■ 6. Integration

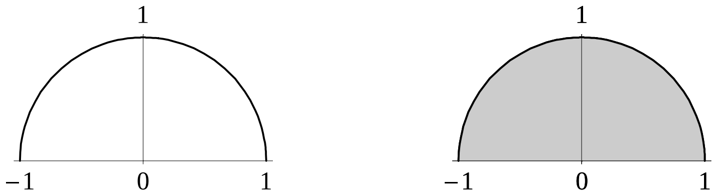
Materialien zur Vorlesung **Elementare Analysis**, Wintersemester 2003 / 4

6.1 Integrale

Wie kann der Flächeninhalt eines Kreises berechnet werden? Das war eine Fragestellung zu Beginn dieser Vorlesung. Die Kreisgleichung für einen Kreis mit Radius Eins und dem Mittelpunkt $(0, 0)$ lautet

$$x^2 + y^2 = 1 \ .$$

Nach y aufgelöst ergibt sich $y = \sqrt{1 - x^2}$ oder $y = -\sqrt{1 - x^2}$.
Es sei nun für $x \in [-1, 1]$ die Funktion f definiert durch $f(x) := \sqrt{1 - x^2}$.
Den Graphen von f sehen Sie im linken Bild:



Es entspricht unserem anschaulichen Verständnis, die Fläche "unter" dem Graphen von f (rechtes Bild) als Halbkreis zu interpretieren und dieser Fläche den Wert $\frac{\pi}{2}$ zuzuordnen. Diese geometrischen Vorstellungen führen zu den Begriffen Integration und Integral einer Funktion.

Definition 6.1:
INTEGRAL einer positiven, stetigen Funktion
Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Es gelte $f(x) \geq 0$ für $x \in I$. Der Flächeninhalt der durch die x-Achse, die Geraden $x = a$ und $x = b$ sowie durch den Graphen von f begrenzten Fläche wird das INTEGRAL von f über dem Intervall $[a , b]$ genannt;
in Zeichen

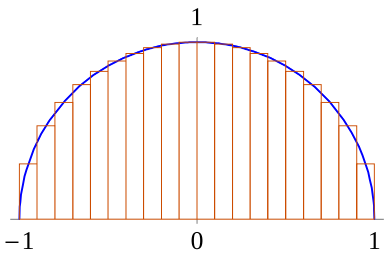
$$\int_a^b f(t)\, dt \ .$$

a bzw. b heißen untere bzw. obere Integrationsgrenze. t heißt die Integrationsvariable. Sie kann auch x oder t oder u genannt werden und umbenannt werden, so wie die Summationsvariable ν bei Summen $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ auch umbenannt werden kann, ohne dass sich der Wert der Summe ändert:

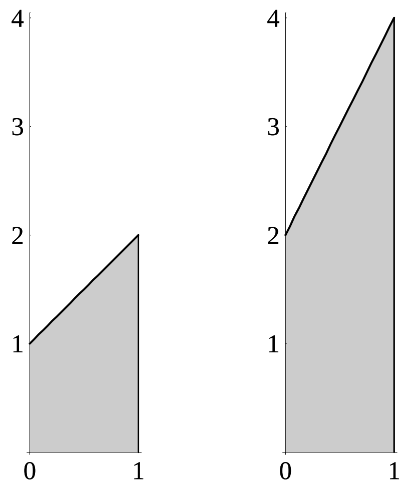
$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = \sum_{\mu=0}^{n} a_\mu \ ; \quad \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(x)\, dx \ .$$

Das Integralzeichen $\int$ ist ein stilisiertes S . Das kommt von **S**umme. Das Integralzeichen wurde am 29. 10. 1675 von Gottfried Wilhelm Leibniz in einem Brief eingeführt. Das Zeichen $\int_a^b$ wurde 1822 zuerst von Jean Baptiste Fourier (1768 –1830) benutzt.

Eine andere Möglichkeit Integrale zu definieren, besteht darin – anschaulich gesprochen – "die Fläche in kleine Streifen zu zerschneiden" und die Flächeninhalte dieser Streifen aufzusummieren. Von dieser Summe kommt das S , das dann zum Integralzeichen mutierte. Später wird darauf nochmals kurz eingegangen.



Zum Kennenlernen einiger Eigenschaften des oben definierten Integrals seien auf $I := [0, 1]$ die Funktionen f_1, f_2 betrachtet, wobei $f_1(x) := x + 1$, $f_2(x) := 2\,(x + 1)$, also $f_2 = 2 \cdot f_1$ sei.



Es ist geometrisch klar, dass $\int_0^1 f_2(t)\,dt = \int_0^1 2 \cdot f_1(t)\,dt = 2 \cdot \int_a^b f_1(t)\,dt$.

Es gilt auch in anderen Fällen für $\lambda > 0$ $\int_a^b \lambda \cdot f(t)\,dt = \lambda \cdot \int_a^b f(t)\,dt$.

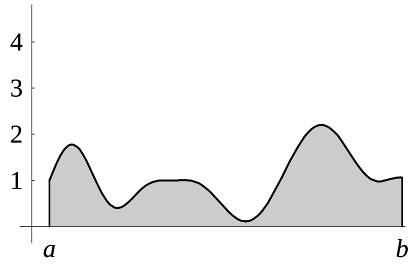
Bei Davis, Bill; Porta, Horacio; Uhl, Jerry
Calculus&*Mathematica*
Reading: Addison-Wesley, 1994

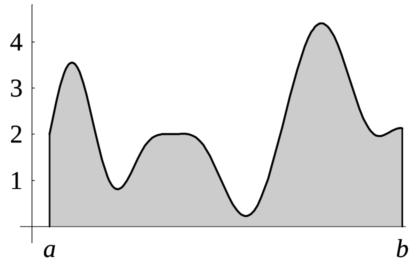
fand ich eine Funktion ψ , die in einigen folgenden Grafiken mit leichten Variationen benutzt wird.
Mit der Hilfsfunktion $\varphi(x) := \frac{x^2}{1 + x^2}$ für reelle x läßt sich ψ so darstellen:

$$\psi(x) := \frac{5}{2}\, 2 \cos(2\,x)\ \varphi(\cos(\tfrac{4}{5}\,x))\sin(x + \sin(\tfrac{4}{5}\,x)) + \frac{17}{20}\, e^{-(1.85-x)^2} .$$

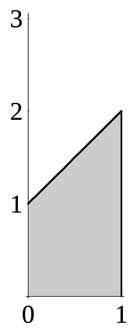
Diese Funktion wird noch durch additive bzw. multiplikative Konstanten geeignet variiert.

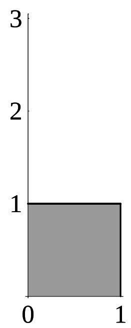
Hier die Grafiken für $\int_a^b \psi(t)\,dt$ und $2 \cdot \int_a^b \psi(t)\,dt$.

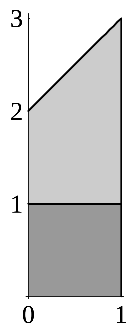




Nun seien auf $I := [0, 1]$ die Funktionen f_1 , f_2 betrachtet, wobei $f_1(x) := x + 1$, $f_2(x) := 1$.



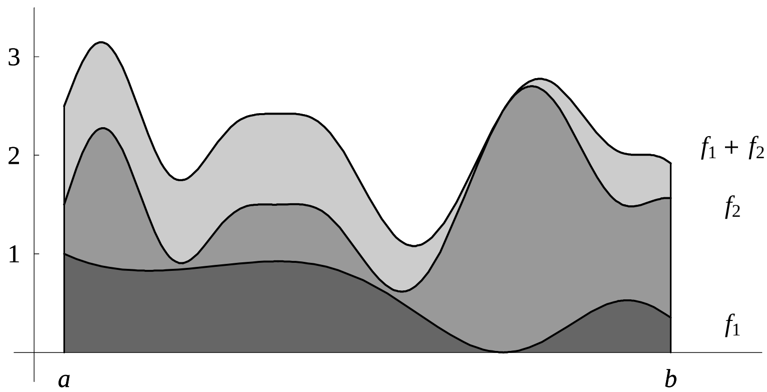




Die Graphen motivieren die Beziehung

$$\int_0^1 (\, f_1(t) + f_2(t)\,)\,dt = \int_0^1 f_1(t)\,dt + \int_0^1 f_2(t)\,dt \;,$$

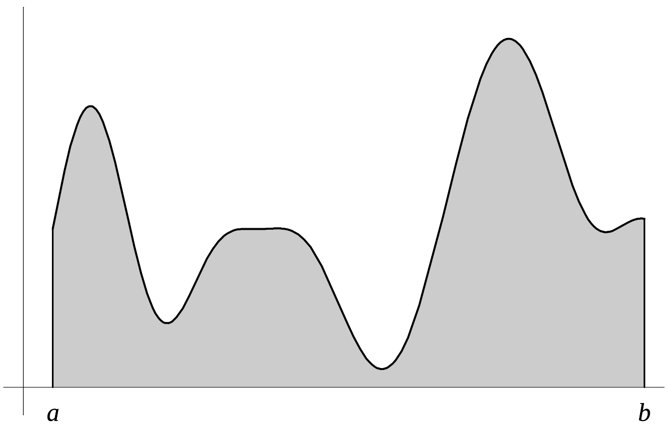
was auch bei nicht so einfachen Funktionen gilt.

