# II.1. Innere Produkträume, euklidische Räume, unitäre Räume

Am Anfang einige gebräuchliche Abkürzungen:

$\mathbb{K}$ bedeutet im Folgenden immer entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ .

Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei

$\mathbb{n} := \{ m \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant m \leqslant n \}$ und anlog

$\mathbb{n}_0 := \{ m \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant m \leqslant n \}$ ;

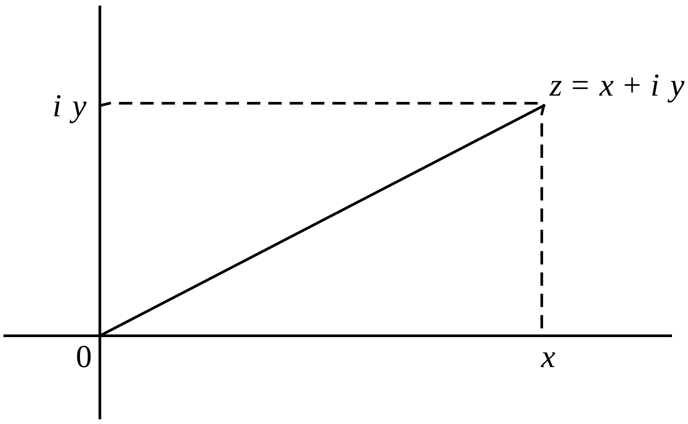
entsprechend werden die Zeichen $\mathbb{m}$ , $\mathbb{r}$ etc. benutzt.

Die Menge der Abbildungen von $M$ nach $N$ sei mit

$\mathrm{abb}( M, N ) := \{ f \mid f : M \to N \}$ bezeichnet.

Zur Motivation des Begriffes "inneres Produkt" werden zuerst Muliplikationen in $\mathbb{C}$ betrachtet.

Wenn $z = x + i\, y$ , dann ist $z \cdot z = x^2 + 2\, i\, x\, y - y^2$ . Dieser Wert ist schlecht geometrisch zu interpretieren.
$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$ dagegen ruft nach dem "Pythagoras":




Weitere Eigenschaften der Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer konjugierten komplexen Zahl lassen sich beobachten:

Aus $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$ folgt

$| z | = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ , falls $z \neq 0$ .

Es gilt $z \cdot \overline{w} = \overline{w} \cdot z = \overline{w} \cdot \overline{\overline{z}} = \overline{w \cdot \overline{z}}$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$ ,

und es folgt

$(\alpha\, u + \beta\, w)\, \overline{z} = \alpha\, u\, \overline{z} + \beta\, w\, \overline{z}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $u, w, z \in \mathbb{C}$ .

Diese Beobachtungen führen nun zu der

Definition II.1.1:

INNERES PRODUKT (*inner product*)

INNERER PRODUKTRAUM (*inner product space*)

EUKLIDISCHER RAUM (*euclidian space*)

UNITÄRER RAUM (*unitarian space*)

Es sei $V$ Vektorraum über $\mathbb{K}$ . Es sei $\pi : V \times V \to \mathbb{K}$ und es gelte für alle $x, y, z \in V$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ :

($\pi$ i) $\pi(x, x) > 0$ , wenn $x \neq 0$ ;

($\pi$ ii) $\pi(x, y) = \overline{\pi(y, x)}$ ;

($\pi$ iii) $\pi(\alpha\, x + \beta\, y, z) = \alpha\, \pi(x, z) + \beta\, \pi(y, z)$ .

Dann heißt $\pi$ ein INNERES PRODUKT auf $V$ .

Innere Produkte werden oft als SKALARPRODUKTE bezeichnet.

Statt $\pi(x, y)$ finden Sie auch die Schreibweisen $(x, y)$ , $\langle x, y\rangle$ , $\langle x|\, y\rangle$ oder auch nur $x \cdot y$ .

Ein Vektorraum $V$ mit einem inneren Produkt $\pi$ heißt INNERER PRODUKTRAUM $(V, \pi)$ .

Im Falle von $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ heißt $(V, \pi)$ dann EUKLIDISCHER RAUM, und falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , dann heißt $(V, \pi)$ UNITÄRER RAUM . Raum bedeutet in diesem Zusammenhang immer Vektorraum!

Auf die Hintergründe dieser Namensgebungen wird später eingegangen. Hier nur zwei Links zu: Euklid Euklid .

Beispiel II.1.1:

Es seien $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$ und $x, y \in \mathbb{V}$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ . Dann wird durch

$$\pi(x, y) := \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \overline{y_\nu}$$

ein inneres Produkt $\pi$ auf $\mathbb{V}$ definiert.

Dieses innere Produkt wird oft das "kanonische" innere Produkt genannt.

Beweis als Übung!

Beispiel II.1.2:

Es sei $\mathbb{V} := \mathcal{C}[0,\ 1]$ der reelle Vektorraum der auf dem Intervall [0, 1] stetigen, reellen Funktionen. Es seien $f, g \in \mathcal{C}[0,\ 1]$ . Dann wird durch

$$(f, g) := \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

ein inneres Produkt $(\ ,\ )$ auf $\mathbb{V}$ definiert.

Beweis als Übung!

