7. Taylor-Polynome

Zuerst soll untersucht werden, wie die Koeffizienten einer Polynomfunktion mit ihren Ableitungen zusammenhängen.

Für $x \in \mathbb{R}$ sei also mit reellen a_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$ und $a_n \neq 0$,

$$p(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n .$$

Dann gilt $p(0) = a_0$. Nun wird p einmal abgeleitet:

$$p'(x) := 0 + a_1 + 2\, a_2\, x + 3\, a_3\, x^2 + \cdots + n\, a_n\, x^{n-1} \text{ und } p'(0) = a_1 .$$

p wird zweimal abgeleitet:

$$p''(x) := 0 + 0 + 2\, a_2 + 3 \cdot 2\, a_3\, x + 4 \cdot 3\, x^2 + \cdots + n \cdot (n-1)\, a_n\, x^{n-2}\ ,\ p''(0) = 2\, a_2 .$$

Induktiv folgt leicht für $k \leq n$

$$\begin{aligned} p^{(k)}(x) &= k \cdot (k-1) \cdots (k-k+1) \cdot a_k \cdot x^0 + \sum_{\nu=k+1}^{n} \nu \cdot (\nu-1) \cdots (\nu-k+1)\, a_\nu\, x^{\nu-k} , \\ &= \sum_{\nu=k}^{n} \nu \cdot (\nu-1) \cdots (\nu-k+1)\, a_\nu\, x^{\nu-k} , \end{aligned}$$

woraus sofort $p^{(k)}(0) = k \cdot (k-1) \cdots 1 \cdot a_k$ bzw. $a_k = \dfrac{p^{(k)}(0)}{k!}$ folgt.

Dies ist der gesuchte Zusammenhang zwischen den Ableitungen einer Polynomfunktion und ihren Koeffizienten.

<u>Satz 7.1</u>

Für $x \in \mathbb{R}$ sei mit reellen a_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$ und $a_n \neq 0$,

$$p(x) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n .$$

Dann gilt $a_\nu = \dfrac{p^{(\nu)}(0)}{\nu!}$ und damit $p(x) := \sum_{\nu=0}^{n} \dfrac{p^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu$.

■

Von dieser Beobachtung ausgehend soll nun entsprechend analysiert werden, wie bei anderen Funktionen Beziehungen zwischen den Ableitungen und sogenannten Näherungspolynomfunktionen hergestellt werden können.
Also: In welcher Beziehung stehen für eine geeignete Funktion f die Zahlen

$$f(x) \text{ und } \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu .$$

f muss dann selbstverständlich n-mal differenzierbar sein und etwa auf einem Intervall $I := [a, b]$ definiert sein.

Es seien nun $\alpha, \beta \in I$ und $\alpha < \beta$. Wir betrachten für $x \in I$ die Funktion h mit

$$h(x) := f(x) + \frac{(\beta - x)}{1!} f'(x) + \frac{(\beta - x)^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{(\beta - x)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{(\beta - x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)$$

und leiten h fleißig ab:

$$h'(x) = \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(\beta-x)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x)\right)' = \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\frac{(\beta-x)^\nu}{\nu!}\right)' f^{(\nu)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(\beta-x)^\nu}{\nu!} f^{(\nu+1)}(x)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{-\nu\cdot(\beta-x)^{\nu-1}}{\nu!} f^{(\nu)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(\beta-x)^\nu}{\nu!} f^{(\nu+1)}(x)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{-(\beta-x)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(\beta-x)^\nu}{\nu!} f^{(\nu+1)}(x)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{-(\beta-x)^{\nu}}{\nu!} f^{(\nu+1)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(\beta-x)^\nu}{\nu!} f^{(\nu+1)}(x)$$

$$= \frac{(\beta-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) \ .$$

Jetzt werde $\sigma := \dfrac{f(\beta)-h(\alpha)}{(\beta-\alpha)^n}$ gesetzt. Dann gilt mit $g(x) := f(\beta) - h(x) - \sigma\cdot(\beta-x)^n$

$$g(\alpha) = f(\beta) - h(\alpha) - \frac{f(\beta)-h(\alpha)}{(\beta-\alpha)^n}(\beta-\alpha)^n = 0$$

und da $h(\beta) = f(\beta)$, auch $g(\beta) = f(\beta) - f(\beta) - \sigma\cdot(\beta-\beta)^n = 0$.