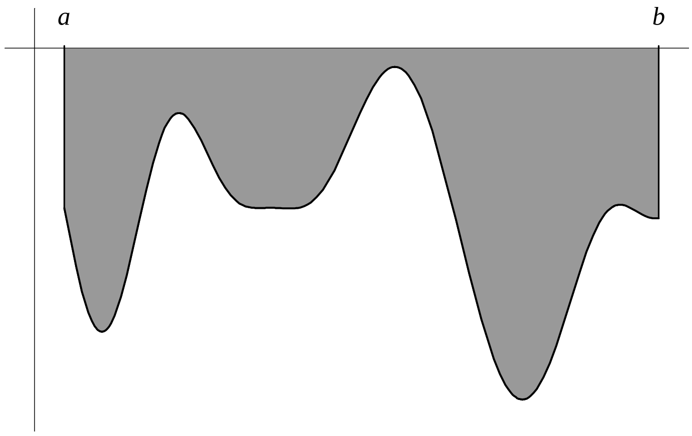


Der Funktion $\operatorname{nix}(x) := 0$ für $x \in [a, b]$ wird das Integral Null zugeordnet:

Auch das ist geometrisch sinnvoll.

Wenn nun f eine Funktion mit positiven Werten ist, welches Integral ist für die Funktion $-f$ sinnvoll?



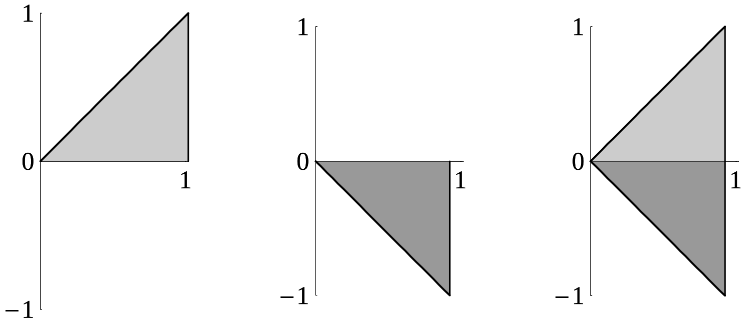


Wenn auch hier das Integral bloß ein Maß für den Flächeninhalt sein sollte, so ließe sich wieder eine positive Zahl für ein solches Integral $\oint$ zuordnen. Man käme dann jedoch zu Widersprüchen: Mit $f_1(x) := x$, $f_2(x) := -x$ und $f_3(x) := 0$ für $x \in [0, 1]$ würde folgen:

$$0 = \oint_0^1 f_3(t)\,dt = \oint_0^1 (f_1(t) + f_2(t))\,dt \neq \oint_0^1 f_1(t)\,dt + \oint_0^1 f_2(t)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 .$$

Dieser Widerspruch löst sich auf, wenn die Fläche unterhalb der x-Achse negativ bewertet wird, also "negative Flächeninhalte" definiert werden:

$$0 = \int_0^1 f_3(t)\,dt = \int_0^1 (f_1(t) + f_2(t))\,dt = \int_0^1 f_1(t)\,dt + \int_0^1 f_2(t)\,dt = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0 \ .$$



So läßt sich jetzt sofort (anschaulich) das Integral für stetige Funktionen auf einem Intervall definieren.

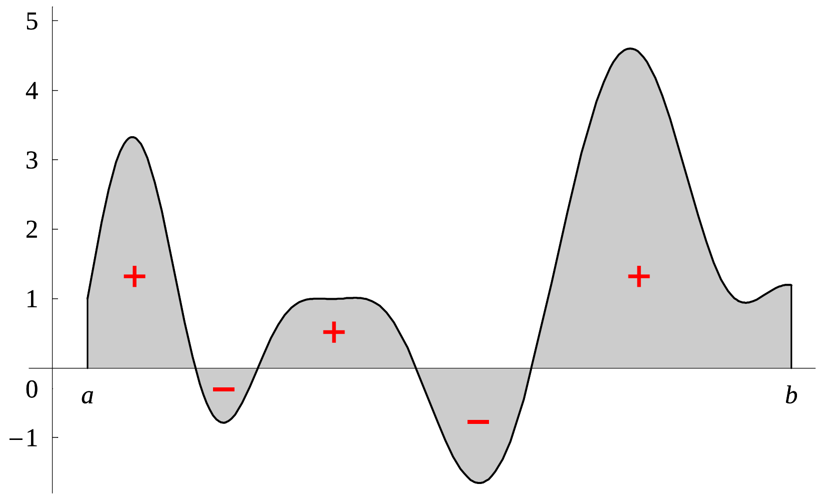
Definition 6.2:

INTEGRAL einer stetigen Funktion

Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann bezeichnet das Symbol

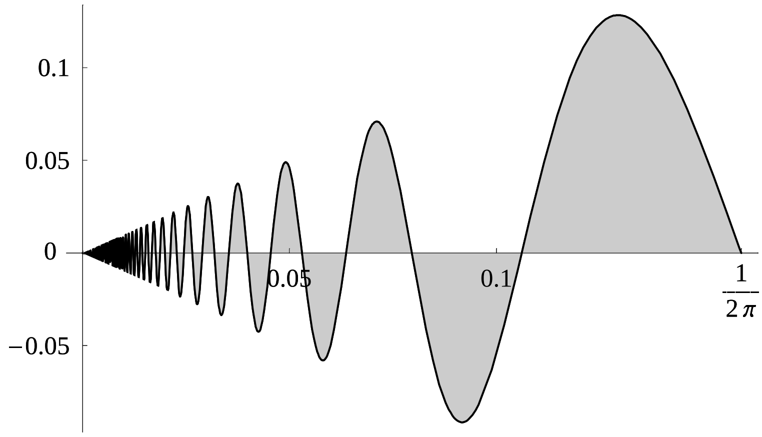
$$\int_a^b f(t)\,dt$$

eine reelle Zahl, die INTEGRAL von f über a, b genannt wird. Diese Zahl beschreibt ein Maß für den Flächeninhalt zwischen der x-Achse, den Geraden $x = a$ bzw. $x = b$ und dem Graphen von f.
"Flächenanteile", die unterhalb der x-Achse liegen, werden dabei negativ bewertet.

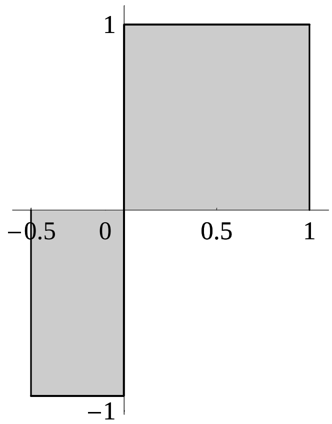


Beispiel 6.1:

Beachten Sie, dass ein solches Integral sich z.B. aus unendlich vielen "Flächenstücken" zusammensetzen kann. Es seien $a = 0$ und b geeignet und $f(t) := t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ für $t \neq 0$ mit $f(t) = 0$. Nach Beispiel 4.5 ist f stetig bei Null.



Für derart einfache Funktionen wie sign ist aber bisher noch kein Integral definiert, obwohl anschaulich eine Integraldefinition naheliegt.



Nun sollen für zwei Funktionen die Integrale ausgerechnet werden: Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $f_1(x) := c$, $f_2(x) := x$ für $x \in [a, b]$. Dann folgt anschaulich (siehe das nächste linke Bild)

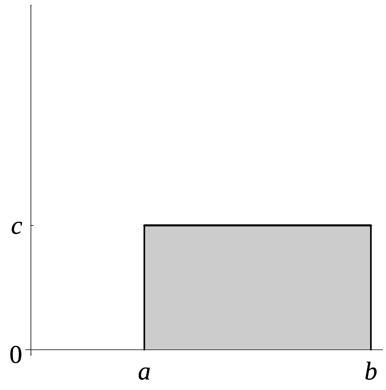
$$\int_a^b f_1(t)\,dt = \int_a^b c\,dt = c \cdot (b - a) \ .$$

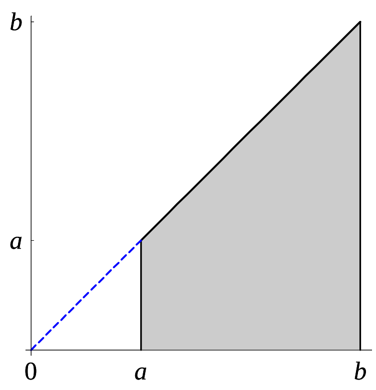
Falls $0 \leq a \leq b$, folgt (siehe rechtes Bild)

$$\int_a^b f_2(t)\,dt = \int_a^b t\,dt = \frac{1}{2}\,b^2 - \frac{1}{2}\,a^2 = \frac{1}{2}\,(b^2 - a^2) \ .$$

In allen anderen Fällen folgt auch

$$\int_a^b f_2(t)\,dt = \frac{1}{2}\,(b^2 - a^2) \ .$$





Beispiel 6.2:

Drei elementare Ungleichungen

Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Es sei $|\ f(t)\ | \le M$ für ein M und alle $t \in I$.

Dann gilt

(*i*) $$\int_a^b |\ f(t)\ |\, dt \ \le\ M \cdot (b - a)\ ,$$

(*ii*) $$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \ \le\ M \cdot (b - a)$$

und

(*iii*) $$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \ \le \int_a^b |\ f(t)\ |\, dt\ .$$

Zu (*i*):

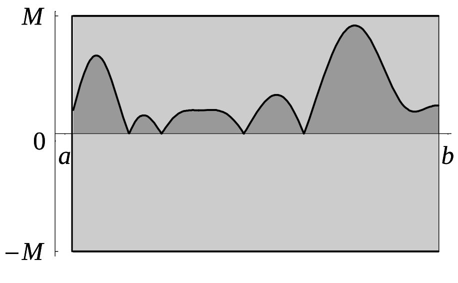
Gilt $|\ f(t)\ | \le M$, dann liegt die Fläche unter dem Graphen von $|\ f\ |$ in dem Rechteck mit den Ecken $(a, 0)$, $(b, 0)$, (b, M) , (a, M) und dessen Flächeninhalt ist $M \cdot (b - a)$.

