ ]\alpha, \beta[$. Für $x \in I$ sei $\tilde{f}(x) := f(x) - \gamma$. Dann gilt $\tilde{f}(a) = f(a) - \gamma < 0$, $\tilde{f}(b) = f(b) - \gamma > 0$, und es gibt nach (*i*) ein x_0 mit $0 = \tilde{f}(x_0) = f(x_0) - \gamma$, d.h. $f(x_0) = \gamma$.

2. Fall: Es gelte $f(a) > f(b)$. Dann wird analog zu Fall 1 verfahren bei entsprechender Umbenennung einiger Bezeichnungen.

∎

Ohne Beweis sei noch der folgende Satz angeführt:

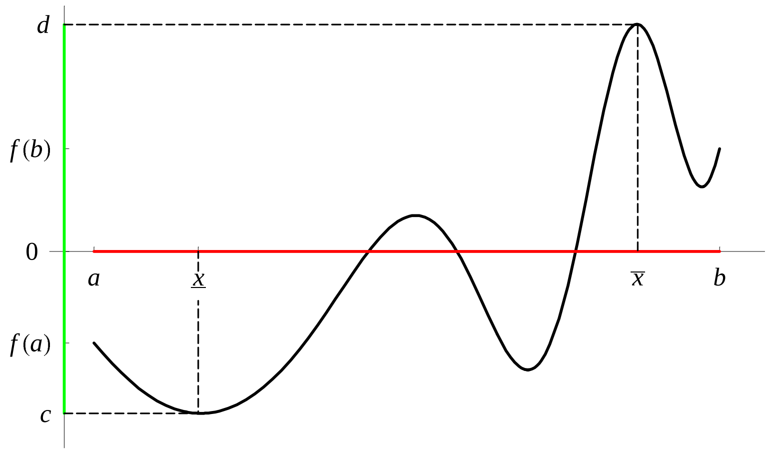
<u>Satz 4.12:</u>
Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ auf I stetig. Dann gibt es $\underline{x}$, $\overline{x} \in I$, so dass für alle $x \in I$ folgt

$$f(\underline{x}) \le f(x) \le f(\overline{x})\ .$$

Werden noch $c := f(\underline{x})$ und $d := f(\overline{x})$ gesetzt, so folgt mit dem Zwischenwertsatz (Satz 4.11) weiterhin, dass es zu jedem $\varphi \in [c, d]$ ein $x_0 \in I$ gibt mit $f(x_0) = \varphi$.

Also ist die Wertemenge der stetigen Funktion f (definiert auf $[a, b]$) das Intervall $[c, d]$.
Kurz wir das so geschrieben:

$$f[a, b] = [c, d]\ .$$



Aus den letzten beiden Sätzen folgt also als WICHTIGE ERKENNTNIS:
Stetige Funktionen bilden abgeschlossene Intervalle auf abgeschlossene Intervalle ab. Stetige Funktionen nehmen auf abgeschlossenen Intervallen Minimum und Maximum an.