Also ist mit f auch g differenzierbar, und da f n-mal differenzierbar ist, folgt mit dem Satz von Rolle:
Es gibt ein $\gamma \in]\,\alpha, \beta\,[$, so dass $g'(\gamma) = -h'(\gamma) + n\cdot\sigma\cdot(\beta-\gamma)^{n-1} = 0$,
woraus nun

$$\sigma = \frac{h'(\gamma)}{n\cdot(\beta-\gamma)^{n-1}} = \frac{(\beta-\gamma)^{n-1}\, h^{(n)}(\gamma)}{(n-1)!\cdot n\cdot(\beta-\gamma)^{n-1}} = \frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}$$

folgt.
Also ist $g(x) = f(\beta) - h(x) - \dfrac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}(\beta-x)^n$.

Nun war $g(\alpha) = 0$, und damit folgt

$$f(\beta) = h(\alpha) + \frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}(\beta-\alpha)^n \ ,$$

d.h.

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)}{1!} f'(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \cdots + \frac{(\beta-\alpha)^n}{n!} f^{(n)}(\alpha) \ .$$

Um nun zu den üblichen Bezeichnungen zu kommen, seien $I := [a, b]$, $f : I \to \mathbb{R}$, f $(n+1)$-mal differenzierbar. Es werde also n durch $n+1$, β durch x , α durch x_0 und γ durch ξ ersetzt.

Dann gilt der berühmte

<u>Satz 7.1:</u>
Satz von Taylor (1715)
(Brook Taylor, 1685 - 1731, englischer Mathematiker)
Es seien $I := [a, b]$, $f : I \to \mathbb{R}$, f $(n+1)$-mal differenzierbar und $x, x_0 \in I$. Dann gilt mit einem ξ zwischen x und x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f\,'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f\,''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \; .$$

■

$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0)$ heißt das n-te Taylor-Polynom von f.

Nun soll für einige wichtige Funktionen die jeweiligen Taylor-Polynome bzw. die Taylor-Reihen berechnet werden. Man spricht auch von Taylor-Entwicklungen.

Früher wurde schon bewiesen: Für $x \neq 1$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{n} x^\nu + \frac{x^{n+1}}{1-x} \, .$$

Gilt nun noch $|\, x \,| < 1$, so ist $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{1-x} \right) = 0$.

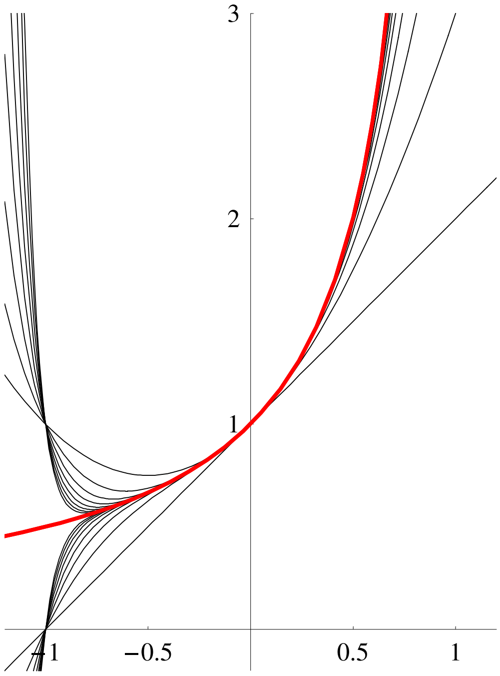
Daher folgt

Satz 7.2:

Für $|\, x \,| < 1$ gilt

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \; ,$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x^\nu = 1 - x + x^2 - x^3 + - \cdots \; .$$



■

Satz 7.3:

Es seien $I := [a, b]$, $f : I \to \mathbb{R}$, f beliebig oft differenzierbar auf I. Es existiere eine Konstante $M > 0$, so dass $|\, f^{(n)}(t) \,| \leq M$ für alle $t \in I$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt für jedes betrachtete $x_0 \in I$ und alle $x \in I$

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f^{(\nu)}(x_0)\,\frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}\ .$$

Beweis:

Für $x = x_0$ ist die Behauptung trivial. Es sei also nun $x \neq x_0$.
Nach Satz 7.1 gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit einem ξ zwischen x und x_0

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f^{(\nu)}(x_0)\,\frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!} + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi)\ .$$

Nach Voraussetzung ist $|\,f^{(n+1)}(\xi)\,| \leq M$. Es bleibt also zu zeigen, dass $\left(\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right)$ eine Nullfolge ist.
Diese Behauptung kann elementar bewiesen werden! Hier soll sie aber nach einer Manier bewiesen werden, die dem gleicht, was üblicherweise bezeichnet wird als: Mit Kanonen auf Spatzen schießen. Doch dieses Verfahren ist hier bequem und zusätzlich lehrreich:

Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}$ wird mit dem Quotientenkriterium auf Konvergenz untersucht:
Es sei also $\quad a_n := \frac{(x-x_0)^n}{n!}$.

Dann ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(x-x_0)^n} = \frac{x-x_0}{n+1}$.

Nun gibt es nach Archimedes ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 < 2\,(b-a) < n_0$, also $0 < \frac{b-a}{n_0} < \frac{1}{2}$.
Damit folgt für alle $n \geq n_0$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x-x_0}{n+1}\right| < \frac{b-a}{n_0} < \frac{1}{2}\ ,$$

was jetzt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}$ beweist. Nun bilden aber bekanntlich nach Satz 2.1.3 die Summanden einer konvergenten Reihe eine Nullfolge; also ist $\left(\frac{(x-x_0)^n}{n!}\right)$ eine Nullfolge und der Satz ist bewiesen.

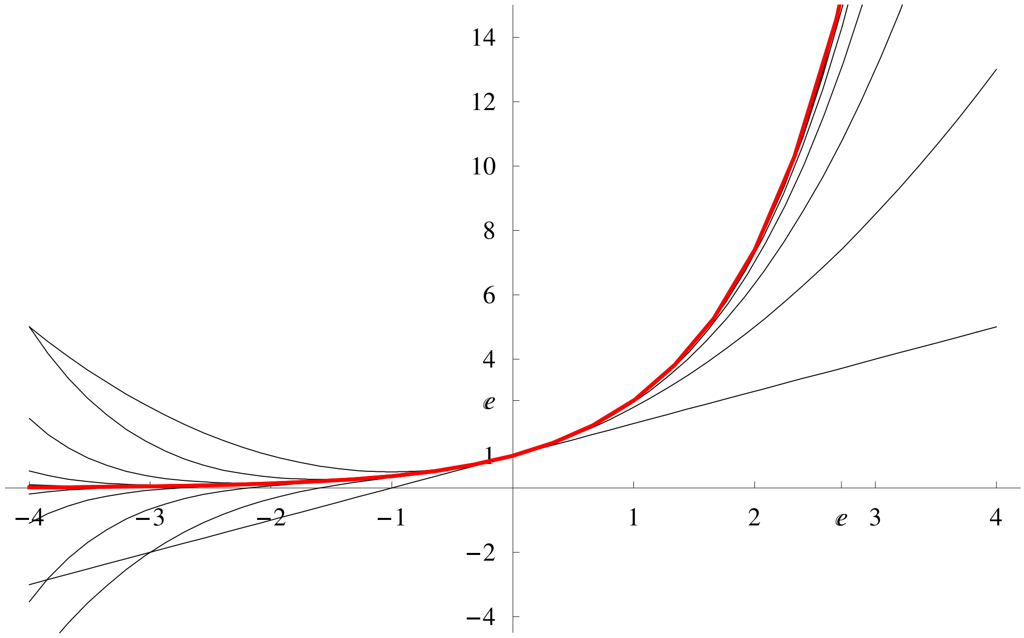
■

Satz 7.4:

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$.