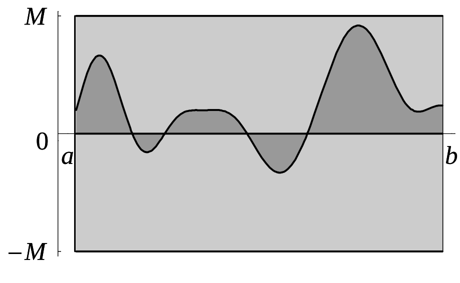
Zu (*ii*):

Gilt $-M \le f(t) \le M$, so liegt der Graph von f im Rechteck mit den Ecken $(a, -M)$, $(b, -M)$, (b, M) , (a, M) . Der Betrag der Fläche "unter" dem Graphen von f wird am größten, wenn die Werte $f(t)$ alle das gleiche Vorzeichen haben, dann können sich keine positiv und negativ bewerteten Flächenstücke "kompensieren". Also ist $M \cdot (b - a)$ wieder eine obere Schranke für das Integral.

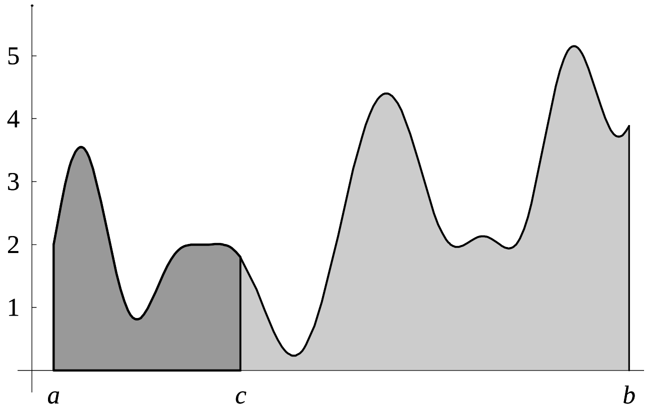
Zu (*iii*):

Wenn alle $f(t)$ das gleiche Vorzeichen besitzen, dann gilt in (*iii*) das Gleicheitszeichen. Im anderen Falle vergleichen Sie die beiden folgenden Bilder. Dann wird die Ungleichung anschaulich klar.





Was ist nun, wenn mit einem c , $a < c < b$ das Intervall $[a, b]$ in zwei Intervalle $[a, c]$ und $[c, b]$ zerlegt wird?



Anschaulich ist klar, dass dann auch

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

gilt. Damit folgt

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt - \int_c^b f(t)\,dt$$

und die rechte Seite motiviert nun

$$-\int_c^b f(t)\,dt = \int_b^c f(t)\,dt\ ,$$

denn dann folgt

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt\ ,$$

so dass mit dieser Interpretation die bisher benutzte Konvention "die untere Integrationsgrenze ist kleiner als die obere" fallengelassen werden kann.
Insbesondere folgt damit etwas, was anschaulich auch wieder klar ist ("eine Linie ist keine Fläche")

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0\ ,$$

da $$\int_a^a f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^a f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt = 0\ .$$

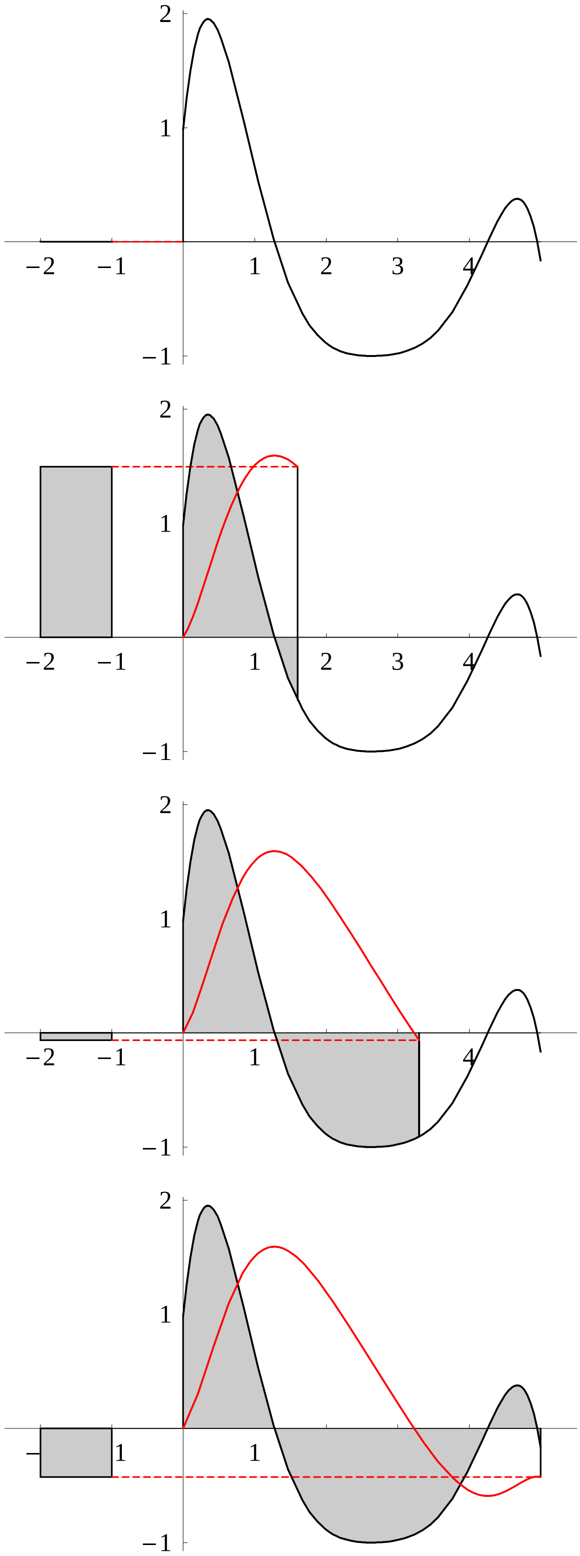
6.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Für eine auf $I := [a, b]$ reelle, stetige Funktion f wird nun eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt\ .$$

Mit dieser Funktion läßt sich der Zusammenhang von Differentiation und Integration herstellen.

Das *Mathematica*-Programm für die folgenden Grafiken bzw. für die entsprechende Animation ist eine Erweiterung des Progamms `AreaAccumulationMovie` von Packel, Wagon aus dem Buch Animating Calculus.



<u>Satz 6.1:</u>

Hauptsatz der Differentialrechnung und Integralrechnung, Teil 1

Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Weiterhin sei für $x \in I$ die Funktion F definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt\ .$$

Dann ist F auf I differenzierbar und es gilt dort $F' = f$.

Beweis:

Es sei ein beliebiges $x_0 \in I$ fest gewählt und $x \in I$ mit $x \neq x_0$. Die Behauptung läßt sich nun mit diesen Bezeichnungen so formulieren:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right) = 0\ .$$

Durch geschicktes Umformen wird diese Gleichung beweisbar sein:

Es gilt $\qquad F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$

und $\qquad \int_{x_0}^x f(x_0)\,dt = f(x_0)\,(x - x_0)\ ,$

wie aus einem obigen Beispiel mit $c = f(x_0)$ und x_0 anstelle von a bzw. x anstelle von b folgt.

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,dt - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0)\,dt \\ &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (\, f(t) - f(x_0)\,)\,dt\ . \end{aligned}$$

Nun wird nach längerer Zeit mal wieder etwas Epsilontik getrieben: f ist in x_0 stetig: Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $t \in I \cap\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ immer $|\, f(t) - f(x_0)\,| < \varepsilon$ gilt. Mit $\overline{\delta} := \frac{\delta}{2}$ folgt erst recht für alle $t \in I \cap [x_0 - \overline{\delta}, x_0 + \overline{\delta}]$ immer $|\, f(t) - f(x_0)\,| < \varepsilon$.

Schließlich folgt für diese t und damit, falls $x \in I \cap [x_0 - \overline{\delta}, x_0 + \overline{\delta}]$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (\, f(t) - f(x_0)\,)\,dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|\,x - x_0\,|} \int_{x_0}^x |\, f(t) - f(x_0)\,|\,dt \\ &\leq \frac{1}{|\,x - x_0\,|} \cdot \varepsilon \cdot \left| x - x_0 \right| = \varepsilon \end{aligned}$$

nach obigem Beispiel 6.2.

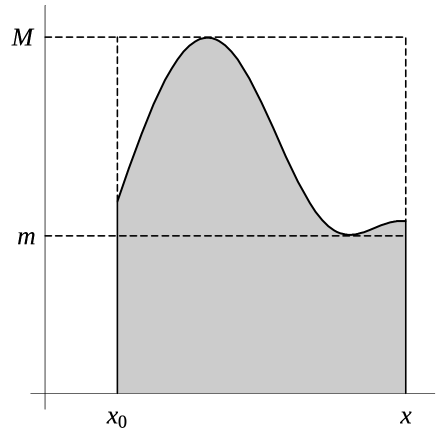
Also gilt

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right) = 0\ ,$$

was zu beweisen war.

∎

Nun soll noch ein zweiter, etwas "anschaulicherer" Beweis folgen.



Wie oben errechnet sich

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} (\, f(t) - f(x_0)\,)\, dt \;.$$

Nun werde der Einfachheit halber der Spezialfall angenommen, dass es für $t \in [x_0, x]$ (mit $x_0 < x$) wegen der Stetigkeit von f auf I mit Satz 4.12 von x_0 und x abhängende Zahlen m, M gibt mit

$$0 \le m \le f(t) \le M \;.$$

Dann folgt wieder anschaulich

$$(x - x_0) \cdot m \le \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \le (x - x_0) \cdot M$$

oder $$m \le \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \le M \;,$$

d.h. $$m \le \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \le M \;.$$

Anschaulich folgt jetzt

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} m \le \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \le \lim_{x \to x_0} M = f(x_0)$$

und damit

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \;,$$

was zu beweisen wa*äre*.

