# ■ 5. Differenzierbarkeit

Materialien zur Vorlesung **Elementare Analysis**, Wintersemester 2003 / 4

Zur Berechnung der Steigung der Tangente an den Graphen der Sinusfunktion im Punkte $(0,0)$ wurde im vorigen Abschnitt der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{\sin(h) - \sin(0)}{h - 0}$$

untersucht.

Als naheliegende Verallgemeinerung dient die

Definition 5.1:

DIFFERENZENQUOTIENT, DIFFERENTIALQUOTIENT, DIFFERENZIERBAR, ABLEITUNG

Es seien $I := [a,\ b]$ , $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0, x \in I$ .

Der Quotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt DIFFERENZENQUOTIENT von $f$ bzgl. $x$ und $x_0$ .

$f$ heißt an der Stelle $x_0$ DIFFERENZIERBAR, wenn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert, also der Grenzwert des Differenzenquotient existiert.

Folgende Schreibweise ist gebräuchlich:

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ .$$

Die reelle Zahl $f'(x_0)$ heißt der DIFFERENTIALQUOTIENT von $f$ an der Stelle $x_0$ bzw. die ABLEITUNG von $f$ an der Stelle $x_0$ .

Andere gebräuchliche Schreibweisen für $f'(x_0)$ sind $\frac{d\,f\,(x_0)}{dx}$ bzw. $\frac{df}{dx}\,(x_0)$ .

Diese Schreibweisen gehen auf Gottfried Wilhelm Leibniz ( 11. 11. 1675 ) zurück.

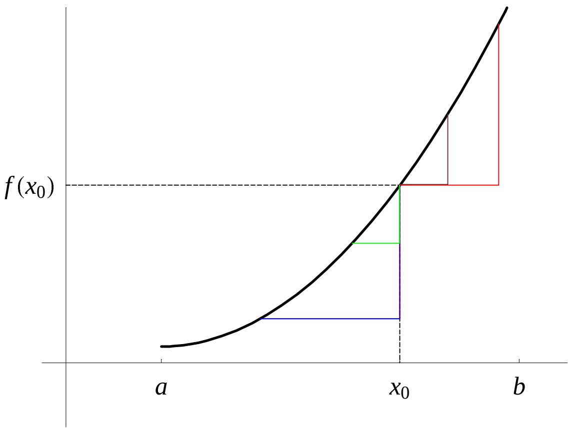
Beachten Sie: Das Symbol $f'(x_0)$ definiert KEINE Funktion! Es bezeichnet eine reelle Zahl!

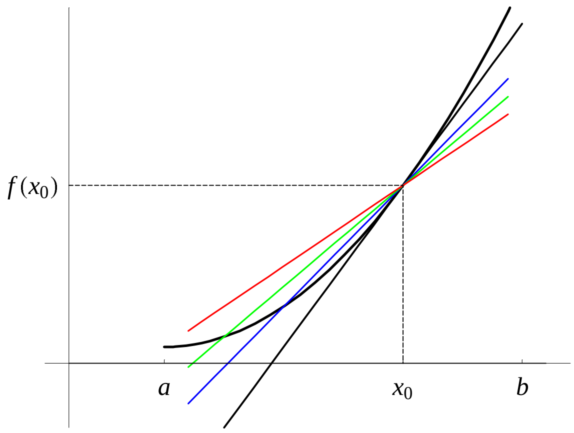
Der Differentialquotient heißt zwar ...quotient, er ist aber "eigentlich" kein Quotient, sondern der Grenzwert eines Quotienten!

Mit $h := x - x_0$ erhält der Differenzenquotient die häufig gebrauchte Gestalt

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ .$$

Die Ableitung läßt sich interpretieren als lokale Änderungsrate von $f$ bei $x_0$ oder als Steigung der Tangente an den Graphen von $f$ in $(x_0,\ f(x_0))$ .




Definition 5.2:

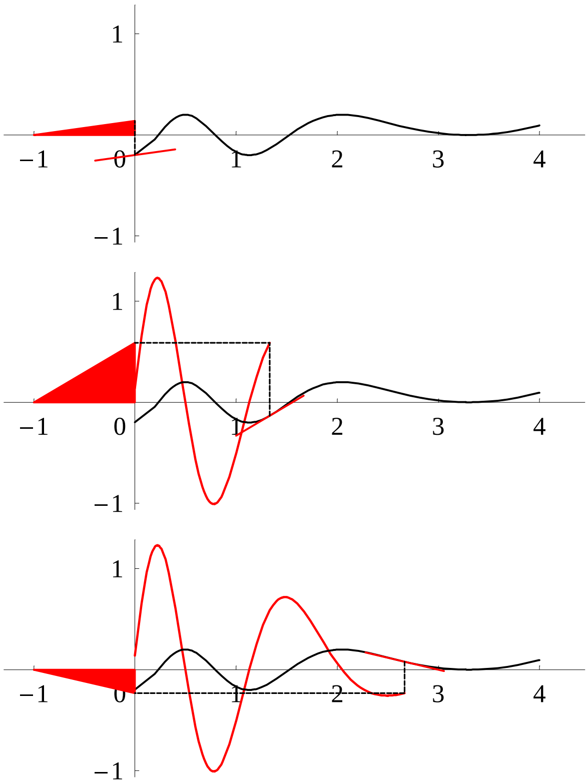
ABLEITUNGSFUNKTION

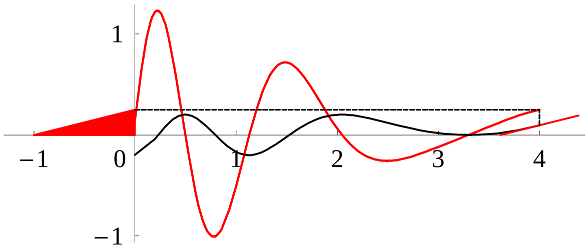
Es seien $I := [a,\ b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ . Es sei $f$ für alle $x \in I$ differenzierbar.

Es sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi(x) := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ .

Dann heißt $\varphi$ die ABLEITUNGSFUNKTION von $f$ .
Statt von der Ableitungsfunktion einer Funktion wird sehr häufig nur kurz von der Ableitung einer Funktion gesprochen.

Aus historischen Gründen wird $f'$ statt $\varphi$ geschrieben. Diese Schreibweise wurde 1797 von Joseph Louis Lagrange (1736 –1813) eingführt.






Zur Erstellung der Graphiken wurde das Programm `DerivativeBuilder` aus dem Buch Animating Calculus von Packel, Wagon variiert.

Einige elementare Beispiele 5.1:
Es seien $I := [a,\ b]$ , $x_0 \in I,\ c,\ \lambda \in \mathbb{R}$ und $f_1(x) := c$, $f_2(x) := \lambda \cdot x$ , $f_3(x) := x^2$ .
Dann gilt:

$$f_1'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} = 0 \ ,$$
$$f_2'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x) - f_2(x_0)}{x - x_0} = \lambda \ ,$$
$$f_3'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f_3(x) - f_3(x_0)}{x - x_0} = 2 \cdot x_0 \ .$$

Die Beweise folgen durch Berechnung der Differenzenquotienten:

$$\frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \ ,$$
$$\frac{f_2(x) - f_2(x_0)}{x - x_0} = \frac{\lambda \cdot x - \lambda \cdot x_0}{x - x_0} = \lambda \ ,$$
$$\frac{f_3(x) - f_3(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 \ .$$

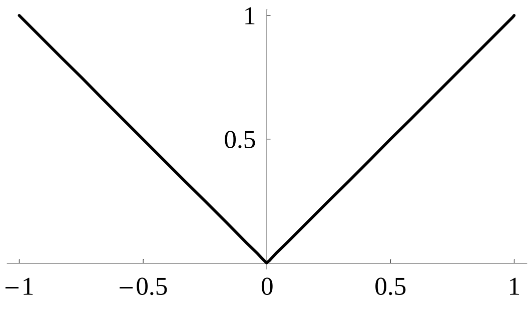
Etwas *leger* lassen sich die eben bewiesenen Beispiele so umschreiben:
Die Ableitung einer konstanten Funktion ist Null, die Ableitung von $x$ ist Eins, die Ableitung von $x^2$ ist $2\,x$ .