Beweis:

Es sei $I := [a, b]$. Dann gilt für alle $x \in I$ und alle $n \in \mathbb{N}$ auch $\exp(a) \geq \exp(x) = \exp^{(n)}(x) = \exp(x) > 0$, da die Exponentialfunktion monoton wachsend ist und nur positive Werte annimmt.
Wird nun das in Satz 7.3 geforderte M als $\exp(a)$ gewählt, so folgt mit Satz 7.3 und der Wahl $x_0 = 0$, dass für alle $x \in I$ gilt $\exp(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$. Da a, b beliebig waren, gilt diese Darstellung auf ganz $\mathbb{R}$.



■

Mit $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ folgt $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$. Üblicher Weise wird dann die Taylor-Reihe von $\ln(1+x)$ so hergeleitet:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu t^\nu \, dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^\nu t^\nu \, dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} x^{\nu+1} .$$

Das Problem liegt in der Vertauschung von Integration und Summation, die mit den in dieser Vorlesung zur Verfügung stehenden Mitteln nicht direkt geleistet werden kann. Daher ein etwas längerer Beweis zu

<u>Satz 7.5:</u>

Für x mit $-1 < x \leq 1$ gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} x^{\nu+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots .$$

Insbesondere folgt für $x = 1$:

$$\ln(2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots .$$

Beweis:

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x > -1$ sei $f_n(x) := \ln(1+x) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} x^{\nu+1}$.

Damit gilt $f_n(0) = 0$.

Dann ist $\quad f_n{}'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} (\nu+1) \cdot x^\nu = \frac{1}{1+x} - \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu x^\nu =$

$$= \frac{1}{1+x} - \left(\frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \right) = \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$$

und $f_n{}'(0) = 0$.

Nun sei n ungerade, etwa $n = 2m+1$.

Dann ist $f_n{}'(x) = \frac{(-x)^{2m+2}}{1+x} \geq 0$ für $x \geq 0$, also mit $f_n(0)$ und dem sog. *horse track principle* (siehe Übungsaufgabe) folgt $f_n(x) \geq 0$ für $x \geq 0$,

d.h. $$\sum_{\nu=0}^{2m+1} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} x^{\nu+1} \leq \ln(1+x) \ .$$

Ist n dagegen gerade, etwa $n = 2m$, so ist $f_n'(x) = \dfrac{(-x)^{2m+1}}{1+x} \leq 0$ für $x \geq 0$ und wieder folgt

$$\sum_{\nu=0}^{2m} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} x^{\nu+1} \geq \ln(1+x) \ ,$$