Überlegen Sie sich, wo in dieser Form eines Beweises die Anschauung sehr stark strapaziert wird. Überlegen Sie auch, wie vom behandelten Spezialfall auf den allgemeinen Fall geschlossen werden kann.

□

Definition 6.3:

STAMMFUNKTION, UNBESTIMMTES INTEGRAL

Es seien $I := [a, b]$ und $f, F : I \to \mathbb{R}$. Auf I seien F differenzierbar und f stetig.

F heißt eine STAMMFUNKTION zu f auf I, wenn

$$F' = f \;.$$

Wenn F eine Stammfunktion zu f auf I ist, dann ist auch für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Funktion H mit $H(x) := F(x) + c$ eine Stammfunktion, denn $H' = F' = f$.

Statt von Stammfunktionen, wird auch von UNBESTIMMTEN INTEGRALEN gesprochen.

Satz 6.2:

Hauptsatz der Differentialrechnung und Integralrechnung, Teil 2

Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Es sei F eine Stammfunktion zu f auf I . Dann gilt für jedes $c \in I$

$$\int_a^c f(t)\,dt = F(c) - F(a)\ .$$

also insbesondere

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)\ .$$

Beweis:

Nach dem vorigen Satz ist $\Phi(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ eine Funktion auf I mit $\Phi' = f$, d.h. Φ ist eine spezielle Stammfunktion zu f auf I. Nach Korollar 5.2 unterscheiden sich zwei Stammfunktionen F und Φ nur um eine Konstante, etwa γ, d.h. $F = \Phi + \gamma$. Nun ist $\Phi(a) = 0$ und $\Phi(c) = \int_a^c f(t)\,dt$ und es folgt

$$\int_a^c f(t)\,dt = \Phi(c) - \Phi(a) = (F(c) - \gamma) - (F(a) - \gamma) = F(c) - F(a)\ .$$

■

Mit diesem Satz lassen sich jetzt sofort viele Integrale berechnen.

<u>Beispiel 6.3:</u>

Auf $\mathbb{R}$ gilt $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$. Also gilt:

$$\int_a^b \cos(t)\,dt = \sin(b) - \sin(a)\ ,\quad \int_a^b \sin(t)\,dt = -(\cos(b) - \cos(a)) = \cos(a) - \cos(b)\ .$$

<u>Beispiel 6.4:</u>

Auf $\mathbb{R}$ gilt mit $n \in \mathbb{N}$ und $f_{n+1}(x) := \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}$ und $f_{n+1}'(x) := x^n$, d.h.

$$\int_a^b t^n\,dt = \frac{1}{n+1}\,(\,b^{n+1} - a^{n+1}\,)\ .$$

Schreibweise:

Statt $F(b) - F(a)$ wird häufig $F(x)\Big|_a^b$ oder $F\Big|_a^b$ geschrieben.

Satz 6.2 läßt sich nun auch noch anders interpretieren: Es ist dort ja $F' = f$ und

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

also

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a)\ .$$

<u>6.3 Integrationsregeln</u>

Die Produktregel und die Kettenregel der Differentiation lassen sich so merken:

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + g'\cdot f \quad \text{bzw.} \quad (f\circ g)' = g'\cdot f'\circ g\ .$$

Auf diese Regeln wird nun der Hauptsatz angewandt.

<u>Satz 6.3:</u>

Partielle Integration, Produktintegration

Es seien $I := [a, b]$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(t) \cdot g'(t)\, dt = f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b f'(t) \cdot g(t)\, dt \ .$$

Beweis:
Mit dem Hauptsatz und der Produktregel der Differentiation (Satz 5.3) folgt für alle $t \in I$

$$(f \cdot g)'(t) = f'(t) \cdot g(t) + g'(t) \cdot f(t)$$

$$f \cdot g \Big|_a^b = \int_a^b (f \cdot g)'(t)\, dt = \int_a^b f'(t) \cdot g(t)\, dt + \int_a^b g'(t) \cdot f(t)\, dt \ .$$

∎

Entsprechend folgt aus der Kettenregel

Satz 6.4:
Substitutionsregel
Es seien $I_1 := [a, b]$, $I_2 := [c, d]$ und $g : I_1 \to \mathbb{R}$ $f : I_2 \to \mathbb{R}$ mit $g(I_1) \subset I_2$. Weiterhin seien g auf I_1 und f auf I_2 differenzierbar.
Dann gilt

$$\int_a^b f'(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f'(t)\, dt = f \Big|_{g(a)}^{g(b)} \ .$$

Beweis:
Mit dem Hauptsatz und der Kettenregel (Satz 5.4) folgt für alle $t \in I_1$

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

und damit

$$f \Big|_{g(a)}^{g(b)} = f \circ g \Big|_a^b = \int_a^b (f \circ g)'(t)\, dt = \int_a^b f'(g(t)) \cdot g'(t)\, dt \ .$$

Nun gilt auch $f \Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f'(t)\, dt$.

Jetzt wird für die Substitutionsregel eine andere Schreibweise gebraucht. Für geeigntes φ sei

$$\Phi(x) := \int_a^b \varphi(t)\, dt \ .$$

Dann ist $\Phi'(x) = \varphi(x)$ und die obige Formel ändert sich mit Φ anstelle von f bzw. φ anstelle von f'

$$\int_a^b \varphi(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \Phi \Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} \varphi(t)\, dt \ .$$

Wird nun wieder f für φ eingesetzt, so erhält die Formel ihr übliches Aussehen, z.B. in Formelsammlungen notiertes Aussehen:

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt \ .$$

∎

Jetzt wird für die Substitutionsregel eine andere Schreibweise gebraucht. Für geeigntes φ sei

$$\Phi(x) := \int_a^x \varphi(t)\, dt \ .$$

Dann ist $\Phi'(x) = \varphi(x)$ und die obige Formel ändert sich mit Φ anstelle von f bzw. φ anstelle von f'

$$\int_a^b \varphi(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \Phi \Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} \varphi(t)\, dt \;.$$

Wird nun wieder f für φ eingesetzt, so erhält die Formel ihr übliches, z.B. in Formelsammlungen notiertes Aussehen:

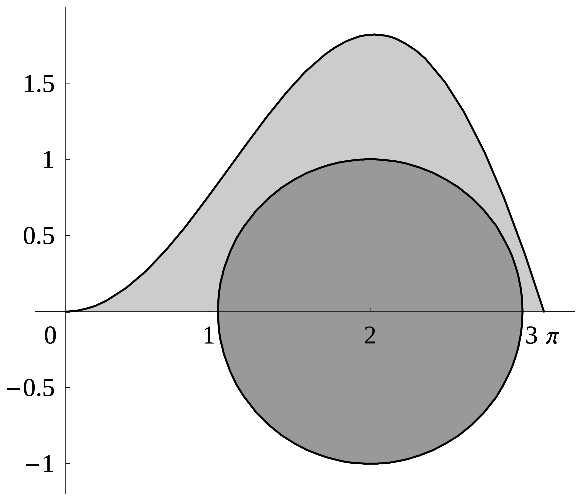
$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt \;.$$

Beispiel 6.5:
zur partiellen Integration:

$$\int_a^b f(t) \cdot g'(t)\, dt = f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b f'(t) \cdot g(t)\, dt$$

Es seien $a := 0$, $b := \pi$, $f(t) := t$, $f'(t) = 1$, $g(t) := -\cos(t)$, $g'(t) = \sin(t)$.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t \cdot \sin(t)\, dt &= x \cdot (-\cos(x)) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos(t))\, dt \\ &= \pi \cdot (-\cos(\pi)) - 0 + \int_0^\pi \cos(t)\, dt \\ &= \pi + 1 \cdot \sin(x) \Big|_0^\pi = \pi + (\sin(\pi) - \sin(0)) = \pi \;.\end{aligned}$$



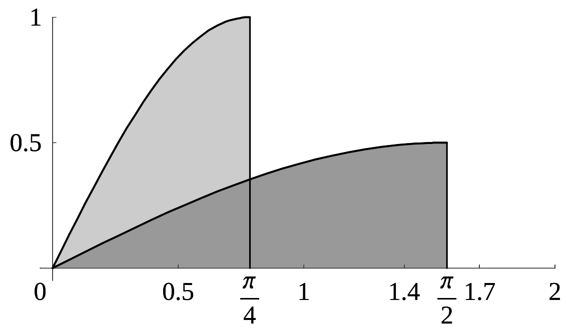
Die hellgraue, krummlinig berandete Fläche hat also den gleichen Flächeninhalt wie der untere Halbkreis, also $\frac{\pi}{2}$.