Allgemeiner ist oft $\mathbb{C}[a, b]$ der komplexe Vektorraum der auf dem Intervall $[a, b]$ stetigen, komplexwertigen Funktionen. Seien also $f, g \in \mathbb{C}[a, b]$. Dann wird durch

$$(f, g) := \int_a^b f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$$

ein inneres Produkt $(\ ,\ )$ auf $\mathbb{C}[a, b]$ definiert.

## Bemerkungen:

Es gilt, wenn hier $O$ den Nullvektor in $V$ und $0$ das Nullelement in $\mathbb{K}$ bezeichnen, auf Grund von ($\pi$ iii) :

$\pi(O, O) = \pi(0 \cdot O + 0 \cdot O,\ O) = 0 \cdot \pi(O, O) + 0 \cdot \pi(O, O) = 0$.

Nun werde wieder sowohl für den Nullvektor und den Skalar Null das Zeichen $0$ benutzt!

Aus ($\pi$ iii) folgt damit allgemein

($\pi$ iv) $\quad \pi(x, x) \geqslant 0$ und $\pi(x, x) = 0 \iff x = 0$ .

Diese Bedingung wird häufig an Stelle von ($\pi$ i) zur Definition eines inneren Produktes benutzt.

Es seien nun $\gamma, \delta \in \mathbb{K}$; $u, v, w \in V$. Dann gilt

$\pi(u, \gamma v + \delta w) = \overline{\pi(\gamma v + \delta w, u)} = \overline{\gamma \cdot \pi(v, u) + \delta \cdot \pi(w, u)} = \overline{\gamma \cdot \pi(v, u)} + \overline{\delta \cdot \pi(w, u)} = \overline{\gamma} \cdot \pi(u, v) + \overline{\delta} \cdot \pi(u, w)$ ,

d.h.

($\pi$ v) $\quad \pi(u, \gamma v + \delta w) = \overline{\gamma} \cdot \pi(u, v) + \overline{\delta} \cdot \pi(u, w)$ .

Also: Das innere Produkt ist zwar im ersten Argument linear, im zweiten jedoch nur "fast linear". Daher folgt nach einer etwas allgemeineren Definition II.1.2. die Definition II.1.3, die die eben gemachte Beobachtung aufnimmt.

## Definition II.1.2:

BILINEARFORM (*bilinear form*)

Es seien $V$, $W$ Vektorräume über $K$. Es sei $f : V \times W \to K$ und es gelte für alle $x, x_1, x_2 \in V$, $y, y_1, y_2 \in W$ und alle $\alpha, \beta \in K$:

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha f(x_1, y) + \beta f(x_2, y) ,$$

$$f(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha f(x, y_1) + \beta f(x, y_2) .$$

Dann heißt $f$ eine BILINEARFORM auf $V \times W$.

Zu beachten ist, dass diese Definition nur einen beliebigen Körper $K$ und nicht speziell $\mathbb{K}$ fordert.

Ein inneres Produkt erfüllt aber nicht immer alle Bedingungen einer Bilinearform. Deshalb noch die

## Definition II.1.3:

SEMIBILINEARFORM (*semibilinear form*)

SESQUILINEARFORM (*sesquilinear form*)

Es seien $V$, $W$ Vektorräume über $\mathbb{K}$. Es sei $f : V \times W \to \mathbb{K}$ und es gelte für alle $x, x_1, x_2 \in V$, $y, y_1, y_2 \in W$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$f(\alpha x_1+\beta x_2, y) = \alpha f(x_1, y)+\beta f(x_2, y)\,,$$

$$f(x, \alpha y_1+\beta y_2) = \overline{\alpha} f(x, y_1)+\overline{\beta} f(x, y_2)\,.$$

Dann heißt $f$ eine SEMIBILINEARFORM oder SESQUILINEARFORM auf $V\times W$.

Im Falle $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ist also eine Semibilinearform eine Bilinearform.

Wegen ($\pi$ iii) und ($\pi$ v) ist ein inneres Produkt eine Sesquilinearform.

Es sind noch folgende Sprechweisen üblich:

Es sei $f$ eine Sesquilinearform aus $\operatorname{abb}(V\times V, \mathbb{K})$. Dann heißt $f$

SYMMETRISCH (*symmetric*), wenn für alle $x, y \in V$

$$f(x, y) = f(y, x)\,,$$

HERMITESCH (*hermitian*), wenn

$$f(x, y) = \overline{f(y, x)}\,,$$

POSITIV DEFINIT (*positive definite*), wenn

$$f(x, x) \geq 0\,.$$

Damit ist ein inneres Produkt eine *positiv definite, hermitesche Sesquiliniearform*. Diesen Satz lohnt es sich zu merken.

*Hermite*sch leitet sich ab von von Charles Hermite, 1822 - 1901, französicher Mathematiker; er bewies 1873 die Transzendenz von $\pi$.