Das Standardbeispiel 5.2
einer an einer Stelle stetigen, aber dort nicht differenzierbaren Funktion ist die Betragsfunktion bei Null:

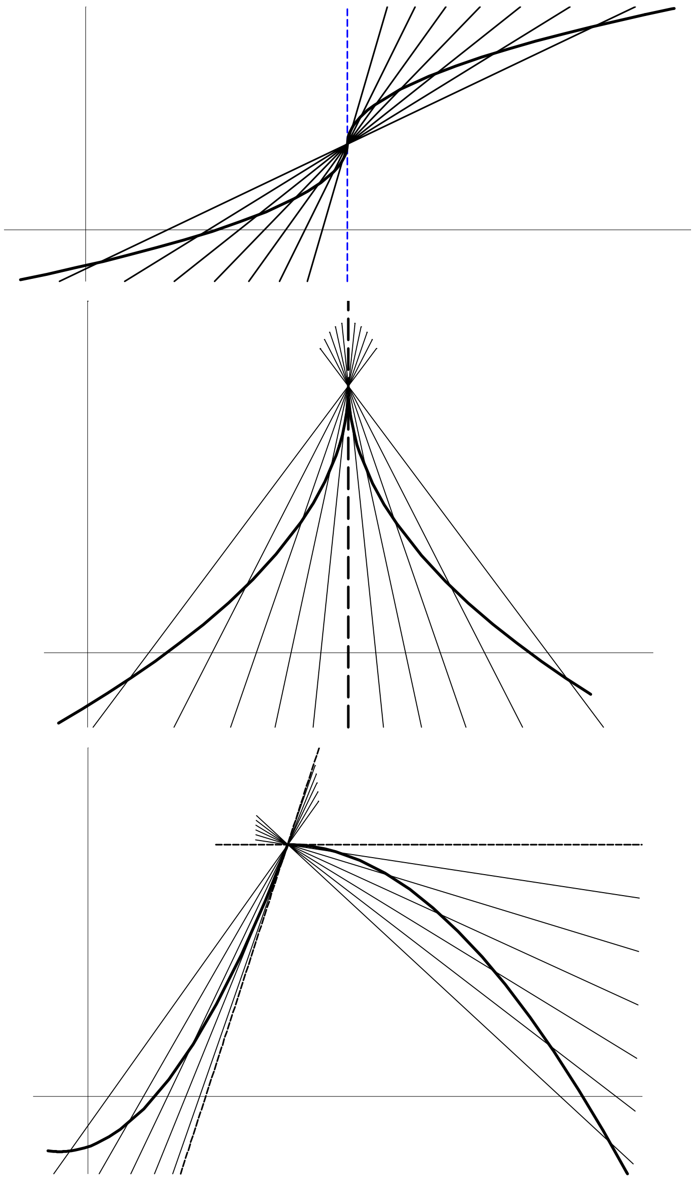
Es seien $I := [0,\ 1]$ und $f(x) := |\ x\ |$ für $x \in I$ . $f$ ist bei Null nicht differenzierbar,

denn $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|\,x\,|}{x} = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1\ , \text{ falls } x > 0 \\ -1\ , \text{ falls } x < 0 \end{cases} .$$

Gemäß Beispiel 4.3 hat dieser Differenzenquotient keinen Grenzwert bei $0$ .



Einige weitere Beispiele für die Graphen von Funktionen, die an einer Stelle nicht differenzierbar sind:

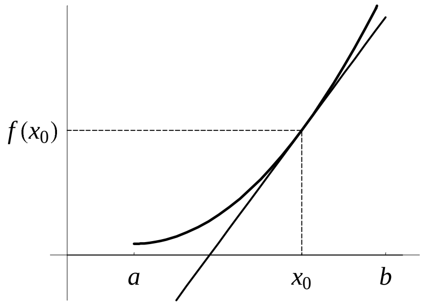


Sie erinnern sich vielleicht an die "Punkt-Richtungsformel" für eine Gerade in der Form

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \ .$$

Mit $y_0 = f(x_0)$ und $m = f'(x_0)$ wird daraus die Tangentengleichung

$$y(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) \ .$$




In der Nähe von $x_0$ "approximiert" die Tangente den Graphen der Funktion. Man spricht von "lokaler" Approximation. Genauer darüber Auskunft gibt

Satz 5.1:
Es seien $I := [a,\ b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ . $f$ ist genau dann bei $x_0$ differenzierbar, wenn es eine auf $I$ definierte, in $x_0$ stetige Funktion $D$ gibt, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(*) $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot D(x)$ für alle $x \in I$ ,

(**) $D(x_0) = f'(x_0)$ .

Beweis:
Teil I: Es sei $f$ differenzierbar in $x_0$ . Für $x \in I$ setze

$$D(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} , & \text{falls } x \neq x_0 \\ f'(x_0) , & \text{falls } x = x_0 \end{cases} .$$

Damit ist auf $I$ die Funktion $D$ wohldefiniert. Es sei nun $x \neq x_0$ . Dann gilt

$$f(x_0) + (x - x_0) \cdot D(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f(x) .$$

Da $f$ bei $x_0$ differenzierbar ist, gilt

$$D(x_0) = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} D(x) .$$

Also ist $D$ bei $x_0$ stetig und erfüllt (*) und (**) .

Teil II: Es gelten (*) und (**) . Für $x \neq x_0$ folgt aus (*)

$$D(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Da $D$ bei $x_0$ stetig ist, folgt

$$D(x_0) = \lim_{x \to x_0} D(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Also existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten, d.h. $f$ ist bei $x_0$ differenzierbar.

■

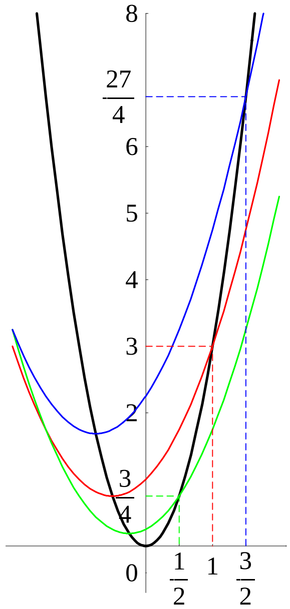
Als Beispiel 5.3
zu Satz 5.1 werden für $f(x) := x^3$, $x \in \mathbb{R}$ und $x_0 = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ die Funktionen $D$ berechnet:
Es sei jeweils $x \neq x_0$ .

Mit $\frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = x^2 x_0^0 + x^1 x_0^1 + x^0 x_0^2$

folgt für $x_0 = \frac{1}{2}$ $D_{\frac{1}{2}}(x) = x^2 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4}$ ,

$x_0 = 1$ $D_1(x) = x^2 + x + 1$ ,

$x_0 = \frac{3}{2}$ $D_{\frac{3}{2}}(x) = x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{9}{4}$ .




Satz 5.2:
Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ und $f$ bei $x_0$ differenzierbar.
Dann ist $f$ bei $x_0$ stetig.

Beweis:
Nach Satz 5.1 gibt es auf $I$ eine in $x_0$ stetige Funktion $D$ mit

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot D(x) .$$

Da die Funktion $h_{x_0} : I \to \mathbb{R}$ mit $h_{x_0}(x) := x - x_0$ stetig ist in $x_0$ , folgt mit Satz 4.9 auch die Stetigkeit von $f$ in $x_0$ .

■

Satz 5.3:
Summenregel, Produktregel, Quotientenregel
Es seien $I := [a, b]$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ und $f$ bzw. $g$ bei $x_0$ differenzierbar. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ .
$(i)$ Die Funktion $\lambda \cdot f$ ist in $x_0$ differenzierbar und es gilt

$$(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0) .$$

(*ii*) Die Funktion $f+g$ ist in $x_0$ differenzierbar und es gilt

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \ .$$

(*iii*) Die Funktion $f \cdot g$ ist in $x_0$ differenzierbar und es gilt

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + g'(x_0) \cdot f(x_0) \ .$$

(*iv*) Wenn $g(x_0) \neq 0$ ist, dann ist die Funktion $\frac{f}{g}$ in $x_0$ differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{(g(x_0))^2} \ .$$

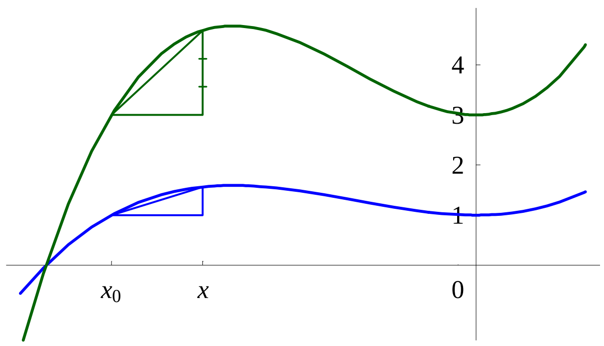
Beweis:
Nach Satz 5.1 gibt es auf $I$ in $x_0$ stetige Funktionen $D_f$ und $D_g$ mit