also insgesamt

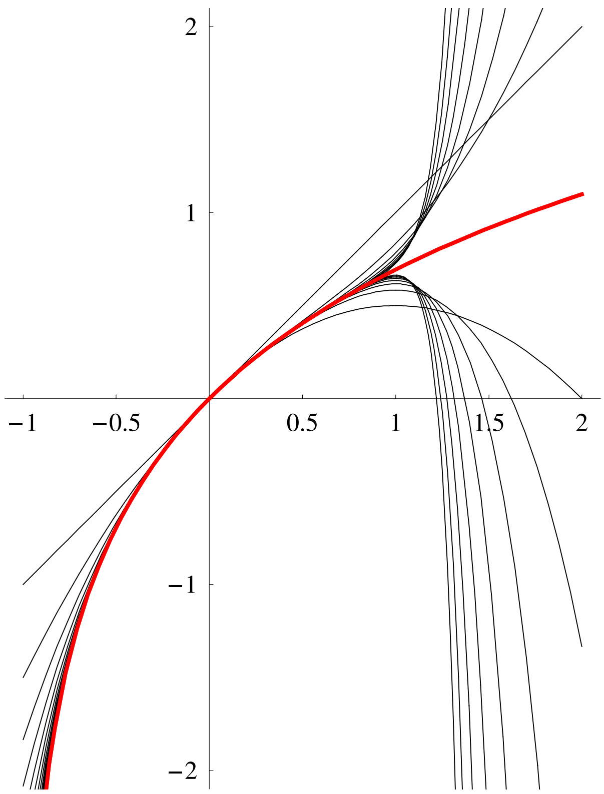
$$\sum_{\nu=0}^{2m+1} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} x^{\nu+1} \leq \ln(1+x) \leq \sum_{\nu=0}^{2m} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} x^{\nu+1} \ .$$

Die Differenz zwischen der linken und rechten Summe beträgt

$$\frac{(-1)^{2m+1}}{2m+2} x^{2m+2} = -\frac{x^{2m+2}}{2m+2} \ .$$

Für $|x| \leq 1$ gilt $\lim\limits_{m\to\infty} \left(\dfrac{x^{2m+2}}{2m+2}\right) = 0$.

Damit folgt $$\ln(1+x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} x^{\nu+1} \ .$$



■

<u>Satz 7.6:</u>

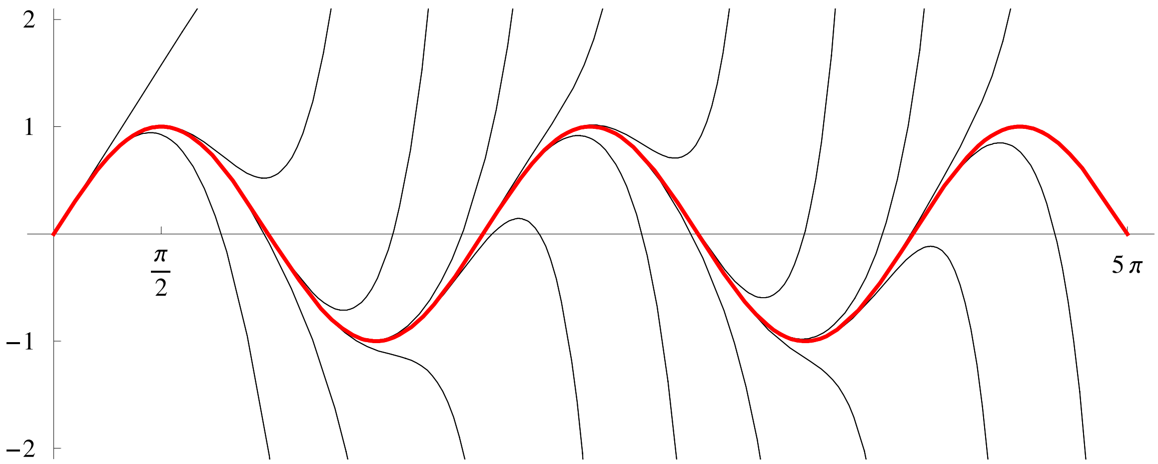
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)!} x^{2\nu+1},$$
$$\cos(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu}.$$