<u>Satz II.1.1</u>

Es sei $(V, \pi)$ innerer Produktraum über $\mathbb{K}$ mit $\dim V = n$. Es seien $x, y \in V$, $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von $V$ und $\nu, \mu \in \mathbb{n}$. Weiterhin seien

$$x = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu v_\nu\,, \quad y = \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu v_\mu, \quad g_{\nu\mu} := \pi\left(v_\nu, v_\mu\right).$$

Dann gilt

$$\pi(x, y) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} g_{\nu\mu} x_\nu \overline{y_\mu} \quad \text{und} \quad g_{\nu\mu} = \overline{g_{\mu\nu}}\,.$$

Beweis:

Es seien $x, y \in V$ wie oben. Dann gilt mit einfachen Verallgemeinerungen von ($\pi$ iii) und ($\pi$ v)

$$\pi(x, y) = \pi\Big(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu v_\nu\,,\; y\Big) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\, \pi(v_\nu, y) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\, \pi\Big(v_\nu, \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu v_\mu\Big) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \sum_{\mu=1}^{n} \overline{y_\mu}\, \pi\left(v_\nu, v_\mu\right) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} x_\nu \overline{y_\nu}\, g_{\nu\mu}\,.$$

Weiterhin gilt

$g_{\nu\mu} = \pi(v_\nu, v_\mu) \underset{(\pi\,\text{ii})}{=} \overline{\pi(v_\mu, v_\nu)} = \overline{g_{\mu\nu}}$ ■

Wir schreiben in Zukunft bei einem inneren Produkt statt $\pi(x, y)$ nur noch kurz $(x, y)$ .

Satz II.1.2

**C**AUCHY-**S**CHWARZsche Ungleichung (***C**AUCHY-**S**CHWARZ inequality*)

Es sei $(V, (\,,\,))$ innerer Produktraum über $\mathbb{K}$ . Für alle $x, y \in V$ gilt:

**(⚠)** $\quad |(x, y)|^2 \leq (x, x) \cdot (y, y).$

Gleichheit gilt hier genau dann, wenn $x = \lambda\, y$ mit einem $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Beweis:

Es sei $\alpha \in \mathbb{K}$ . Dann gilt mit ($\pi$ ii) bis ($\pi$ v)

(i) $\quad 0 \leqslant (y - \alpha\, x, y - \alpha\, x) = (y, y - \alpha\, x) - \alpha \cdot (x, y - \alpha\, x)$

$\quad = (y, y) - \overline{\alpha} \cdot (y, x) - \alpha \cdot (x, y) + \alpha \cdot \overline{\alpha} \cdot (x, x)$ .

Sei nun zuerst $x = 0$ . Dann folgen auch $(x, x) = 0$ und $(0, y) = 0$ . Damit gilt für $x = 0$ das Gleichheitszeichen in **(⚠)** und weiterhin $x = 0 = 0 \cdot y = \lambda\, y$.

Sei also nun $x \neq 0$ . Nach ($\pi$ iv) ist dann $(x, x) > 0$ . Jetzt wird der Wert von $\alpha$ gewählt: $\alpha := \dfrac{(y, x)}{(x, x)}$ und damit folgt aus (i) mit ($\pi$ ii):

(ii) $\quad 0 \leqslant (y, y) - \dfrac{\overline{(y, x)}}{(x, x)} \cdot (y, x) - \dfrac{(y, x)}{(x, x)} \cdot (x, y) + \dfrac{|(y, x)|^2}{(x, x)^2} \cdot (x, x)$

$\quad = (y, y) - \dfrac{|(y, x)|^2}{(x,x)} - \dfrac{(y, x)\,(x, y)}{(x, x)} + \dfrac{|(y, x)|^2}{(x, x)}$

$\quad = (y, y) - \dfrac{|(x, y)|^2}{(x, x)}$.

Damit ist die CAUCHY-SCHWARZsche-Ungleichung **(⚠)** bewiesen.

Gilt das Gleichheitszeichen in (i) , so folgt mit ($\pi$ i) nun $0 = (x - \alpha\, y, x - \alpha\, y)$ ,

d.h. $x - \alpha\, y = 0$ , also der erste Teil der zweiten Behauptung des Satzes.

Gilt aber andererseits $x = \lambda\, y$ mit einem $\lambda \in \mathbb{K}$ , so folgt

$|(x, y)|^2 = |(\lambda\, y, y)|^2 = |\lambda \cdot (y, y)|^2 = |\lambda|^2 \cdot |(y, y)|^2$

$\quad = \lambda \cdot \overline{\lambda} \cdot (y, y)^2 = \overline{\lambda} \cdot (\lambda\, y, y) \cdot (y, y)$

$\quad = (\lambda\, y, \lambda\, y) \cdot (y, y) = (x, x) \cdot (y, y)$ ■

Hinweise im Internet zu Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) und Hermann Amandus Schwarz (1843 - 1921). Viktor Bunjakowski (1804 - 1889) gebührt eigentlich die Ehre der Ungleichung **(⚠)** den Namen zu geben!