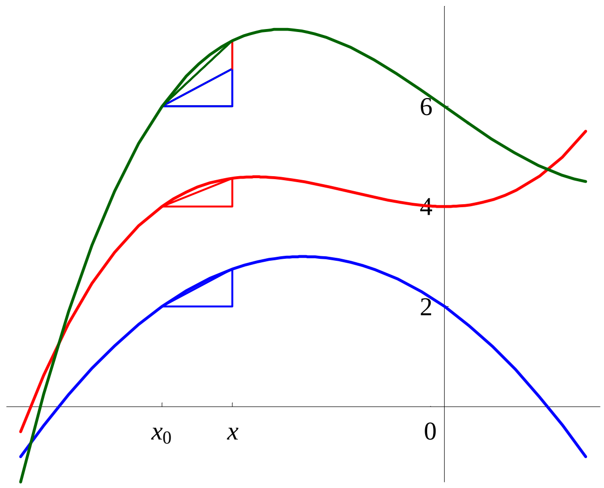
(*) $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot D_f(x)$ und $D_f(x_0) = f'(x_0)$ ,
(**) $g(x) = g(x_0) + (x - x_0) \cdot D_g(x)$ und $D_g(x_0) = g'(x_0)$ .

Beweis zu (*i*):
Es sei $\Lambda(x) := \lambda \cdot D_\lambda(x)$ für $x \in I$. Dann ist nach Satz 4.9 auch $\Lambda$ in $x_0$ stetig.
Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}(\lambda \cdot f)(x) &= \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot f(x_0) + \lambda \cdot (x - x_0) \cdot D_f(x) \\ &= \lambda \cdot f(x) = (\lambda \cdot f)(x_0) + (x - x_0) \cdot \lambda \cdot D_f(x) \\ &= (\lambda \cdot f)(x_0) + (x - x_0) \cdot \Lambda(x) \ .\end{aligned}$$

Da $\Lambda(x_0) := \lambda \cdot D_\lambda(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$ , gilt mit Satz 5.1 $(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$ .




Die linke Grafik bezieht sich auf (*i*) , die rechte auf (*ii*) .
Der Beweis zu (*ii*), also der Summenregel, ist eine Übungsaufgabe.

Beweis zu (*iii*), also der Produktregel:
Mit (*) und (**) folgt mit

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot D_f(x) \ , \ D_f(x_0) = f'(x_0) \ ,$$

und

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0) \cdot D_g(x) \ , \ D_g(x_0) = g'(x_0) \ ,$$

nun $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (\ f(x_0) + (x - x_0) \cdot D_f(x)\ ) \cdot (\ g(x_0) + (x - x_0) \cdot D_g(x)\ ) =$

$$= f(x_0) \cdot g(x_0) + (x - x_0) \cdot (\ f(x_0) \cdot D_g(x) + g(x_0) \cdot D_f(x) + (x - x_0) \cdot D_f(x) \cdot D_g(x)\ ) .$$

Für $x \in I$ werde jetzt $D_{f \cdot g}$ definiert durch

$$D_{f \cdot g}(x) := f(x_0) \cdot D_g(x) + g(x_0) \cdot D_f(x) + (x - x_0) \cdot D_f(x) \cdot D_g(x) .$$

Dann ist $D_{f \cdot g}$ nach mehrfacher Anwendung von Satz 4.9 stetig in $x_0$ und mit Satz 5.1 folgt

$$\begin{aligned} D_{f \cdot g}(x_0) &:= f(x_0) \cdot D_g(x_0) + D_f(x_0) \cdot g(x_0) \\ &= f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) . \end{aligned}$$

Der Beweis für (*iv*), also der Quotientenregel, wird in zwei Teilen geführt.
1. Teil: Es sei $f(x) := 1$ für $x \in I$ . Nach Voraussetzung ist $g$ bei $x_0$ stetig und $g(x_0) \neq 0$ . Daher gibt es nach Satz 4.6 ein Intervall $I_0 \subset I$ mit $x_0 \in I_0$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I_0$ .
Es sei nun $x \in I_0$ . Dann gilt mit $g(x) = g(x_0) + (x - x_0) \cdot D_g(x)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} &= \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x) \cdot g(x_0)} = \frac{g(x_0) - (\ g(x_0) + (x - x_0) \cdot D_g(x)\ )}{g(x) \cdot g(x_0)} \\ &= (x - x_0) \frac{-D_g(x)}{g(x) \cdot g(x_0)} . \end{aligned}$$

Also ist $$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(x_0)} + (x - x_0) \frac{-D_g(x)}{g(x) \cdot g(x_0)} .$$

Nun ist die Funktion $h : I_0 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \frac{-D_g(x)}{g(x) \cdot g(x_0)}$$

in $x_0$ stetig, da auch $D_g$ und $g$ in $x_0$ stetig sind und $g(x_0) \neq 0$ auf $I_0$ .
Damit gilt unter den Voraussetzungen von (*iv*)

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x)}{g(x_0)^2} .$$

2. Teil: Nun wird der letzte Beweisteil mit der Produktregel kombiniert, denn $\frac{f}{g}$ läßt sich ja als Produkt $f \cdot \frac{1}{g}$ schreiben. Nach der Produktregel folgt also

$$\begin{aligned} \left(f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)\right)'(x_0) &= f'(x_0) \frac{1}{g(x_0)} + \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \cdot f(x_0) \\ &= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{(g(x_0))^2} . \end{aligned}$$

∎

<u>Satz 5.4:</u>
Kettenregel
Es seien $I_1 := [a, b]$ , $I_2 := [c, d]$ , $g : I_1 \to \mathbb{R}$ , $f : I_2 \to \mathbb{R}$ , so dass für alle $x \in I_1$ $g(x) \in I_2$ . Weiterhin seien $g$ in $x_0$ und $f$ in $t_0 := g(x_0)$ differenzierbar. Dann ist auch $f \circ g$ in $x_0$ differenzierbar und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \ .$$

Beweis:

Nach Voraussetzung und Satz 5.1 gibt es Funktionen $D_g$ auf $I_1$ bzw. $D_f$ auf $I_2$, die in $x_0$ bzw. in $t_0 := g(x_0)$ stetig sind und mit denen gilt

(*) $$g(x) = g(x_0) + (x - x_0) \cdot D_g(x) \quad \text{für } x \in I_1 \text{ und } D_g(x_0) = g'(x_0) \ ,$$

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0) \cdot D_f(t) \quad \text{für } t \in I_2 \text{ und } D_f(t_0) = f'(t_0) \ .$$

Es sei gemäß Satz 4.12 $I_3 := g(I_1)$ . Nach Voraussetzung ist $I_3 \subset I_2$ und $t_0 \in I_3$ .
Dann gilt erst recht für $t \in I_3$

(**) $$f(t) = f(t_0) + (t - t_0) \cdot D_f(t) \ .$$

Nun werden die Ausdrücke in (*) und (**) miteinander verknüpft und $g(x) := t$ gesetzt:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(t) = f(t_0) + (t - t_0) \cdot D_f(t) \\
&= f(t_0) + (g(x) - t_0) \cdot D_f(g(x)) \\
&= f(g(x_0)) + (g(x) - g(x_0)) \cdot D_f(g(x)) \\
&= f(g(x_0)) + (x - x_0) \cdot D_g(x) \cdot D_f(g(x)) \\
&= (f \circ g)(x_0) + (x - x_0) \cdot D_g(x) \cdot (D_f \circ g)(x) \ .
\end{aligned}$$

Nach Satz 4.9 sind Produkte, Summen und Verkettungen stetiger Funktionen wieder stetig. Damit ist $D_g \cdot (D_f \circ g)$ stetig in $x_0$ . Nach Satz 5.1 folgt nun schließlich die Behauptung mit

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x_0) &= D_g(x_0) \cdot (D_f \circ g)(x_0) \\
&= g'(x_0) \cdot f'(g(x_0)) \ .
\end{aligned}$$

∎

Damit sind jetzt alle rationalen Funktionen differenzierbar.