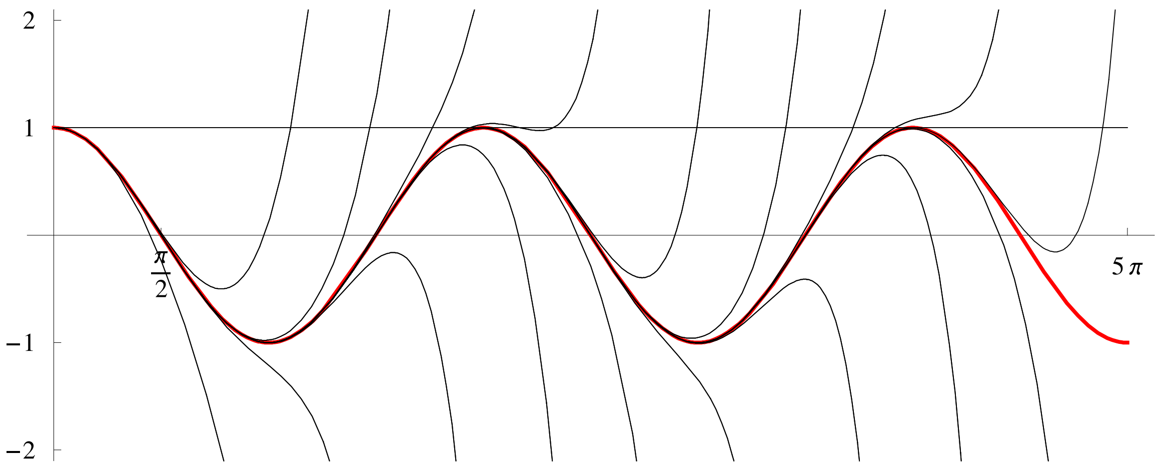
Beweis:

Ein Beweis verläuf analog zu dem Beweis des Satzes 7.4, wenn beachtet wird, dass die Ableitungen von sin und cos bis auf Vorzeichen wieder cos oder sin sind und sowohl $|\sin(x)| \le 1$ als auch $|\cos(x)| \le 1$ gilt.

Taylorentwicklung von sin :



Taylorentwicklung von cos :



■

Zum Schluss wird die Taylor-Reihe des arctan hergeleitet. Damit ergibt sich eine neue Möglichkeit π numerisch zu berechnen.

Satz 7.7:

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \le 1$ gilt $\arctan(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{2\nu+1} x^{2\nu+1}$.

Beweis:

Im Beweis wird hier ähnlich verfahren wie bei der Entwicklung von $\ln(x+1)$ in Satz 7.5.

Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n(x) \;:=\; \arctan(x) - \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + - \cdots + (-1)^{n-1}\ \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)$$

$$= \arctan(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1}\, x^{2\nu+1} \,.$$

Also ist $f_n(0) = 0$ und

$$f_n{}'(x) \;=\; \frac{1}{1+x^2} - \left(\, 1 - x^2 + x^4 - + \cdots + (-1)^{n-1}\ x^{2n-2} \,\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu x^{2\nu}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{(-x^2)^n}{1+x^2} \;.$$

Es sei nun n gerade, etwa $n = 2m$. Dann ist $f_n{}'(x) \ge 0$ für $x \ge 0$ und damit f_n für diese x monoton wachsend. Da $f_n(0) = 0$, gilt $f_n(x) \ge 0$ für $x \ge 0$,

d.h. $$\arctan(x) \;\ge\; \sum_{\nu=0}^{2m-1} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1}\, x^{2\nu+1} \,.$$

Nun sei n ungerade, etwa $n = 2m+1$. Dann ist $f_n{}'(x) \le 0$ für $x \ge 0$ und analog zum vorigen Ergebnis folgt

$$\arctan(x) \;\le\; \sum_{\nu=0}^{2m} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1}\, x^{2\nu+1} \,.$$

Also gilt für $x \ge 0$

$$\sum_{\nu=0}^{2m-1} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1}\, x^{2\nu+1} \;\le\; \arctan(x) \;\le\; \sum_{\nu=0}^{2m} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1}\, x^{2\nu+1} \,.$$