Beispiel 6.6:
zur Substitutionsregel:

$$\int_a^b f'(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f'(t)\, dt = f \Big|_{g(a)}^{g(b)} \;.$$

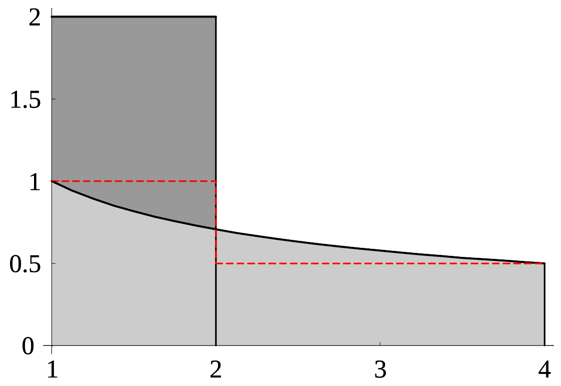
Es seien $a := 0$, $b := \frac{\pi}{4}$, $f(t) := -\cos(t)$, $f'(t) = \sin(t)$, $g(t) := 2\,t$.

$$\int_0^{\pi/4} \sin(2\,t)\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 2 \cdot \sin(2\,t)\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(t)\, dt = -\frac{1}{2} \cdot \cos(x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \;.$$



Es seien $a := 1$, $b := 4$, $f(t) := 1$, $g(t) := \sqrt{t}$, $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_1^4 g'(t)\,dt = 2\int_1^1 f(g(t))\,g'(t)\,dt = 2\int_1^2 1\,dt = 2\,.$$



■

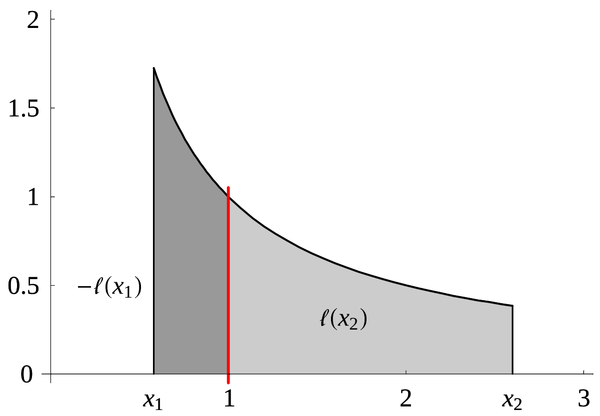
6.4 Logarithmenfunktionen und Exponentialfunktion

Im vorigen Abschnitt wurden Ausdrücke der Gestalt $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ betrachtet.

Jetzt soll ein sehr wichtiger, doch einfacher Spezialfall behandelt werden.
Für $x > 0$ sei die Funktion ℓ definiert durch

$$\ell(x) := \int_1^x \frac{dt}{t}\,.$$

Später wird sich zeigen, dass hierdurch der natürliche Logarithmus von x definiert wird. Doch dazu muss erst Einiges bewiesen werden



Satz 6.5:

(i) Für alle $x > 0$ gilt $\ell'(x) = \frac{1}{x}$ und ℓ ist dort stetig.

(ii) Für alle $a, b > 0$ gilt $\ell(a \cdot b) = \ell(a) + \ell(b)$.

(iii) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ gilt $\ell(x^n) = n \cdot \ell(x)$.

(iv) Für alle $x > 0$ gilt

(*) $$1 - \frac{1}{x} \leq \ell(x) \leq x - 1 \ .$$

(v) Es gilt $\ell(e) = 1$.

(vi) ℓ ist strengmonoton wachsend.

(vii) Mit $\ell : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gilt: Der Wertebereich von ℓ ist ganz $\mathbb{R}$; kurz: $\ell(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$.

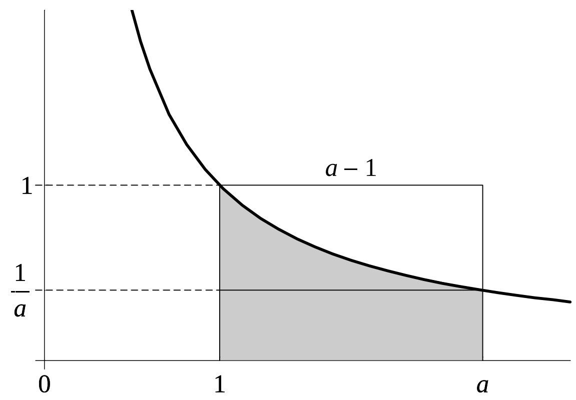
Die Beweise erfordern unterschiedliche Mühe:

Zu (i):
Es sind direkte Folgerungen aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und aus Satz 5.2.

Zu (ii):
Für $a, x > 0$ sei $f(x) := \ell(a \cdot x)$. Dann folgt mit der Kettenregel
$$f'(x) = \frac{1}{a \cdot x} \cdot a = \frac{1}{x} = \ell'(x) \ .$$
Damit unterscheiden sich die Funktionen f und ℓ nach Korrolar 5.2 nur um eine Konstante, etwa c ,
d.h. $$\ell(a \cdot x) = f(x) = \ell(x) + c \ .$$
Insbesondere gilt für $x = 1$
$$\ell(a) = \ell(1) + c \ .$$
Nun ist aber $\ell(1) = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$, also $\ell(1) = 0$ bzw. $c = \ell(a)$. Damit gilt $\ell(a \cdot x) = \ell(x) + \ell(a)$, woraus die Behauptung (ii) folgt.

Zu (iii):
Mit $\ell(a \cdot a) = 2\,\ell(a)$ nach (ii) , folgt die Behauptung mit einem trivialen Induktionsbeweis.

Zu (vi):
1. Fall: $a = 1$. Dann ist (*) eine triviale, richtige Gleichung.
2. Fall: $a > 1$.



Aus der Grafik folgt $\frac{1}{a}\,(a-1) \le \ell(a) = \int_1^a \frac{dt}{t} \le (a-1)\cdot 1$, d.h. $1 - \frac{1}{a} \le \ell(a) \le a - 1$.

3. Fall: $0 < a < 1$. Dann ist $\frac{1}{a} > 1$ und damit nach dem 2. Fall

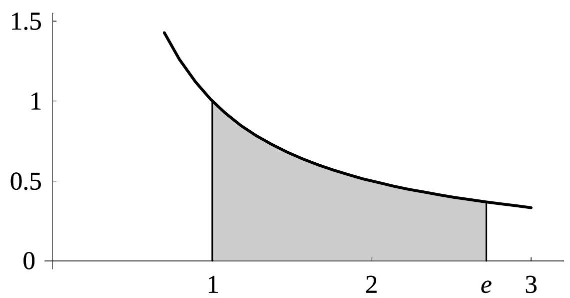
$$1 - \frac{1}{\frac{1}{a}} \le \ell\left(\frac{1}{a}\right) \le \frac{1}{a} - 1 \ .$$

Mit $0 = \ell(1) = \ell\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = \ell(a) + \ell\left(\frac{1}{a}\right)$ folgt $\ell\left(\frac{1}{a}\right) = -\ell(a)$, so dass

$$1 - a \le -\ell(a) \le \frac{1}{a} - 1 \text{ bzw. } 1 - \frac{1}{a} \le \ell(a) \le a - 1 \ .$$

Damit ist (*) für alle $a > 0$ gültig.

Zu (v):



Nach Satz 1.2.13 gilt $e = \lim\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$.

Mit (iv) folgt für $a_n := 1 + \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n+1} = 1 - \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{a_n} \le \ell(a_n) \le a_n - 1 = \frac{1}{n} \ .$$

Nach Multiplikation mit n folgt mit (iii)

$$\frac{n}{n+1} \le n \cdot \ell(a_n) = \ell(a_n^n) = \ell\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = n \cdot \ell(a_n) \le 1 \ .$$

Nach (i) ist ℓ stetig für $x > 0$, und nun folgt mit der Stetigkeit von ℓ

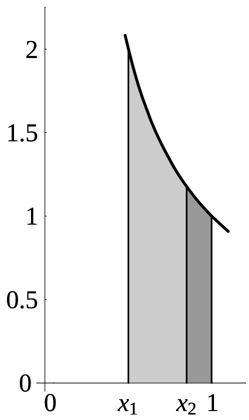
$$1 = \lim\left(\frac{n}{n+1}\right) \le \lim\left(\ell\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \ell\left(\lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right) = \ell(e) \le \lim(1) = 1 \ .$$

Zu (*vi*):

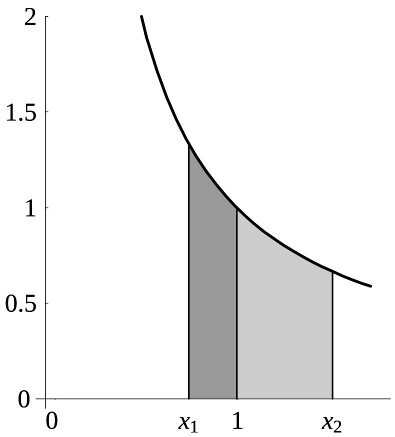
1. Fall: Für $x_1 < x_2 \le 1$ gilt:

$$\ell(x_1) = -\int_{x_1}^{1} \frac{dt}{t} = \int_{1}^{x_1} \frac{dt}{t} = \int_{1}^{x_2} \frac{dt}{t} + \int_{x_2}^{x_1} \frac{dt}{t} < \int_{1}^{x_2} \frac{dt}{t} = \ell(x_2) \ .$$

In der Grafik ist zu beachten, dass die Flächeninhalte negativ bewertet sind, da $x_1 < x_2 \le 1$.

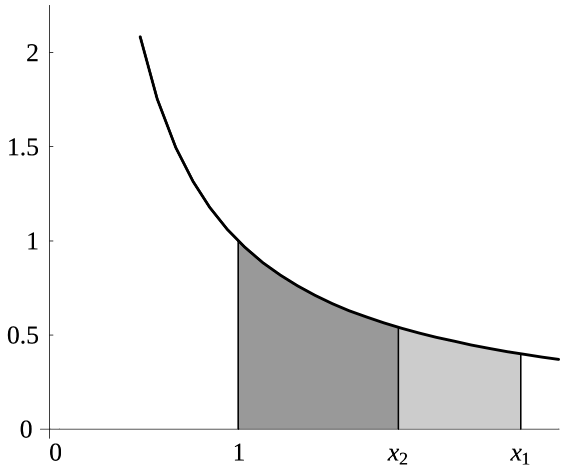


2.Fall: Es sei $x_1 \le 1 < x_2$. Hier gilt: $\ell(x_1) \le 0 < \ell(x_2)$.



3.Fall: Es sei $1 \le x_1 < x_2$.

Es gilt: $$\ell(x_1) = \int_{1}^{x_1} \frac{dt}{t} < \int_{1}^{x_1} \frac{dt}{t} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} = \int_{1}^{x_2} \frac{dt}{t} = \ell(x_2) \ .$$



Damit ist allgemein für $0 < x_1 < x_2$ bewiesen, dass $\ell(x_1) < \ell(x_2)$.