Warum reicht folgende Umformung nicht für den Beweis der Kettenregel:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

in Leibniz'scher Schreibweise:

$$\frac{d\ f \circ g}{d\ x} = \frac{d\ f \circ g}{d\ g} \cdot \frac{d\ g}{d\ x} \ .$$

Beispiele 5.4:

*Mathematica* kennt die Differentiationsregeln, auch von speziellen Funktionen. `D` ist der *Mathematica*–Ausdruck für die Differentation:

$$d_0 = D\left[\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, x\right]$$

$$-\frac{(1+n)\,x^n}{1-x} + \frac{1-x^{1+n}}{(1-x)^2}$$

$$d_1 = D\left[\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu, x\right]$$

$$\frac{(1+n)\,x^n}{-1+x} - \frac{-1+x^{1+n}}{(-1+x)^2}$$

$$d_2 = \sum_{\nu=0}^{n} D[x^\nu, x]$$

$$\frac{1 - x^n - n\,x^n + n\,x^{1+n}}{(-1+x)^2}$$

**Apart[d₂]**

$$\frac{1}{(-1+x)^2} + \frac{x^n\,(-1-n+n\,x)}{(-1+x)^2}$$

**d₃ = FullSimplify[d₂]**

$$\frac{1 + (-1 + n\,(-1+x))\,x^n}{(-1+x)^2}$$

**d₁ - d₃**

$$\frac{(1+n)\,x^n}{-1+x} - \frac{1 + (-1 + n\,(-1+x))\,x^n}{(-1+x)^2} - \frac{-1+x^{1+n}}{(-1+x)^2}$$

**Simplify[ d₁ - d₃ ]**

0

Später kommt als Beispiel die folgende Kombination von Funktionstermen vor. Die Ableitung selbst auszurechnen bereitet dann schon einige Mühe, nicht jedoch mit *Mathematica*:

$$g[x\_] := \frac{x^2}{1+x^2};$$

$$f[x\_] := \frac{5}{2}\,\mathrm{Cos}[2\,x]\;g\left[\mathrm{Cos}\left[\frac{4}{5}\,x\right]\right]\;\mathrm{Sin}\left[x + \mathrm{Sin}\left[\frac{4}{5}\,x\right]\right] + 1.85\,\mathrm{Exp}[-(7.85 - x)^2]$$

**D[f[x], x]**

$$3.7\,e^{-(7.85-x)^2}\,(7.85-x) + \frac{5\left(1+\frac{4}{5}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{4x}{5}\right]\right)\mathrm{Cos}\left[\frac{4x}{5}\right]^2\,\mathrm{Cos}[2\,x]\,\mathrm{Cos}\left[x+\mathrm{Sin}\left[\frac{4x}{5}\right]\right]}{2\left(1+\mathrm{Cos}\left[\frac{4x}{5}\right]^2\right)} +$$

$$\frac{4\,\mathrm{Cos}\left[\frac{4x}{5}\right]^3\,\mathrm{Cos}[2\,x]\,\mathrm{Sin}\left[\frac{4x}{5}\right]\,\mathrm{Sin}\left[x+\mathrm{Sin}\left[\frac{4x}{5}\right]\right]}{\left(1+\mathrm{Cos}\left[\frac{4x}{5}\right]^2\right)^2} -$$

$$\frac{4\,\mathrm{Cos}\left[\frac{4x}{5}\right]\,\mathrm{Cos}[2\,x]\,\mathrm{Sin}\left[\frac{4x}{5}\right]\,\mathrm{Sin}\left[x+\mathrm{Sin}\left[\frac{4x}{5}\right]\right]}{1+\mathrm{Cos}\left[\frac{4x}{5}\right]^2} - \frac{5\,\mathrm{Cos}\left[\frac{4x}{5}\right]^2\,\mathrm{Sin}[2\,x]\,\mathrm{Sin}\left[x+\mathrm{Sin}\left[\frac{4x}{5}\right]\right]}{1+\mathrm{Cos}\left[\frac{4x}{5}\right]^2}$$

**D[ Sin[x], x ]**

Cos[x]

```
D[ Cos[t], t]
```

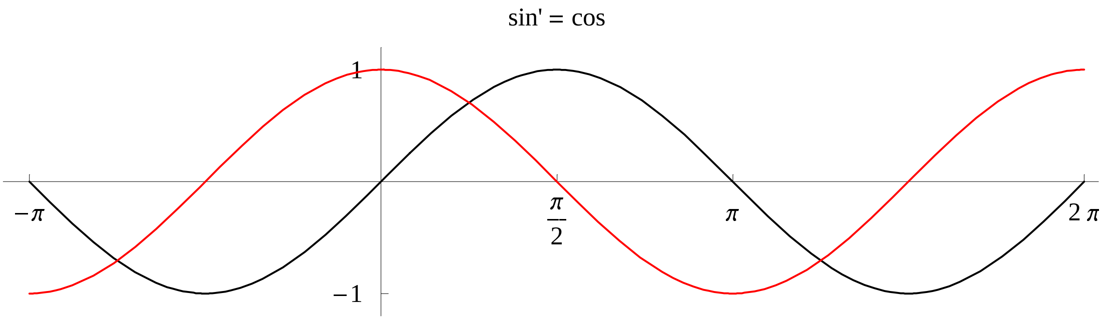
```
-Sin[t]
```

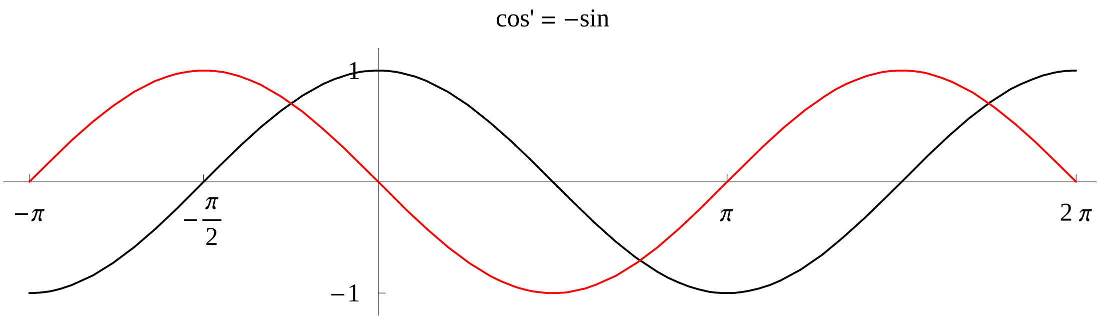
Die Differentiationsregeln für sin und cos sollen jetzt bewiesen werden:

Satz 5.5:
Es seien $I := [a, b]$ und $x \in I$ . Dann gilt:

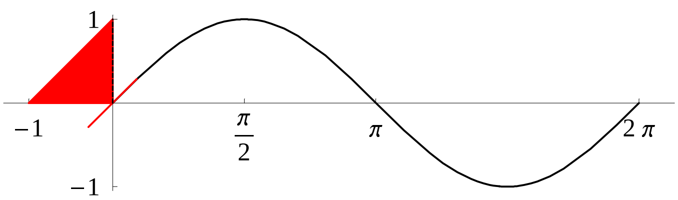
$$\sin'(x) = \cos(x) \text{ und } \cos'(x) = -\sin(x) .$$

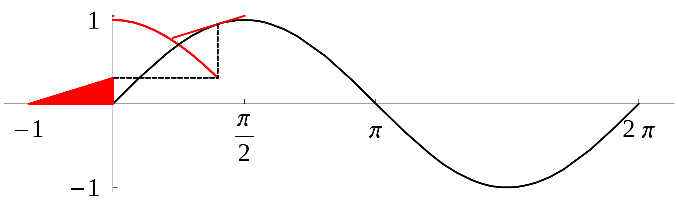
Insbesondere sind die Funktionen sin und cos stetig und differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ .

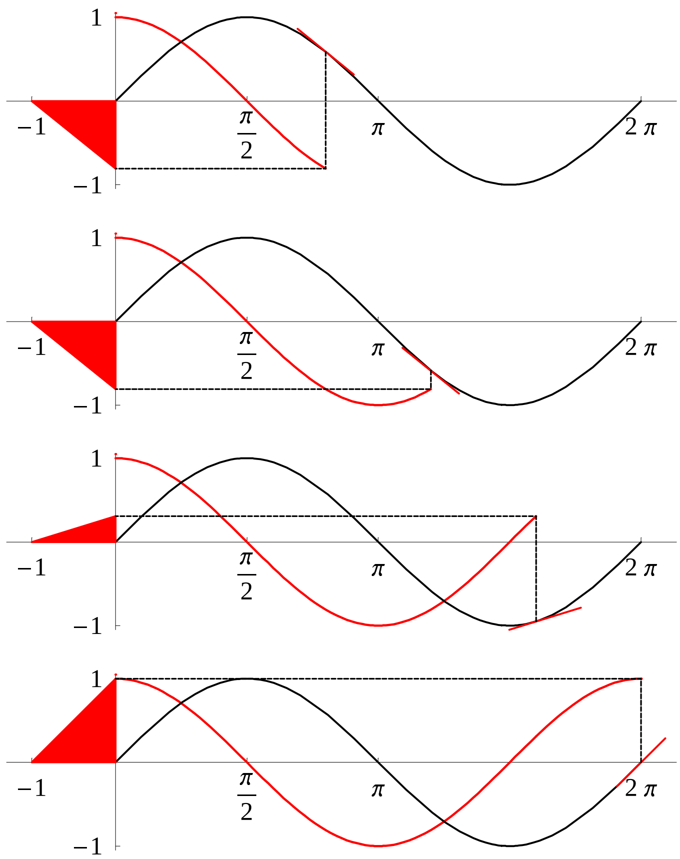



Einige Bilder aus einer Animation zur Ableitung von sin :






Beweis:

Es seien $x \in I$ und $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ so, dass $x + h \in I$.
Zu untersuchen ist der Differenzenquotient

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} .$$

Mit einem früher bewiesenen Additionstheorem folgt

(*) $$\begin{aligned} \sin(x+h) - \sin(x) &= \sin(x)\cdot\cos(h) + \cos(x)\cdot\sin(h) - \sin(x) \\ &= \sin(x)\cdot(\cos(h) - 1) + \cos(x)\cdot\sin(h) . \end{aligned}$$

Es bleiben also die Differenzenquotienten

$$\frac{\cos(h) - 1}{h} \quad \text{und} \quad \frac{\sin(h)}{h}$$

und deren Grenzwerte zu untersuchen.
Nach Satz 4.1 gilt

(**) $$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 .$$

Beim Beweis des Satzes 4.1 wurde die Ungleichung

$$1 - \tfrac{h^2}{2} < \cos(h) \leq 1$$

für $h \neq 0$ bewiesen. Daraus folgt

$$1 - \tfrac{h^2}{2} < \cos(h) < 1 + \tfrac{h^2}{2}$$

und $$-\tfrac{h^2}{2} < \cos(h) - 1 < \tfrac{h^2}{2},$$

d.h $$\left|\cos(h) - 1\right| < \tfrac{h^2}{2}$$

bzw. $$\left|\frac{\cos(h) - 1}{h}\right| < |\, h \,| ,$$

woraus $$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$$
folgt.

Nun werden die einzelnen Ergebnisse unter Beachtung der Zeile (*) und früherer Grenzwertsätze zusammengefügt.

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \sin(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot 1 \\
&= \sin(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sin(x)\cdot \frac{\cos(h)-1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos(x)\cdot \frac{\sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cdot(\cos(h)-1) + \cos(x)\cdot\sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cdot\cos(h) + \cos(x)\cdot\sin(h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
&= \sin'(x) .
\end{aligned}$$

Der Beweis für $\cos'(x) = -\sin(x)$ verläuft analog, da

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cdot\cos(h) - \sin(x)\cdot\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \frac{\cos(x)\cdot(\cos(h) - 1) - \sin(x)\cdot\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x)\,\frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x)\,\frac{\sin(h)}{h} .
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis für Satz 5.5 fertig.

■

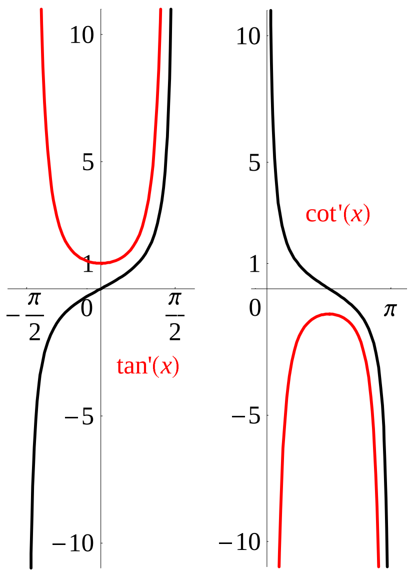
Als direkte Konsequenz folgt die Stetigkeit der Funktionen $\sin$ und $\cos$ : Nach Satz 5.2 sind bei $x$ differenzierbare Funktionen dort stetig. Also sind $\sin$ und $\cos$ stetig auf $I$ für jedes Intervall $I$ , also für alle reelle Zahlen.

Korrolar 5.1:

Falls $\cos(x) \neq 0$ , also für $x = (n + \tfrac{1}{2})\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$ , gilt $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ .

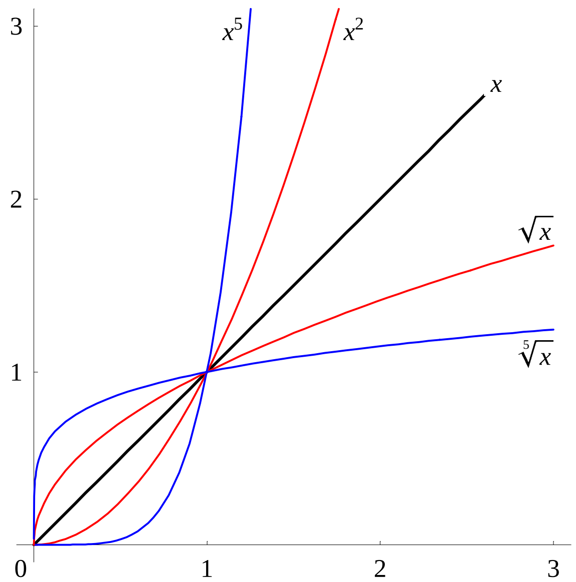
Falls $\sin(x) \neq 0$ , also für $x = n\cdot\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$ , gilt $\cot'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$ .

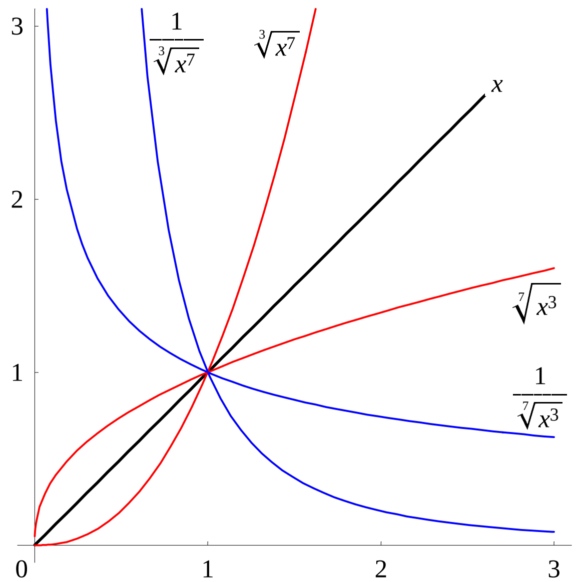
Der Beweis erfordert die Wahl geeigneter Intervalle $I$ und benutzt die Quotientenregel, da $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ , $\cot = \frac{\cos}{\sin}$ und $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ für alle $x$ .




Es sei daran erinnert, dass für $x > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ die Zahl $y$ die ist, für die $y^n = x^m$ gilt.

Für $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{Q}$ sei $f_\alpha(x) := x^\alpha$. Die nächsten beiden Grafiken zeigen Funktionsgraphen von $f_\alpha$ für einige $\alpha$ .




<u>Satz 5.7:</u>
Für $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{Q}$ sei $f_\alpha(x) := x^\alpha$ . Dann gilt $f_\alpha'(x) := \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ und $f$ ist stetig.