Mit früheren Definitionen aus den Beispielen II.1.1 bzw. II.1.2 folgt jetzt sofort:

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \overline{y_\nu} \right|^2 \leq \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu|^2$$

und

$$\left| \int_a^b f(t)\, \overline{g(t)}\, dt \right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2\, dt \cdot \int_a^b |g(t)|^2\, dt \ .$$

Die CAUCHY-SCHWARZsche-Ungleichung ermöglicht in inneren Produkträumen Längen von Vektoren zu definieren. Dazu zuerst die

<u>Definition II.1.4:</u>

NORM (*norm*)

NORMIERTER RAUM (*normed (vector-) space*)

DREIECKSUNGLEICHUNG (*triangle inequality*)

Es sei $V$ Vektorraum über $\mathbb{K}$. Es sei $\nu \in \text{abb}(V, \mathbb{R})$ mit

($\nu$ i) $\nu(x) = 0$ bedingt $x = 0$ ,

($\nu$ ii) $\nu(\alpha\, x) = |\alpha|\; \nu(x)$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ ,

($\nu$ iii) $\nu(x + y) \leqslant \nu(x) + \nu(y)$ für alle $x, y \in$ V .

Dann heißt $\nu$ eine NORM auf $V$. $(V, \nu)$ heißt NORMIERTER RAUM und $\nu(x)$ die NORM des Vektors $x$ .

($\nu$ iii) heißt DREIECKSUNGLEICHUNG.

Ähnlich wie nach der Definition des inneren Produktes auch hier zuerst einige direkte Folgerungen aus der Definition:

$$0 \underset{(\nu\,\text{i})}{=} \nu(x - x) \underset{(\nu\,\text{iii})}{\leqslant} \nu(x) + \nu(x) = 2\cdot\nu(x) \text{ , d.h. } \nu(x) \geqslant 0 \ ,$$

$$\nu(0\cdot x) \underset{(\nu\,\text{ii})}{=} 0\cdot\nu(x) = 0 \ .$$

Also wird notiert:

($\nu$ iv) $\nu(x) \geqslant 0$ für alle $x \in V$ und $\nu(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ .

Weiterhin folgt

($\nu$ v) $\nu(x - y) \leqslant \nu(x) + \nu(y)$

mit

$$\nu(x - y) \underset{(\nu\,\text{iii})}{\leq} \nu(x) + \nu(-y) \underset{(\nu\,\text{ii})}{=} \nu(x) + |-1|\cdot\nu(y) = \nu(x) + \nu(y) \ .$$

Die Betragsfunktion auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ erfüllen bekanntlich die Bedingungen einer Norm.

Beispiel II.1.2:

Im $\mathbb{K}^n$ wird mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ sowohl durch

$$\| x \|_\infty := \max_{\nu \in \mathbb{n}} | x_\nu |$$

als auch durch

$$\| x \|_1 := \sum_{\nu = 1}^{n} | x_\nu |$$

jeweils eine Norm definiert.

Wie in inneren Produkträumen Normen definiert werden können, zeigt nun

Satz II.1.3.

Es sei $(V, (\ ,\ ))$ innerer Produktraum. Es sei $x \in V$. Dann wird durch

$$\| x \| := \sqrt{(x, x)}$$

eine Norm auf $V$ definiert.

Beweis:

1.) Zu ($\nu$ i): Nach ($\pi$ iv) gilt $(x, x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

2.) Zu ($\nu$ ii): $\| \alpha x \|^2 = (\alpha x, \alpha x) = \alpha \cdot \overline{\alpha} \cdot (x, x) = | \alpha |^2 (x, x) = | \alpha |^2 \| x \|^2$.

3.) Zu ($\nu$ iii): Da allgemein für $z \in \mathbb{C}$ gilt: $z + \overline{z} = 2 \operatorname{re} z$, folgt mit den Bedingungen des inneren Produktes und der CAUCHY-SCHWARZschen-Ungleichung für $x, y \in V$:

$$\| x + y \|^2 = (x + y, x + y) = (x, x + y) + (y, x + y)$$

$$= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)$$

$$= (x, x) + 2 \operatorname{re}(x, y) + (y, y)$$

$$\leqslant (x, x) + 2 \sqrt{(x, x) \cdot (y, y)} + (y, y)$$

$$= \| x \|^2 + 2 \sqrt{\| x \|^2 \cdot \| y \|^2} + \| y \|^2$$

$$= \left( \| x \| + \| y \| \right)^2 ,$$

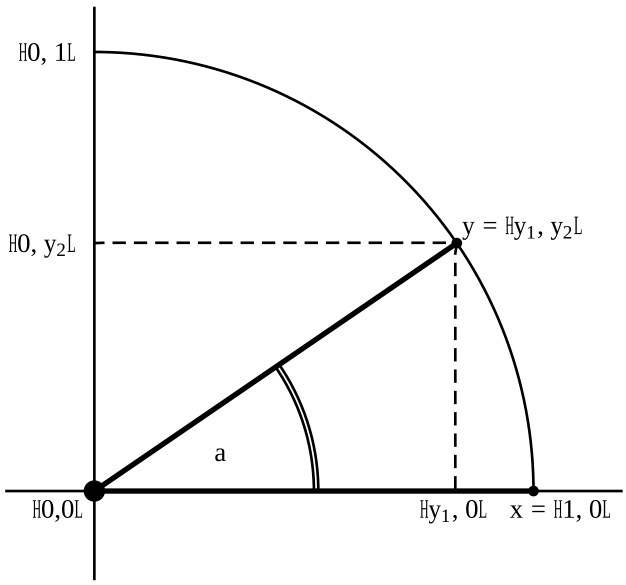
also die Dreiecksungleichung ■

Die CAUCHY-SCHWARZsche-Ungleichung $| (x, y) |^2 \leqslant (x, x) \cdot (y, y)$ läßt sich jetzt so schreiben:

$$| (x, y) | \leq \| x \| \cdot \| y \| \text{ oder auch nur } | x \cdot y | \leq | x | \cdot | y | .$$

Normen werden oft durch mit $\| . \|$ bzw. $| . |$ notiert, manchmal sogar auch mit $||| . |||$ .