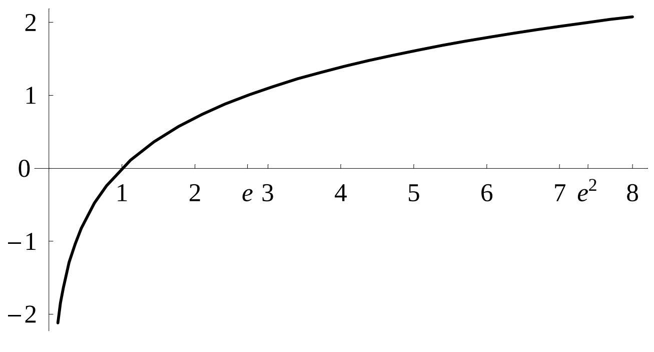
Zu (*vii*):
Für $a_n := 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ und mit (*iv*) gilt

$$\ell(2^n) = n \cdot \ell(2) \geq n \cdot (1 - \tfrac{1}{2}) = \frac{n}{2} .$$

Aus $\ell\left(\frac{1}{a}\right) = -\ell(a)$ folgt $\ell\left(\frac{1}{2^n}\right) = -n \cdot \ell(2) \leq -\frac{n}{2}$.

Nun ist ℓ auf $\mathbb{R}^+$ nach (*i*) stetig und nimmt daher nach dem Zwischenwertsatz (Satz 4.11) alle Wert des Intervalls $\left]-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right[$ an. n war beliebig. Damit folgt die Behauptung von (*vii*) .

■



Definition und Satz 6.6:
NATÜRLICHER LOGARITHMUS
Für $x > 0$ sei die Funktion ln definiert durch

$$\ln(x) := \int_1^x \frac{dt}{t} .$$

Die Funktion ln wird *logarithmus naturalis* bzw. NATÜRLICHER LOGARITHMUS genannt.
Sie hat die Eigenschaften:
Für alle $a, b > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ gelten die folgenden Gleichungen:

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) ,$$

$$\ln\left(\tfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)\ ,$$
$$\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)\ ,$$
$$\ln(1) = 0\ ,$$
$$\ln(e) = 1\ .$$

Weiterhin gilt:

$$\ln(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}\ ,$$

$\ln$ ist stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R}^+$ und dort gilt $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Die Beweise folgen mit $\ell = \ln$.

■

Häufig wird auch der sog. DEKADISCHE LOGARITHMUS (in Zeichen $\lg$) verwandt:

$$\lg(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(10)}\ .$$

Für eine Basis α ($\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$) ist der LOGARITHMUS ZUR BASIS α (in Zeichen $\log_\alpha$) definiert durch

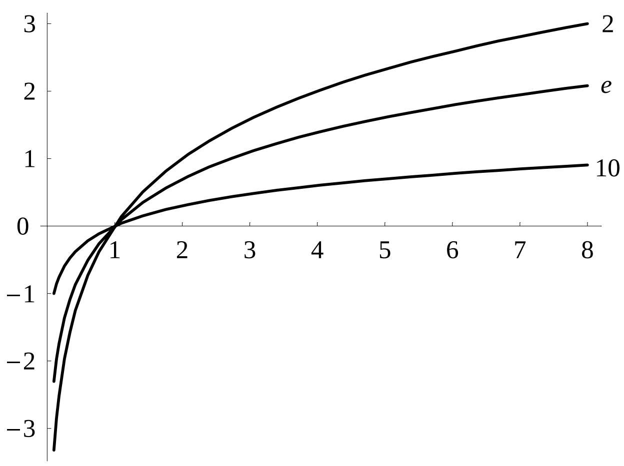
$$\log_\alpha(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(\alpha)}\ .$$

Dann gilt für $a, b > 0$

$$\log_\alpha(a \cdot b) = \frac{\ln(a \cdot b)}{\ln(\alpha)} = \frac{\ln(a) + \ln(b)}{\ln(\alpha)} = \log_\alpha(a) + \log_\alpha(b)\ .$$

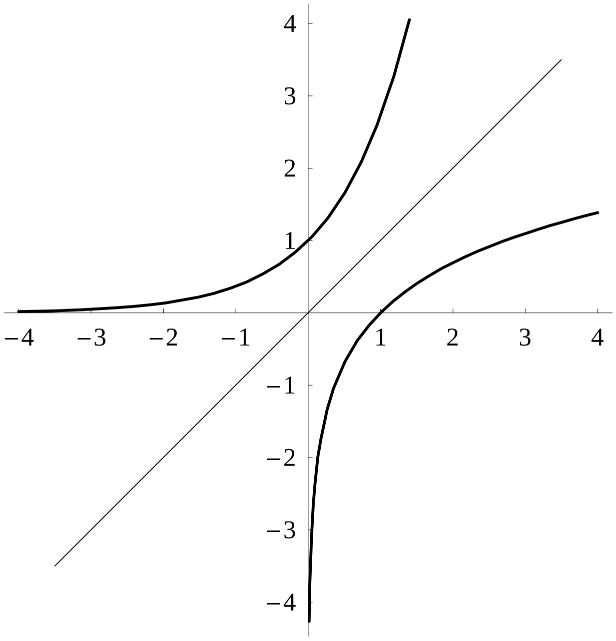
Es gelten die Gleichungen $\lg(10) = 1$ und $\log_\alpha(\alpha) = 1$.

Logarithmenfunktionen zu verschiedenen Basen



Wird der Graph von $\ln$ an der 1. Winkelhalbierenden gespiegelt, so entsteht der Graph der Umkehrfunktion des $\ln$. Diese Funktion heißt EXPONENTIALFUNKTION.

Deshalb werden jetzt einige Eigenschaften von Umkehrfunktionen behandelt.



Definition 6.7:

UMKEHRFUNKTION für eine streng monotone, stetige Funktion

Es sei $f : [a, b] \to [c, d]$ streng monoton wachsend und stetig und $f[a, b] = [c, d]$. Dann gibt es zu jedem $t \in [c, d]$ ein $\tau \in [a, b]$ mit $f(\tau) = t$. Da f streng monoton, ist τ eindeutig bestimmt. Also gibt es eine Funktion $g : [c, d] \to [a, b]$ mit $g(t) := \tau$. Dann gilt $\tau = g(t) = g(f(\tau))$, d.h. $g \circ f = \mathrm{id}_{[a,b]}$, wobei $\mathrm{id}_{[a,b]}$ die identische Funktion auf $[a, b]$ bezeichnet.

Weiterhin gilt

$$t = f(\tau) = f(g(t)) \text{ , d.h. } f \circ g = \mathrm{id}_{[c,d]} \text{ .}$$

g heißt die UMKEHRFUNKTION zu f. Sie wird häufig mit f^{-1} bezeichnet.

(Das Symbol f^{-1} ist **nicht** zu verwechseln mit dem Symbol $\frac{1}{f}$!!!)

Umkehrfunktionen für streng monoton fallende Funktionen lassen sich analog definieren.

Ohne Beweis sei der folgende Satz notiert.

Satz 6.5:

Stetigkeit der Umkehrfunktion

Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Es sei f streng monoton. Dann existiert die Umkehrfunktion f^{-1} auf $f(I)$ und f^{-1} ist dort stetig.

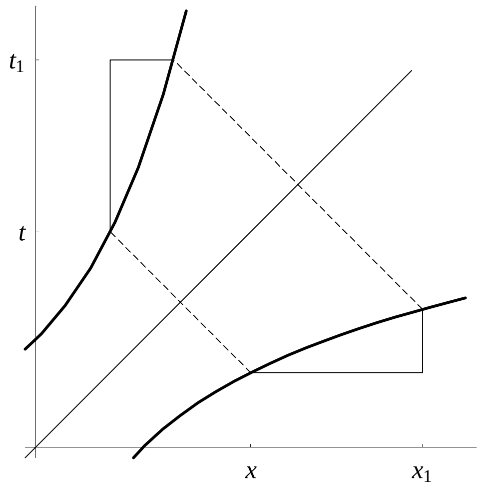
Satz 6.6:

Ableitung der Umkehrfunktion

Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Weiterhin sei f auf I streng monoton, besitze also eine Umkehrfunkltion f^{-1} auf $J := f(I)$. Ist f bei $x \in I$ differenzierbar und $f'(x) \neq 0$, dann ist f^{-1} bei $t = f(x)$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))} \text{ ,}$$

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \; .$$



Beweis:
Es sei $t_n \in J$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\lim(t_n) = t$ und $t_n \neq t$. Dann gilt $x_n := f^{-1}(t_n) \in I$ und wegen der Stetigkeit von f^{-1} gilt $\lim(f^{-1}(t_n)) = f^{-1}(t)$. Mit $f^{-1}(t) = f^{-1}(f(x)) = x$ gilt damit $\lim(x_n) = x$.
Nun folgt

$$\frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(t_n)}{t - t_n} = \frac{x - x_n}{f(x) - f(x_n)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n}}$$

und damit $\displaystyle \frac{1}{f'(x)} = \lim\left(\frac{1}{\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n}}\right) = \lim\left(\frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(t_n)}{t - t_n}\right) = (f^{-1})'(t)$.

Da $x = f^{-1}(t)$ folgt schließlich

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))} \; .$$

■

Jetzt sei die Umkehrfunktion von ln mit E bezeichnet, d.h. für $t \in \mathbb{R}$ gelte mit

(*) $\quad t = \ln(x) \quad E(t) := x$.

Siehe dazu das vorvorige Bild.