<u>Beweis:</u>

1. Fall: Für $\alpha = 0$ ist die Behauptung trivialerweise richtig.
2. Fall: Es sei $\alpha > 0$ . Es seien $x, x_0 > 0$ und $m, n \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha = \frac{m}{n}$ . Zu untersuchen ist der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{x^{\frac{m}{n}} - x_0^{\frac{m}{n}}}{x - x_0} \ .$$

Nun sei $u := x^{\frac{1}{n}}$ und $v := x_0^{\frac{1}{n}}$ gesetzt, also $u^n = x$ und $v^n = x_0$ . Also gilt mit $\lim\limits_{x \to x_0} u^n = v^n$ auch $\lim\limits_{x \to x_0} u = v$ (was leicht indirekt zu beweisen ist).
Damit folgt

$$(*) \qquad \frac{x^{\frac{m}{n}} - x_0^{\frac{m}{n}}}{x - x_0} = \frac{u^m - v^m}{u^n - v^n} = \frac{u - v}{u - v} \cdot \frac{(u^{m-1} + u^{m-2} v + u^{m-3} v^2 + \cdots + u\ v^{m-2} + v^{m-1})}{(u^{n-1} + u^{n-2} v + u^{n-3} v^2 + \cdots + u\ v^{n-2} + v^{n-1})}$$

und also

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^{\frac{m}{n}} - x_0^{\frac{m}{n}}}{x - x_0} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} (u^{m-1} + u^{m-2} v + u^{m-3} v^2 + \cdots + u\ v^{m-2} + v^{m-1})}{\lim\limits_{x \to x_0} (u^{n-1} + u^{n-2} v + u^{n-3} v^2 + \cdots + u\ v^{n-2} + v^{n-1})} =$$
$$= \frac{m \cdot v^{m-1}}{n \cdot v^{n-1}} = \frac{m}{n} v^{m-n} = \frac{m}{n} \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{m-n} = \frac{m}{n} x_0^{\frac{m}{n}-1} = \alpha \cdot x_0^{\alpha-1} \ .$$

Damit folgt die Behauptung für $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ .

3. Fall: Es sei $\alpha < 0$ , also $-\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Mit $\beta := -\alpha$ gilt $f_\alpha(x) := x^\alpha = \frac{1}{x^\beta}$ und die Behauptung folgt in diesem Falle durch Anwendung der Quotientenregel auf Fall 2 .

■

<u>Zusammenfassung einiger Ergebnisse</u>
<u>über Differentiation und Stetigkeit der "elementaren" Funktionen</u>

Mit Satz 5.3 (*iii*), also der Produktregel, folgt induktiv:

Die Funktionen $f_n$ mit $f_n(x) := x^n$ wobei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ , sind differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und daher dort auch stetig.
Es gilt $\qquad f_n{}'(x) := n \cdot x^{n-1}$ .

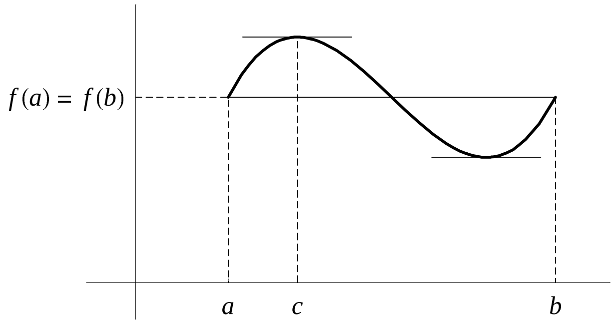
Mit Satz 5.3 (*i*) und (*ii*), folgt dann auch, dass Polynomfunktionen, also Funktionen $p$ , der Gestalt $p(x) := \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot x^\nu$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$, überall differenzierbar sind.
Es gilt $\qquad p'(x) := \sum\limits_{\nu=0}^{n} \nu \cdot a_\nu \cdot x^{\nu-1}$ .

Mit Satz 5.3 (*iv*), also der Quotientenregel, folgt weiter mit $q(x) := \sum\limits_{\nu=0}^{m} b_\nu \cdot x^\nu$ für $m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ , dass auch rationale Funktionen $\frac{p}{q}$ bei $x_0$ mit $q(x_0) \neq 0$ differenzierbar sind.

Schließlich folgt mit der Kettenregel (Satz 5.4), dass "zusammengesetzte", "verkettete" Funktionen $f$ (auf einem Intervall), etwa der Gestalt $f(x) := \sin^n(\, p(\, q(\cos(x))\,)\,)$ , differenzierbar sind.

<u>Satz 5.8:</u>
Satz von Rolle (Michel Rolle, 1652 – 1719) (1691)

Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ . $f$ sei auf ganz $I$ stetig und differenzierbar für alle $x \in\ ]a, b[$ .
Es sei $f(a) = f(b)$ , dann gibt es ein $c \in\ ]a, b[$ mit $f'(c) = 0$ .




Beweis:
Da $f$ auf $I$ stetig, besitzt nach Satz 4.12 $f$ auf $I$ ein Maximum und ein Minimum, d.h. es gibt $u, o \in [a, b]$ mit $f(u) \le f(x) \le f(o)$ für alle $x \in I$ .
1. Fall:
$f(u) = f(o) = f(a)$ ; dann ist $f$ konstant und $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$ .
2.Fall: Nun sei angenommen, dass $f(a) = f(b) < f(o)$ , $f$ also ein "echtes" Maximum besitze. Da $a \neq o$ und $b \neq o$ , gilt $o \in\ ]a, b[$ . Sein nun $c := o$ .
Für $h > 0$ , so dass noch $c + h \in I$ , folgt

(*) $$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \le 0$$

und für $h < 0$ mit $c + h \in I$ folgt

(**) $$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \ge 0$$

Nun existiert nach Voraussetzung

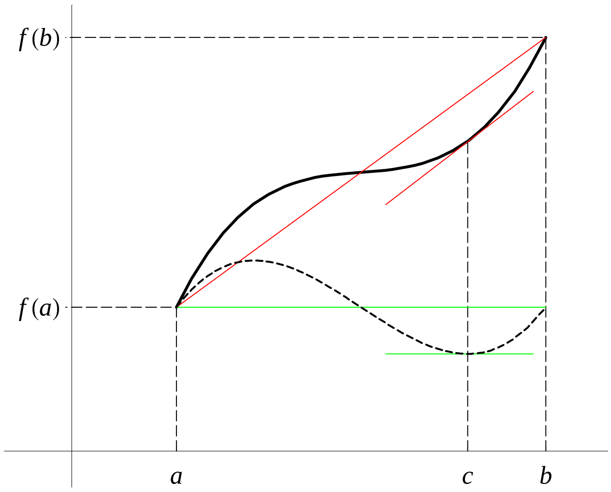
$$f'(c) := \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} .$$

Nach (*) folgt $f'(c) \le 0$ und nach (**) $f'(c) \ge 0$ , also gilt $f'(c) = 0$ .
Der weitere Beweis verläuft analog für den dritten Fall $f(u) < f(a) = f(b)$ .

■

Satz 5.9:
Mittelwertsatz
Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ . $f$ sei auf ganz $I$ stetig und differenzierbar für alle $x \in\ ]a, b[$ .
Dann gibt es ein $c \in\ ]a, b[$ mit

$$f'(c) := \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{bzw.} \quad f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a) .$$




Der Beweis folgt einfach mit dem Satz von Rolle durch geschickte Definition einer Hilfsfunktion.

Für $x \in I$ sei $g(x) := f(x) - (x-a)\,\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

Dann ist $g$ auf $I$ stetig und auf $]\,a, b\,[$ differenzierbar.
Weiterhin gilt

$$g(a) = f(a)\ ,$$
$$g(b) = f(b) - (b-a)\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f(a) = g(a)\ .$$

Damit erfüllt die Funktion $g$ auf $I$ die Voraussetzungen des Satzes von Rolle: Also gibt es ein $c \in\, ]\,a, b\,[$ mit $g'(c) = 0$ .

Nun ist
$$g'(x) := f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ ,$$

woraus die Behauptung des Satzes folgt.

∎

Die Ableitung einer konstanten Funktion ist Null. Es gilt auch eine Umkehrung:

Satz 5.10:
Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ . $f$ sei auf ganz $I$ stetig, weiterhin differenzierbar für alle $x \in\, ]\,a, b\,[$ und für diese $x$ gelte $f'(x) = 0$ . Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ , so dass $f(x) = c$ auf $I$ .

Beweis:
Es seien $x_0$ fest und $x$ beliebig aus $]\,a, b\,[$ . Nach dem Mittelwertsatz (Satz 5.9) gilt dann für ein $c_0 \in\, ]\,a, b\,[$

$$f(x) - f(x_0) = f'(c_0)\cdot(x - x_0) = 0\ .$$

Also gilt $f(x) = f(x_0)$ für alle $x \in\, ]\,a, b\,[$ . Da $f$ stetig auf $I$ , folgt auch $f(a) := \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x_0) = f(x_0)$ und analog $f(b) = f(x_0)$ . Nun wird $c := f(x_0)$ gesetzt.