Eine weitere Konsequenz der CAUCHY-SCHWARZschen-Ungleichung ist nun die Möglichkeit allgemein in inneren Produkträumen Winkel zu definieren.




Wie in der oben stehenden Figur sollen im $\mathbb{R}^2$ die Vektoren $x = (1, 0)$ und $y = (y_1, y_2)$ auf dem Einheitskreis liegen, d.h. $\| x \| = \| y \| = 1$ . Mit dem kanonischen inneren Produkt folgt

$$(x, y) = 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = y_2 = \cos(\alpha) \quad \text{mit } \alpha \in [0, \pi] .$$

In einem reellen Vektorraum folgt aus der CAUCHY-SCHWARZschen-Ungleichungn, falls $\| x \| \neq 0 \neq \| y \|$ sofort $-1 \leq \frac{(x, y)}{\| x \| \cdot \| y \|} \leq 1$ . Dann gibt es genau ein $\alpha \in [0, \pi]$ mit $\cos(\alpha) = \frac{(x, y)}{\| x \| \cdot \| y \|}$. Deshalb wird $\alpha$ der Winkel zwischen den Vektoren $x$ und $y$ gennant: $\angle(x, y)$. Ist $(x, y) = 0$ , etwa auch im Falle $x = 0$ oder $y = 0$ , so wird $\alpha = \frac{\pi}{2}$ gewählt und $x$ und $y$ heißen aufeinander senkrecht. Eine andere Sprechweise ist: $x$ und $y$ sind orthogonal; geschrieben: $x \perp y$ . Diese Bezeichnungen und Sprechweisen werden auch in komplexen Vektorräumen benutzt.

Mit $0 = (x, y) = \overline{(y, x)}$ , folgt aus $x \perp y$ auch immer $y \perp x$ . Wegen ($\pi$ iv) gilt $x \perp x$ genau für $x = 0$ . Für alle $x$ gilt $x \perp 0$ . Zusammen gefasst gilt damit allgemein die

Definition II.1.5:

SENKRECHT (*perpendicular*)

ORTHOGONAL (*orthogonal*)

WINKEL (*angle*)

Es sei $(V, ( \, , \, ))$ innerer Produktraum. $x, y \in V$ heißen ORTHOGONAL, wenn $(x, y) = 0$ . Die Schreibweise ist $x \perp y$ . Eine weitere Sprechweise ist: $x$ steht SENKRECHT auf $y$ .

In einem reellen inneren Produktraum wird für $x \neq 0 \neq y$ der WINKEL zwischen $x$ und $y$ durch

$$\measuredangle(x, y) := \alpha := \arccos \frac{(x, y)}{\| x \| \cdot \| y \|} \text{ bestimmt.}$$

Es folgt nun ganz leicht der Cosinussatz und als Spezialfall einer der bekanntesten Sätze der Mathematik: der Satz von Pythagoras (~ –569 – ~ –475).

Satz II.1.4 Cosinussatz

Es sei $(V, (\ ,\ ))$ reeller innerer Produktraum. Dann gilt für $x, y \in V$

$$\| x \pm y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 \pm 2 \| x \| \cdot \| y \| \cos\measuredangle(x, y) .$$

Beweis:

Es seien $x, y \in V$ :

$$\| x \pm y \|^2 = (x \pm y, x \pm y) = (x, x) \pm (x, y) \pm (y, x) + (y, y)$$

$$= \| x \|^2 \pm 2 \| x \| \cdot \| y \| \cos\measuredangle(x, y) + \| y \|^2 \quad \blacksquare$$

Satz II.1.5 Satz von Pythagoras

Es sei $(V, (\ ,\ ))$ innerer Produktraum. $a, b \in V$ seien senkrecht aufeinander. Dann gilt mit $c := a + b$

$$\| a \|^2 + \| b \|^2 = \| c \|^2 = \| a + b \|^2 .$$

Beweis:

Da $(a, b) = 0$ folgt der Beweis sofort analog zum Beweis des Cosinussatzes $\blacksquare$

Falls $c := a - b$ gilt analog $\| a \|^2 + \| b \|^2 = \| c \|^2 = \| a - b \|^2$ .

Satz II.1.6 Parallelogrammgleichung

(i) Es sei $(V, (\ ,\ ))$ innerer Produktraum über $\mathbb{K}$ . Es seien $x, y \in V$ und wie üblich sei $\| x \|^2 = (x, x)$ .