Es folgt mit $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

$$E'(t) = \frac{1}{\ln'(E(t))} = E(t) \; .$$

Aus (*) folgt, da $x > 0$, dass $E(t) > 0$.
Weiterhin sei nun für $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ein $\overline{x}$ so gewählt, dass $E(t_1 + t_2) = \overline{x}$, d.h. $\ln(\overline{x}) = t_1 + t_2$. Seien nun x_1 und x_2 derart, dass $\ln(x_1) = t_1$ und $\ln(x_2) = t_2$, bzw. $E(t_1) = x_1$, $E(t_2) = x_2$,
dann gilt $\ln(E(t_1 + t_2)) = \ln(\overline{x}) = t_1 + t_2 = \ln(x_1) + \ln(x_2) = \ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(E(t_1) \cdot E(t_2))$.
Da ln injektiv, gilt $E(t_1 + t_2) = E(t_1) \cdot E(t_2)$.
Sei nun $n \in \mathbb{N}$, dann folgt induktiv

$$E(n) = (E(1))^n \; .$$

Aber $E(1)$ ist die Zahl x , für die $\ln(x) = 1$ gilt. Nach Satz 6.6 gilt $\ln(e) = 1$, d.h. $E(1) = e$ und damit $E(n) = e^n$.

Entsprechend folgt $e = E(1) = E(\underbrace{\frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m}}_{m \text{ Summanden}}) = E\left(\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m$ für $m \in \mathbb{N}$, also $E\left(\frac{1}{m}\right) = e^{\frac{1}{m}}$.

Die letzten beiden Ergebnisse zusammen ergeben

$$E\left(\frac{n}{m}\right) = E(\underbrace{\frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m}}_{n \text{ Summanden}}) = \left(E\left(\frac{1}{m}\right)\right)^n = \left(e^{\frac{1}{m}}\right)^n = e^{\frac{n}{m}} .$$

Für positive rationale Zahlen r gilt also $E(r) = e^r$. Aus Stetigkeitsgründen gilt damit $E(x) = e^x$ für $x > 0$.

Da $\ln(1) = 0$, gilt $E(0) = 1$. Daraus folgt $1 = E(0) = E(x + (-x)) = E(x) \cdot E(-x)$,

also $\qquad E(x) = \frac{1}{E(-x)}$,

was auch für $x < 0$

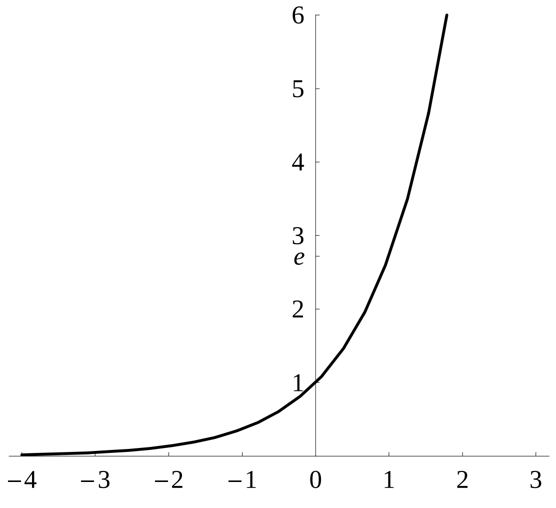
$$E(x) = \frac{1}{E(-x)} = \frac{1}{e^{-x}} = e^x$$

ergibt.

Damit folgt

<u>Definition und Satz 6.7:</u>
EXPONENTIALFUNKTION
Die Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion heißt EXPONENTIALFUNKTION. Sie wird häufig mit exp bezeichnet. Statt $E(x)$ wird oft nur e^x geschrieben.
Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \exp(x+y) &= \exp(x) \cdot \exp(y) , \\ \exp(0) &= 1 , \\ \exp(1) &= e , \\ \exp' &= \exp , \\ \exp(\mathbb{R}) &= \mathbb{R}^+ . \end{aligned}$$



6.5 Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

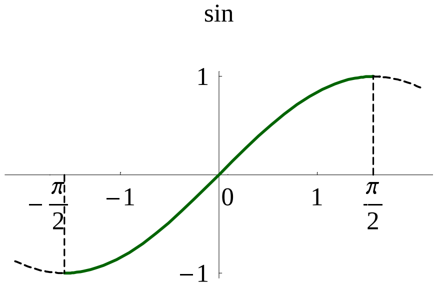
Es sei $I := [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Für $x \in I$ sei $f(x) := \sin(x)$. Mit $\sin' = \cos$ und $\cos(x) > 0$ für $I :=]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ folgt, dass f streng monoton wachsend auf I ist (Satz 5.12). Daher läßt sich die Sinusfunktion auf I umkehren.

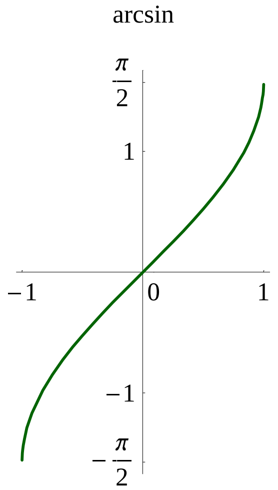
<u>Definition 6.7:</u>
ARCUSSINUS, arcsin

Es seien $I := [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $J := [-1, 1]$. Es sei $f(x) := \sin(x)$ für $x \in I$. Dann gilt $f(I) = J$. Die Umkehrfunktion f^{-1} auf J wird ARCUSSINUS genannt, abgekürzt arcsin. Damit gilt:

$\sin(\arcsin(t)) = t$, $t \in J$,

$\arcsin(\sin(x)) = x$, $x \in I$.





<u>Satz 6.8:</u>

Ableitung von arcsin

Es seien $J :=]-1, 1[$ und $\varphi(t) := \arcsin(t)$ auf J.

Dann gilt

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin'(t).$$

Beweis:

Mit Satz 6.6 folgt für $f(x) := \sin(x)$ auf $I := [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $f^{-1} = \varphi$ auf J

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\varphi(t))}.$$

Nun gilt $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ und daher $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$,
und damit

$$\cos(\varphi(t)) = \sqrt{1 - \sin^2(\varphi(t))} = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(t))} = \sqrt{1 - t^2}.$$

Also gilt $$\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

■

<u>Definition 6.8:</u>

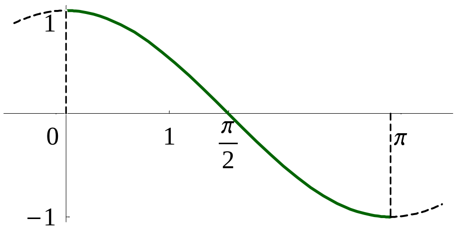
ARCUSCOSINUS, arccos

Es seien $I := [0, \pi]$ und $J := [-1, 1]$. Es sei $f(x) := \cos(x)$ für $x \in I$. Dann gilt $f(I) = J$. Die Umkehrfunktion f^{-1} auf J wird ARCUSCOSINUS genannt, abgekürzt arccos . Damit gilt:

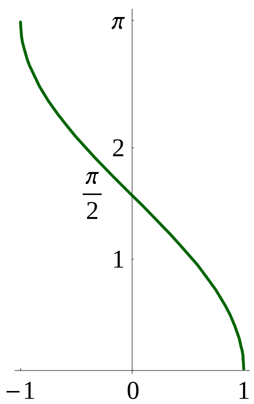
$\cos(\arccos(t)) = t$, $t \in J$,

$\arccos(\cos(x)) = x$, $x \in I$.

cos



arccos

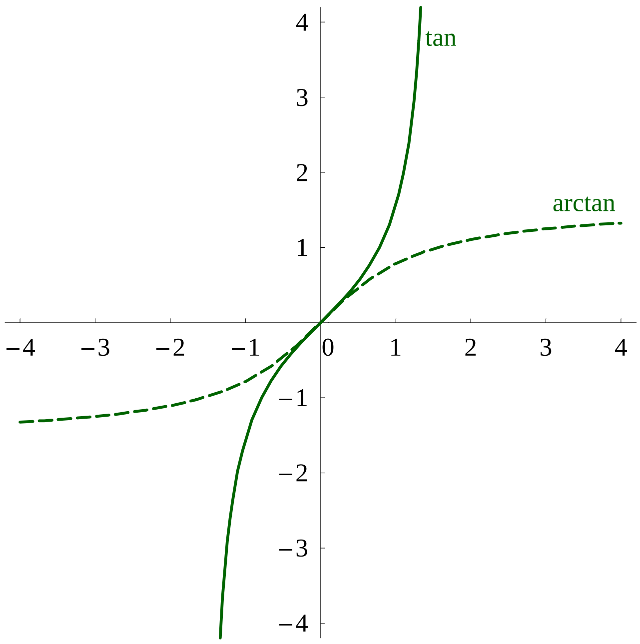


Analog zu Satz 6.8 gilt für $t \in \,]-1, 1[$

$$\arccos'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} \; .$$

Ähnlich werden für $x \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\,1\,[\; := I_1$ bzw. für $\overline{x} \in \,]-0, \pi\,[\; := J_1$ die Umkehrfunktionen von Tangens und Cotangens definiert: Arcustangens und Arcuscotangens, geschrieben: arctan und arccot .

Die Funktionsgraphen von tan und arctan .



Bei diese Grafik ist zu beachten, dass der Wertebereich von tan ganz $\mathbb{R}$ ist und daher der Definitionsbereich von arctan auch $\mathbb{R}$ ist!

Weiterhin gilt:

$$\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}\ ,\ t \in \mathbb{R}\ ,$$

$$\operatorname{arccot}'(t) = \frac{-1}{1+t^2}\ ,\ t \in \mathbb{R}\ .$$

Beweis für die Ableitung von arctan:
Zur Erinnerung die Formel für die Ableitung einer Umkehrfunktion:

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))}\ ,$$

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}\ .$$

Zuerst die Ableitung von tan. Mit der Quotientenregel folgt:

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - (-\sin(x))\cdot\sin(x)}{\cos^2(x)} =$$

$$= 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}\ .$$

Also folgt mit der Formel für die Ableitung einer Umkehrfunktion:

$$\arctan'(t) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(t))} = \frac{1}{1+t^2}$$

Soweit einige Ergebnisse über Umkehrfunktionen.
Bisher wurden nur Integrale für stetige Funktionen definiert. Für eine einfache Funktion wie sign ist also noch kein Integral definiert.