∎

Korrolar 5.2:
Es seien $I := [a, b]$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ . $f, g$ seien auf ganz $I$ stetig und differenzierbar für alle $x \in\, ]\,a, b\,[$ und dort gelte $f'(x) = g'(x)$ .

Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = g(x) + c$ auf $I$.

Beweis: Wende den Satz 5.10 auf $f - g$ an.

■

In Analogie der Monotonie von Folgen gibt es die

Definition 5.3:
MONOTONIE von Funktionen.
Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$.
$f$ heißt STRENG MONOTON WACHSEND,
wenn für alle $x, y \in I$
mit $x < y$ auch $f(x) < f(y)$
gilt.
Entsprechend heißt $f$ STRENG MONOTON FALLEND,
wenn für alle $x, y \in I$
mit $x < y$ nun $f(x) > f(y)$
gilt.
$f$ heißt MONOTON WACHSEND (bzw. FALLEND),
wenn für alle $x, y \in I$
mit $x \le y$ auch $f(x) \le f(y)$ (bzw. $f(x) \ge f(y)$ )
gilt.

Satz 5.12:
Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$. $f$ sei auf ganz $I$ stetig und differenzierbar für alle $x \in \,]a, b[$.
Gilt für alle $t \in \,]a, b[$

$f'(t) > 0$, so ist $f$ streng monoton wachsend auf $I$,
$f'(t) < 0$, so ist $f$ streng monoton fallend auf $I$,
$f'(t) \le 0$, so ist $f$ monoton wachsend auf $I$,
$f'(t) \le 0$, so ist $f$ monoton fallend auf $I$.

Beweis im Falle des streng monotonen Wachsens. Die anderen Fälle beweisen sich analog.
Es seien $x, y \in I$ mit $x < y$. Es sei $I_1 := [x, y]$. Dann ist $f$ auf $I_1$ stetig und in $]x, y[$ differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $c \in \,]x, y[\, \subset \,]a, b[$

mit $$f'(c) := \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0,$$

d.h. $$f(x) < f(y).$$

■

Satz 5.13:
Approximierende Polynomfunktionen für sin und cos .
Es sei $x \ge 0$. Dann gelten die folgenden Ungleichungen:

$$\sin(x) \le x,$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} \le \cos(x) \le 1 ,$$

$$x - \frac{x^3}{3!} \le \sin(x) \le x ,$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} \le \cos(x) \le 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} ,$$

$$x - \frac{x^3}{3!} \le \sin(x) \le x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} .$$

Mit den Beziehungen $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$ lassen sich diese Ungleichungen entsprechend auch für negative $x$ formulieren.

Beweis:
Für $x \ge 0$ sei $f_1(x) := x - \sin(x)$ . Dann gilt $f_1'(x) = 1 - \cos(x) \ge 0$ , da $|\cos(x)| \le 1$. Mit $f_1(0) = 0$ folgt nach Satz 5.12 monotones Wachsen von $f_1$ , d.h. $x - \sin(x) \ge 0$ . Daraus folgt die erste der obigen Ungleichungen.

Es sei nun $f_2(x) := -1 + \frac{x^2}{2!} + \cos(x)$ . Dann ist $f_2(0) = 0$ und $f_2'(x) = x - \sin(x) = f_1(x) \ge 0$ . Also ist auch $f_2$ monoton wachsend, also $-1 + \frac{x^2}{2!} + \cos(x) \ge 0$ . Damit folgt die zweite obige Ungleichung.

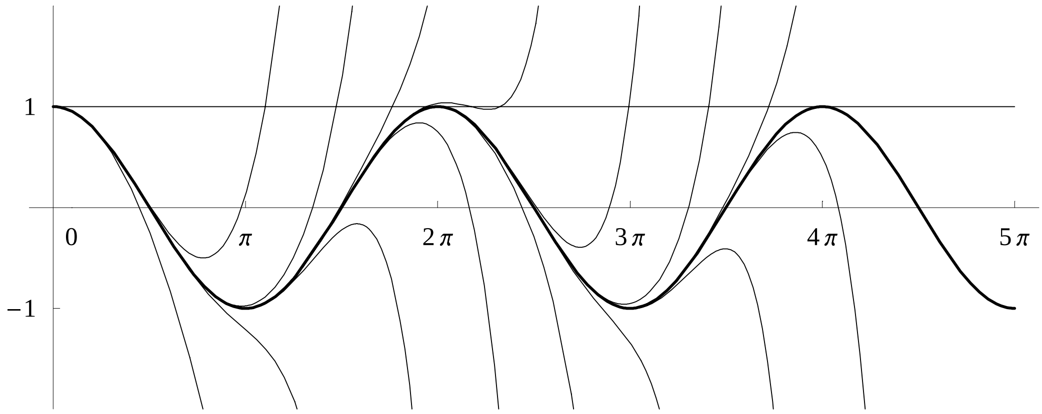
Nun wird $f_3(x) := -x + \frac{x^3}{3!} - \sin(x)$ gesetzt. Wieder ist $f_3(0) = 0$ und $f_3'(x) := -1 + \frac{x^2}{2!} + \cos(x) = f_2(x) \ge 0$ . Damit folgt analog die vierte obige Ungleichung.

Mit $f_4(x) := -1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cos(x)$ geht das Verfahren weiter.

Der Beweis läßt sich auf negative $x$ übertragen

■

Die folgende Grafik zeigt Teile des Graphen der Cosinus-Funktion und approximierender Polynomfunktionen:




■

Es ist beweisbar, dass für alle $x \in \mathbb{R}$
$$\sin(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \quad \text{und} \quad \cos(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2}}{(2\nu)!} .$$

Definition 5.4:
ZWEITE ABLEITUNG, n-te ABLEITUNG
Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ und differenzierbar auf $I$ . Wie üblich sei die (erste) Ableitung von $f$ auf $I$ mit $f'$ bezeichnet. Die Funktion $f'$ sei wiederum auf $I$ differenzierbar. Dann heißt die Ableitung von $f'$ die ZWEITE

ABLEITUNG von $f$:

$$f'' := (f')' .$$

Entsprechend werden für $n \in \mathbb{N}$ n-te ABLEITUNGEN von $f$ definiert und mit $f^{(n)}$ bezeichnet. Wenn die $n$-te Ableitung von $f$ auf $I$ existiert, sagt man auch : $f$ ist auf $I$ $n$-mal differenzierbar

Beispiele 5.5:

Es sei für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ $f_k(x) := x^k$ .

Dann gilt $f_k'(x) := k \cdot x^{k-1}$ , $f_k''(x) := (k-1) \cdot k \cdot x^{k-2}$

Weiterhin gilt auf $\mathbb{R}$ : $\sin' = \cos$ , $\sin'' = -\sin$ ,
$\cos' = -\sin$ , $\cos'' = -\cos$ ,
und damit $\sin^{(4)} = \sin$ , $\cos^{(4)} = \cos$ .

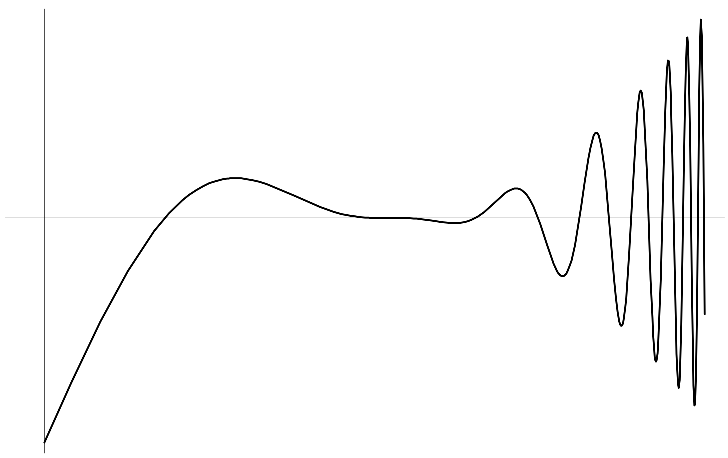
Definition 5.5:

RELATIVES MAXIMUM, RELATIVES MINIMUM

Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ . $x_0 \in \,]a, b[$ heißt RELATIVES MAXIMUM von $f$, falls es eine Umgebung $J$ von $x_0$ (also ein Intervall $J := [c, d]$ mit $x_0 \in J \subset I$ ) gibt, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in J$ .
Analog heißt $x_0 \in \,]a, b[$ ein RELATIVES MINIMUM von $f$, wenn $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x$ aus einer Umgebung von $x_0$ gilt.
Falls $f$ auf $I$ differenzierbar ist, dann ist es auch auf jedem Teilintervall $J$ von $I$ differenzierbar. Entsprechend dem Beweis zum Satz von Rolle folgt, falls $x_0$ relatives Maximum (bzw. Minimum) von $f$ ist, dass $f'(x_0) = 0$ gilt.