Dann gilt die Parallelogrammgleichung:

$$\| x - y \|^2 + \| x + y \|^2 = 2 \cdot (\| x \|^2 + \| y \|^2) .$$

(ii) Es sei $V$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der Norm $\nu$ . Für alle $x, y \in V$ gelte

$$\nu(x - y)^2 + \nu(x + y)^2 = 2 \cdot ( \nu(x)^2 + \nu(y)^2 ) .$$

Dann wird durch

$$* \qquad \pi(x, y) := \tfrac{1}{2}( \nu(x + y)^2 - \nu(x)^2 - \nu(y)^2 )$$

ein inneres Produkt $\pi$ auf $V$ definiert.

Beweis zu (i): Mit den Eigenschaften des inneren Produktes und der nach Satz II.1.3 induzierten Norm folgt

$$\| x - y \|^2 + \| x + y \|^2 = (x - y, x - y) + (x + y, x + y)$$

$$= (x, x - y) - (y, x - y) + (x, x + y) + (y, x + y)$$
$$= (x, x) - (x, y) - \{ (y, x) - (y, y) \} + (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)$$
$$= 2(x, x) + 2(y, y) = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2) \ .$$

Eine geometrische Interpretation kann im $\mathbb{R}^2$ gegeben werden und begründet den Namen Parallelogrammgleichung. Siehe Übung!

Hinweise zu (ii):

Bei einem reellen inneren Produkt $\langle \ , \ \rangle$ errechnet sich leicht: $\langle x + y, x + y\rangle - \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle = 2\langle x, y\rangle$ . Von daher ist die Definition in der Zeile * naheliegend.

Der Beweis geht zurück auf einen berühmten Physiker und einen noch berühmteren Mathematiker:

Pascal Jordan, Johann von Neumann (1903 – 1957)

*On inner products in linear metric spaces.* Annals of Mathematics, 36 (3), 1935, 719 – 723.

Der Beweis erfordert Methoden der Analysis. Er kann nachgelesen werden in meinem alten Skript:

Materialien zur Linearen Algebra II, S. 10.14 – 10.19, in der Bibliothek unter 95 Mat I 4 SCHA

bzw. in

Bertram Huppert: Angewandte Lineare Algebra. Berlin: de Gruyter, 1990, S. 108 – 111;

bzw. in

Gernot Stroth: Lineare Algebra. Berliner Studienreihe zur Mathematik, Bd. 7. Lemgo: Heldermann Verlag, 1995,

S. 333 – 334.

Nützlich ist die folgende

Definition II.1.6 KRONECKER-Delta

Es seien $i, j \in \mathbb{N}_0$ . Dann wird das KRONECKER-Delta definiert durch

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, \text{ wenn } i = j, \\ 0, \text{ wenn } i \neq j. \end{cases}$$

Leopold Kronecker (1823 – 1891)

Beispiel II.1.4:

Es sei $V = \mathbb{K}^n$ mit dem kanonischen inneren Produkt $(x, y) = \sum_{\nu = 1}^{n} x_\nu \cdot \overline{y_\nu}$ , wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und

$y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Für $i \in \mathbb{n}$ seien wie üblich $e_i$ die kanonische Einheitsvektoren:

$$e_i = ( 0, \ldots, 0, \underset{i\text{-te Stelle}}{1}, 0, \ldots, 0 ) = (\delta_{i\nu}), \ \nu \in \mathbb{n} \ .$$

Dann folgt für $i, j \in \mathbb{N}_0$

$$( e_i, e_j) = \sum_{\nu=1}^{n} \delta_{i\nu} \cdot \delta_{j\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} \delta_{i\nu} \cdot \delta_{\nu j} = \left\{ \begin{array}{ll} \delta_{ii} \cdot \delta_{ii} = 1, & \text{falls } i = j \\ \delta_{ii} \cdot \delta_{ij} + \delta_{ij} \cdot \delta_{jj} = 0, & \text{falls } i \neq j \end{array} \right\} = \delta_{ij} .$$

Beispiel II.1.5

FOURIER`sches Funktionensystem

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830)

Es sei $V = C[-\pi, \pi]$ mit dem inneren Produkt $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$ .

Dann gilt mit $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-\pi, \pi]$ für $c_n(x) := \cos(nx)$, $s_n(x) := \sin(nx)$ :

$$(c_n, s_m) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cdot \sin(mt)\, dt = 0 ,$$

$$(c_n, c_m) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cdot \cos(mt)\, dt = \begin{cases} 2\pi, & \text{falls } n, m = 0, \\ \delta_{nm} \cdot \pi & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$(s_n, s_m) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \cdot \sin(mt)\, dt = \begin{cases} 0, & \text{falls } n, m = 0, \\ \delta_{nm} \cdot \pi & \text{sonst .} \end{cases}$$

Definition II.1.7:

ORTHO $\begin{array}{c}\text{GONAL}\\ \text{NORMAL}\end{array}$ - SYSTEM bzw. -BASIS:

Es sei $(V, ( , ))$ innerer Produktraum über $\mathbb{K}$ . Es sei $S \subset V$ und $0 \notin S$ . Dann heißt $S$ ORTHOGONALSYSTEM, wenn je zwei Vektoren aus $S$ orthogonal sind, d.h. sind $x, y \in S$ und $x \neq y$, so gilt $(x, y) = 0$ , also $x \perp y$ .