Definition 6.9:
FASTSTETIG
Es seien $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Es seien $x_0, \ldots, x_n \in I$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Für $x \in I$, $x \neq x_\nu$ sei f sei stetig. Bei $x_0, \ldots, x_{n-1}$ besitze f rechtsseitige Grenzwerte r_ν , bei $x_1, \ldots, x_n$ besitze f linksseitige Grenzwerte l_ν . Dann heißt f FASTSTETIG.

Diese Definition ist nicht konventionell !!! In der Literatur findet sich manchmal in diesem Zusammenhang der Begriff Regelfunktion.

Wenn $l_\nu = r_\nu$ für ein ν , dann ist f stetig ergänzbar. Gilt noch $l_\nu = r_\nu = f(x_\nu)$, dann ist f sogar bei x_ν stetig.

Definition 6.10:
INTEGRALE FASTSTETIGER Funktionen
Es sei f wie eben definiert faststetig. Es seien $I_\nu := [x_{\nu-1}, x_\nu]$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, und

$$f_\nu(x) := \begin{cases} r_{\nu-1} \ , & x = x_{\nu-1} \\ f(x) \ , & x_{\nu-1} < x < x_\nu \\ l_\nu \ , & x = x_\nu \end{cases} .$$

Dann sind die f_ν auf I_ν jeweils stetig.

Nun wird $$\int_a^b f(t)\,dt := \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f_\nu(t)\,dt$$

gesetzt und damit das Integral einer INTEGRAL einer FASTSTETIGEN Funktion definiert.

Es bedarf einiger zusätzlicher Überlegungen, dass dieses Integral unabhängig von der Wahl der Zerlegung $x_0, \ldots, x_n$ ist. Darauf soll hier nicht weiter eingegangen werden.

Jetzt kann auch der Signum-Funktion ein Integral zugeordnet werden. sign ist auf jedem Intervall faststetig und es gilt

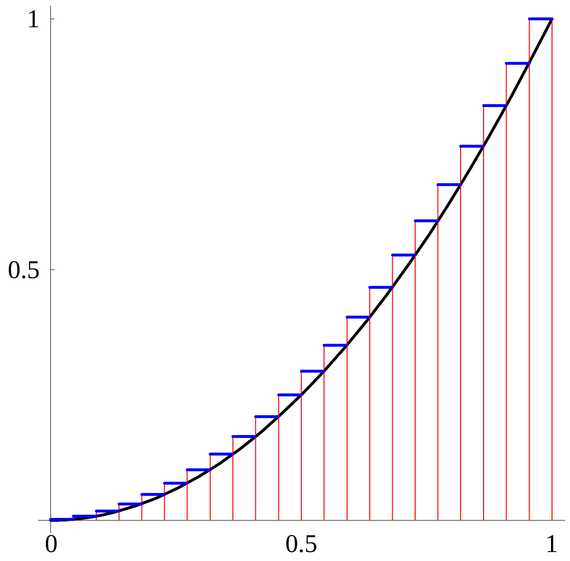
$$\int_a^b \operatorname{sign}(t)\,dt = |\,b\,| - |\,a\,| .$$

Sie sehen im nächsten Bild den Graphen der Funktion f mit $f(x) := x^2$ auf $[0, 1]$ und den Graphen einer sog. Treppenfunktion. Auf $[0 , 1]$ läßt sich für ein $n \in \mathbb{N}$ jeweils die Funktion trep_n mit $1 \leq \nu \leq n$ definieren mit durch

$$\mathrm{trep}_n := \begin{cases} \frac{\nu^2}{n^2} & \text{für } \frac{\nu-1}{n} < x \leq \frac{\nu}{n} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

trep_n ist faststetig. Anschaulich ist klar, dass

$$\int_0^1 t^2\,dt \leq \int_0^1 \mathrm{trep}_n(t)\,dt .$$



Das rechte Integral läßt sich elementar ausrechnen:

$$\int_0^1 \operatorname{trep}_n(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{\nu^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2\,n+1)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{(2\,n+1)}{n} = \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) .$$

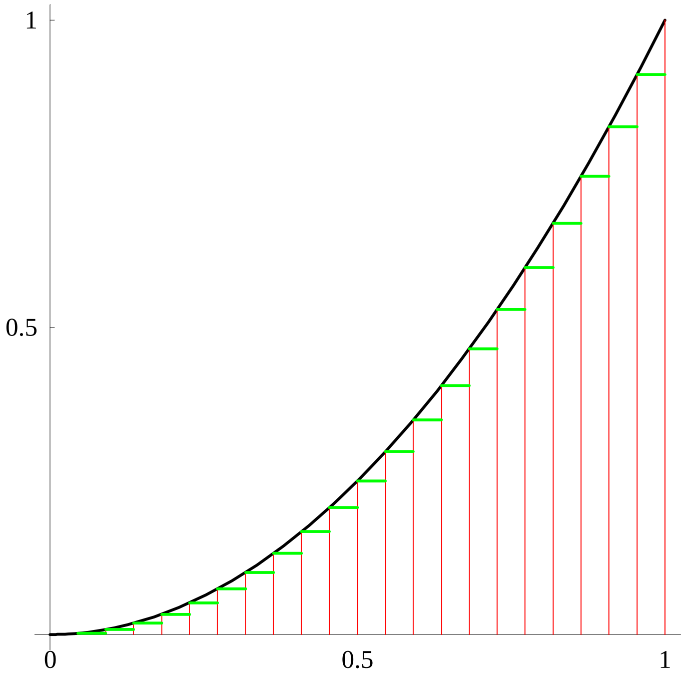
Damit gilt $\lim \left(\int_0^1 \operatorname{trep}_n(t)\,dt \right) = \lim \left(\frac{1}{6} \cdot (1 + \frac{1}{n}) \cdot (2 + \frac{1}{n}) \right) = \frac{1}{3}$.

Andererseits gilt auch $\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}$.

Mit $f(t) := t^2$ folgt $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{\nu^2}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(\frac{\nu}{n})$.

Diese Summe wird als eine OBERSUMME zu f auf $[0\,,1]$ bezeichnet.

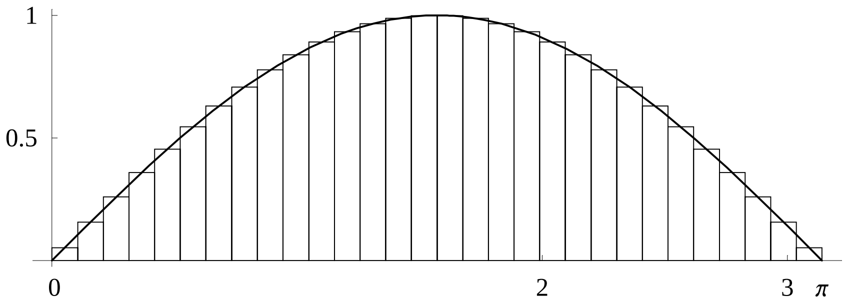
Analog ist $\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} f(\frac{\nu}{n})$ eine UNTERSUMME zu f auf $[0\,,1]$:

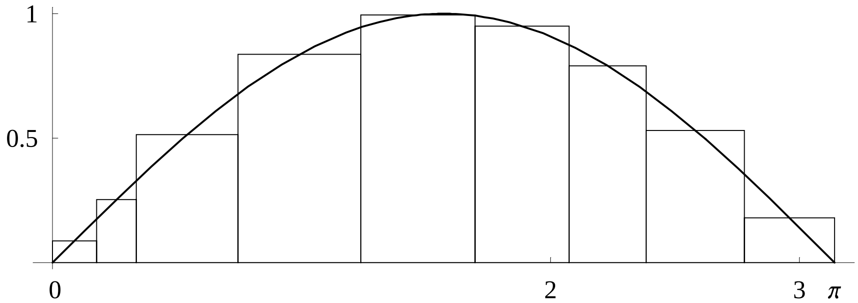


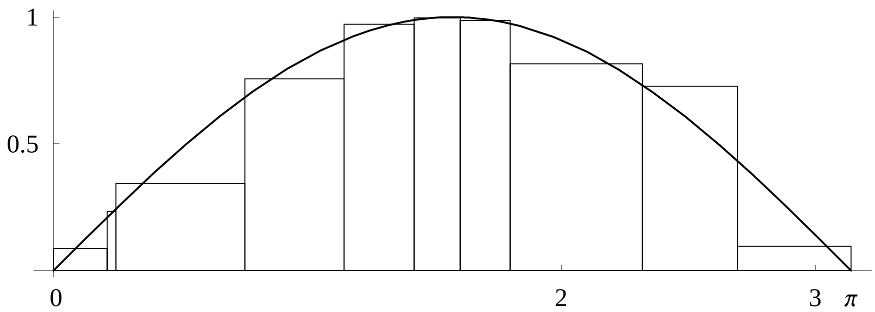
Mit $\mathrm{us}(n) := \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{\nu}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right) - \frac{1}{n}\cdot 1^2 = \frac{1}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$

fogt wie oben $\lim(\mathrm{us}(n)) = \frac{1}{3}$.

Mit diesem Beispiel soll nur verdeutlicht werden, dass sich das Integral von stetigen Funktionen auch anders als bisher in dieser Vorlesung definieren läßt, nämlich mit Hilfe von sog. Treppenfunktionen und Unter- bzw. Obersummen. Dabei können die Teilintervalle und auch die Punkte, an denen die Funktioneswerte genommen werden sehr beliebig gewählt werden. Dazu sollen die nächsten drei Grafiken ein wenig Anschauung bieten.






1
0.5
0
2
3
π