Beispiel 5.6:

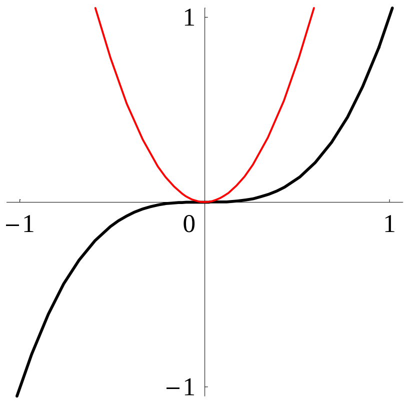
Hier ein Graph einer Funktion, die mehrere relative Minima und Maxima hat:



Die Umkehrung der letzten Aussage kann falsch sein, wie etwa gezeigt wird durch das folgende

Beispiel 5.7:

Es sei $f(x) := x^3$ für $x \in [-1, 1]$ . Es ist $f'(x) = 3x^2$ und damit $f(0) = 0$ . Aber Null ist weder relatives Minimum oder Maximum, denn für $x > 0$ ist auch $x^3 > 0$ und für $x < 0$ ist auch $x^3 < 0$ .




Mit der ersten Ableitung einer Funktion allein können also relative Minima und Maxima noch nicht bestimmt werden.

Satz 5.14:

Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ . Es sei $f$ zweimal differenzierbar auf $I$ .
Es sei $x_0 \in \,]a, b[$ und es gelte $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ . Dann ist $x_0$ ein relatives Maximum von $f$ .
Es sei $x_0 \in \,]a, b[$ und es gelte $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ . Dann ist $x_0$ ein relatives Minimum von $f$ .

Beweis:

Es seien $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ .

Da $$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)}{h} < 0 ,$$

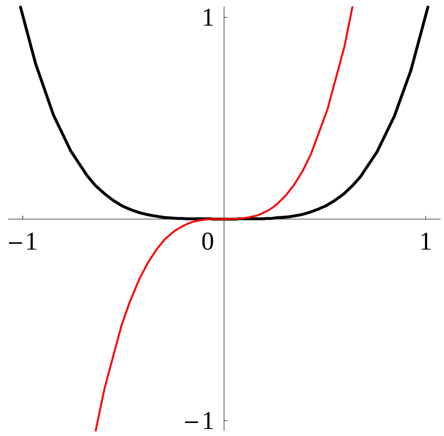
gibt es eine Umgebung $J$ von $x_0$ , in der $\frac{f'(x_0+h)}{h} < 0$ . Es sei nun $h > 0$ und $(x_0 + h) \in J$ . Dann ist $f'(x_0 + h) < 0$ . Ist dagegen $h < 0$ und $(x_0 + h) \in J$ , so folgt $f'(x_0 + h) > 0$ . Nach Satz 5.2 fällt damit $f$ rechts von $x_0$ und steigt links von $x_0$ . Damit liegt bei $x_0$ ein relatives Maximum von $f$ .
Der Beweis für die zweite Behauptung des Satzes 5.14 folgt analog.

■

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ zutreffen, dann können wieder Schwierigkeiten auftreten, wie die nächsten Beispiele zeigen.

Beispiel 5.8:

Es sei $f(x) := x^4$ für $x \in [-1, 1]$ . Dann gilt $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ . $f$ hat bei Null ein Minimum und $-f$ hat bei Null ein Maximum.

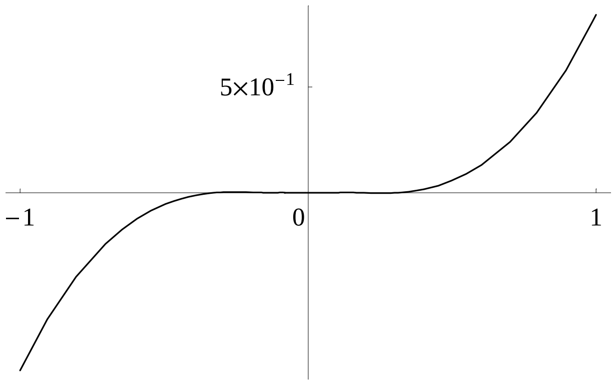



Beispiel 5.9:

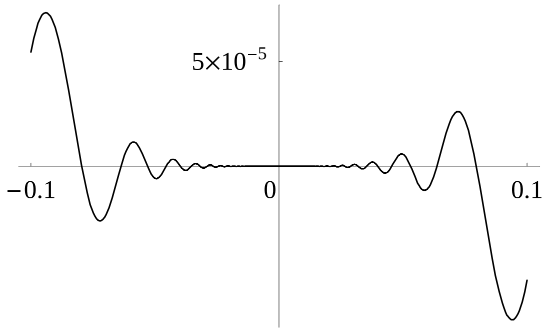
Es sei $\varphi(x) := \begin{cases} x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ .

Hier gilt (Übungsaufgabe) $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ .

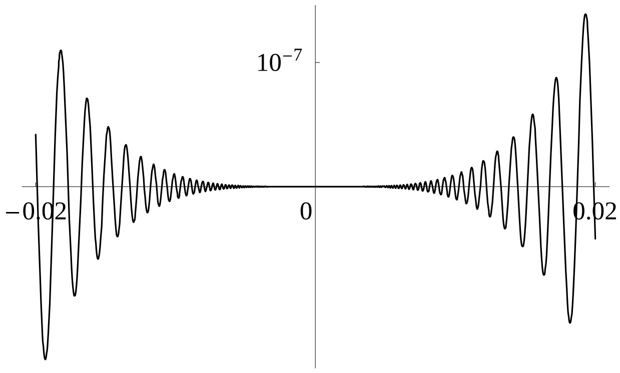
Bei Null liegt aber weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum von $\varphi$ , denn der Graph von $\varphi$ schneidet die $x$–Achse in jeder Umgebung von Null beliebig oft.

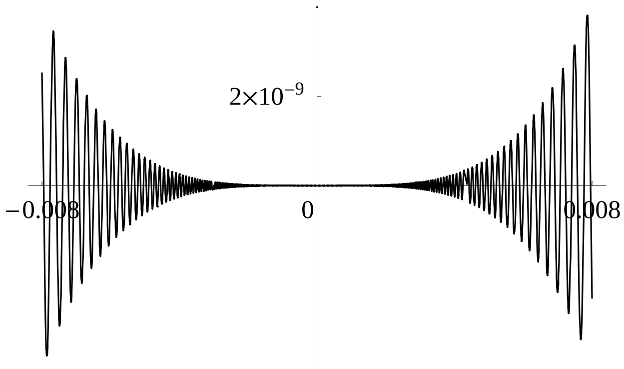


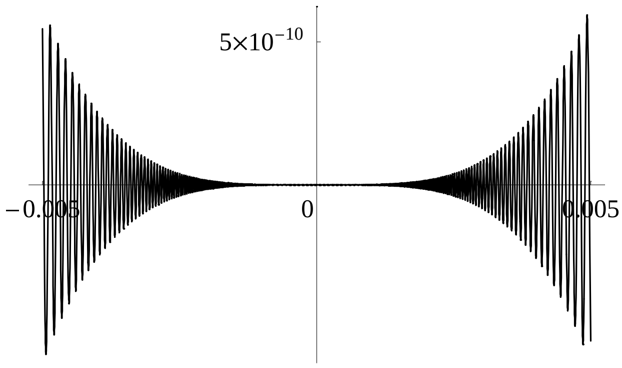

Diese Grafik sieht ganz harmlos aus. Doch sie läßt das Wesentliche nicht erkennen! Der Darstellungsbereich muss verkleinert werden:




So wurden erste Oszillationen sichtbar. Die nächsten Bilder versuchen noch kleinere Bereiche zu zeigen.


10^−7
−0.02
0
0.02


2×10^−9
−0.008
0
0.008


5×10^−10
−0.005
0
0.005