Ein Orthogonalsystem $S$ heißt ORTHONORMALSYSTEM, wenn für alle $x \in S$ zusätzlich gilt $\| x \| = 1$,

d.h. $x$ normiert ist.

Ist ein Orthogonal- bzw. Orthonormalsystem $S$ eine Basis, so heißt $S$ ORTHOGONAL- bzw. ORTHONORMAL -BASIS.

Die englischen Ausdrücke sind hier buchstabengleich.

Satz II.1.7:

Ein Orthogonalsystem ist linear unabhängig.

Beweis:

Es seien die Voraussetzungen wie in obiger Definition und $S$ das Orthogonalsystem.

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $v_1, \dots, v_n \in S$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ .

Es sei $$0 = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu v_\nu .$$

Dann folgt für $j \in \mathbb{n}$ mit $(v_\nu, v_j) = \delta_{ij}(v_\nu, v_j)$

$$0 = (0, v_j) = \Big( \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu v_\nu, v_j \Big)$$

$$\underset{(\pi\text{iii})}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu (v_\nu, v_j) = \alpha_j (v_j, v_j) .$$

Da $(v_j, v_j) \neq 0$ , folgt $\alpha_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{n}$ . Also ist die beliebige Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unbahängig und damit auch das Orthogonalsystem $S$ ■

Zunächst weitere Vereinbarungen: Mit OGS wird im Folgenden manchmal Orthogonalsystem und mit ONS Orthonormalsystem abgekürzt, des weiteren Orthogonalbasis mit OGB und Orthonormalbasis mit ONB.

Das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{K}^n$ ist bekanntlich $(x, y) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \overline{y}_\nu$ . Das überträgt sich in

Satz II.1.8

Es seien $(V, (\ ,\ ))$ innerer Produktraum über $\mathbb{K}$ mit $\dim V = n$ und $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Orthonormalbasis. Es seien $x := \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu e_\nu$ und $y := \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu e_\mu$ .

Dann gilt $\quad (x, y) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \overline{y}_\nu$ .

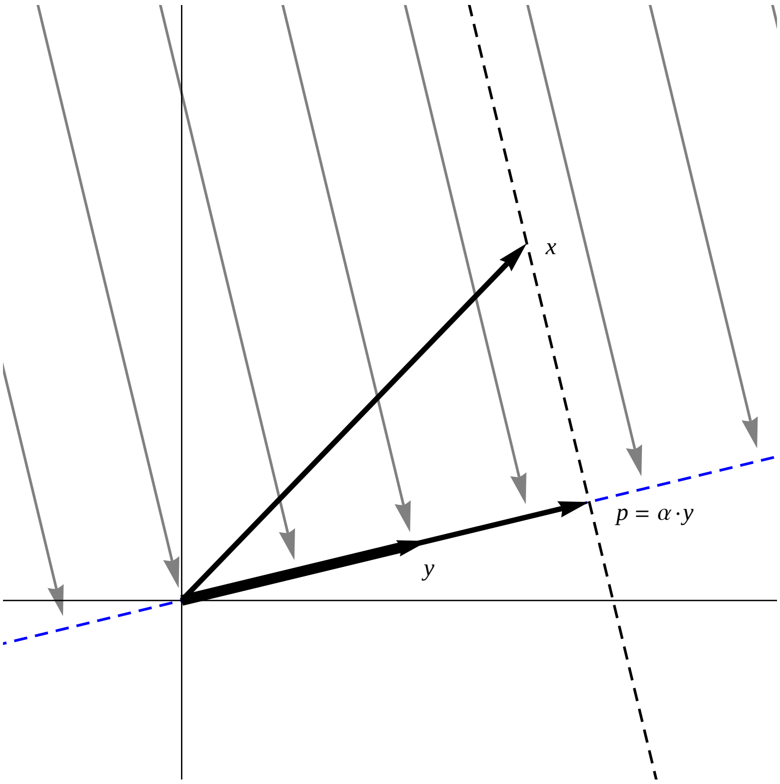
Beweis:

$$(x, y) = \left( \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu e_\nu ,\ \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu e_\mu \right) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \left( e_\nu ,\ \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu e_\mu \right)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \left( \sum_{\mu=1}^{n} \overline{y}_\mu (e_\nu ,\ e_\mu) \right) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \left( \sum_{\mu=1}^{n} \overline{y}_\mu \delta_{\nu\mu} \right) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \overline{y}_\nu \qquad ■$$

Bemerkung:

In der folgenden Grafik soll der Vektor $x$ senkrecht auf die durch den Vektor $y$ definierte Gerade projiziert werden:




Allgemein sei nun in einem inneren Produktraum für zwei Vektoren $x, y$ und einen dazu senkrechten $s$ gefordert:

$x = \alpha \cdot y + s$ und $0 = (s, y)$ . Daraus folgt: $s = x - \alpha \cdot y$ und $0 = (s, y) = (x - \alpha \cdot y, y) = (x, y) - \alpha \cdot (y, y)$, also $s = x - \frac{(x,y)}{(y,y)} y$ .

Definition II. 1.8:

ORTHOGONALE PROJEKTION (*orthogonal projection*)

Es seien $(V, (\ ,\ ))$ innerer Produktraum über $\mathbb{K}$ und $x, y \in V$ mit $y \neq 0$ . Dann heißt $s \in V$ mit $s = x - \frac{(x,y)}{(y,y)} y$ die ORTHOGONALE PROJEKTION VON $x$ AUF $y$ .