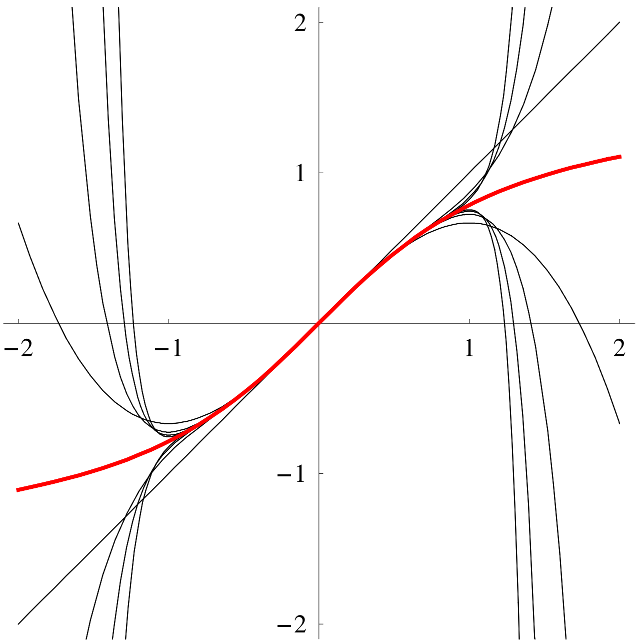
Die Differenz zwischen der rechten und linken Seite beträgt $\dfrac{x^{4m+1}}{4m+1}$.
Gilt nun noch $0 \le x \le 1$, so folgt mit $\lim\limits_{m\to\infty} \left(\dfrac{x^{4m+1}}{4m+1}\right) = 0$

$$\arctan(x) \;=\; \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1}\, x^{2\nu+1} \,.$$

Nun ist arctan eine ungerade Funktion und auch f_n ist ungerade, d.h. $f_n(x) = -f_n(-x)$. Für $-1 \le x \le 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n(-x)) = 0$ und damit gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x)) = 0$.

Beide Ergebnisse zusammen bedeuten:

Für x mit $|\,x\,| \le 1$ gilt $\arctan(x) \;=\; \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1}\, x^{2\nu+1}$.



■

Bekanntlich gilt $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})$, d.h. $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, bzw. $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Also gilt $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$.

(James Gregory, 1671, Gottfried Wilhelm Leibniz, 1674)
Diese Reihe konvergiert **sehr** langsam, und es ist nicht ratsam damit einen numerischen Wert von π berechnen zu wollen. Es ist jedoch lange darüber nachgedacht worden, wie die obige Formel für eine numerische Berechnung von π benutzt werden kann.
Aus dem Additionstheorem für den Tangens

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\cdot\tan(y)}$$

folgt $$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)} .$$

Nun sei $\alpha := \arctan(\frac{1}{5})$

Dann folgt $$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

und $$\tan(4\alpha) = \frac{2\tan(2\alpha)}{1 - \tan^2(2\alpha)} = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119} .$$

Nun seien $\beta := \arctan(\frac{1}{239})$, $x := 4\alpha$ und $y := -\beta$.
Dann ist $\tan(4\alpha - \beta) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 + \tan(x)\cdot\tan(y)} = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}} = \frac{120\cdot239 - 119}{119\cdot239 + 120} = \frac{119\cdot239 + 239 - 119}{119\cdot239 + 120} = 1$.

Also gilt $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ bzw. $\pi = 16\alpha - 4\beta$.

Nun ist $\alpha = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - + \cdots$, $\beta = \frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5 + - \cdots$.

Mit diesen Formeln läßt sich π gut berechnen. Sie wurden von John Machin (englischer Astronom, 1680 - 1751) 1706 gefunden.

In der folgenden Tabelle sind einige Werte eingetragen. n in der ersten Spalte gibt dabei jeweils an, wieviele Summanden für α bzw. β berechnet wurden.

Die ersten 10 Dezimalstellen von π lauten: 3.141 592 654 .

1	5359397032 / 1706489875	3.140 597 029
2	38279241713339684 / 12184551018734375	3.141 621 029
2	7652848710918019254097 6/ 2435978085593941820312 5	3.141 591 772
4	327853873402258685803048818236 / 104359128170408663038552734375	3.141 592 682
5	5150018754384552205994973405622666696 / 1639301884061026141391921953564453125	3.141 592 653