Erinnert sei an die frühere

Definition II. 1.9:

LINEARE HÜLLE (*linear span*)

Es seien $V$ Vektorraum über $K$ und $M \subseteq V$ . Dann ist die LINEARE HÜLLE von $M$ die Menge

$$\{ x \in V \mid x = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu m_\nu ,\ x_\nu \in K ,\ m_\nu \in M \} =: [M] .$$

Nun der wichtige

Satz II.1.9 SCHMIDTSCHES ORTHONORMALISIERUNGSVERFAHREN

(*Schmidt orthonormalization process*)

Es sei $(V, (\ ,\ ))$ innerer Produktraum über $\mathbb{K}$ mit $\dim V = n$ .

(i) Es gibt in $V$ eine Orthonormalbasis.

(ii) Es sei $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von $V$ . Dann gibt es eine Orthonormalbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ , so dass

$$\begin{array}{lcl}
[v_1] & = & [e_1] \\
\vdots \quad \ddots & & \vdots \quad \vdots \quad \ddots \\
[v_1, \ldots, v_\nu] & = & [e_1, \ldots, e_\nu] \\
\vdots \qquad \ddots & & \vdots \quad \vdots \qquad \ddots \\
[v_1, \ldots, v_\nu, \ldots, v_n] & = & [e_1, \ldots, e_\nu, \ldots, e_n]
\end{array}$$

Beweis:

Aus (ii) folgt (i). Daher reicht der Beweis zu (ii):

1. Schritt: Da $v_1 \neq 0$ , setze $e_1 := \frac{v_1}{\| v_1 \|}$ . Dann gilt $\| e_1 \| = 1$ und $[e_1] = [v_1]$ .

2. Schritt: Setze nun $\epsilon_2 := v_2 + c_1 e_1$ und bestimme $c_1$ so, dass $\epsilon_2 \perp e_1$ , also $(\epsilon_2, e_1) = 0$ wird, d.h.

$$0 = (v_2 + c_1 e_1, e_1) = (v_2, e_1) + c_1 (e_1, e_1) = (v_2, e_1) + c_1 .$$

Daraus folgt $c_1 = -(v_2, e_1)$ und damit ist $\epsilon_2 = v_2 - (v_2, e_1) e_1$ . Da $\epsilon_2 \notin [e_1]$ , folgt $\epsilon_2 \neq 0$ .

Schließlich wird $\epsilon_2$ noch normiert: $e_2 := \frac{\epsilon_2}{\| \epsilon_2 \|}$ . Da $(v_1, v_2)$ linear unabhängig, folgt auch $[v_1, v_2] = [e_1, e_2]$ .

$(k+1)$-ter Schritt:

Es seien für $k < n$ nun $(e_1, \ldots, e_k)$ als ONS schon entsprechend konstruiert mit $[v_1, \ldots, v_k] = [e_1, \ldots, e_k]$ .

Setze jetzt $\epsilon_{k+1} := v_{k+1} + \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu e_\nu$ und bestimme die $c_\nu$ durch $(\epsilon_{k+1}, e_\nu) = 0$ für $\nu \in \mathbb{k}$ . Es sei also für $\mu \in \mathbb{k}$ :

$$0 = (v_{k+1}, e_\mu) + \Big( \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu e_\nu, e_\mu \Big) = (v_{k+1}, e_\mu) + \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu (e_\nu, e_\mu) = (v_{k+1}, e_\mu) + c_\mu ,$$

daraus folgt $c_\mu = -(v_{k+1}, e_\mu)$ . Da $\epsilon_{k+1} \notin [e_1, \ldots, e_k] = [v_1, \ldots, v_k]$ , folgt $\epsilon_{k+1} \neq 0$ . Also wird $e_{k+1} := \frac{\epsilon_{k+1}}{\| \epsilon_{k+1} \|}$ und es folgt $[v_1, \ldots, v_{k+1}] = [e_1, \ldots, e_{k+1}]$ ■

Korollar II.1.9

Es sei $(V, (\ ,\ ))$ innerer Produktraum über $\mathbb{K}$ mit abzählbarer unendlicher Basis $(v_1, v_2, \ldots)$.

Dann gibt es eine unendliche Orthonormalbasis $(e_1, e_2, \ldots)$ mit $[v_1, \ldots, v_k] = [e_1, \ldots, e_k]$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Der Beweis folgt direkt aus Satz II.1.9.

Das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren wird benannt nach Erhardt Schmidt (1856 – 1959). In vielen Texten wird es Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren gennant, nämlich noch nach Jorgen Pedersen Gram (1850 – 1916).

Beispiel II.1.6:

Im $\mathbb{R}^4$ mit dem inneren Produkt $(x, y) = \sum_{\nu=1}^{4} x_\nu y_\nu$ und den Vektoren $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 1, 1, 1)$ sei $V := [v_1, v_2, v_3]$. $v_1, v_2, v_3$ sollen orthonormiert werden:

Berechne $e_1 = \dfrac{v_1}{\|| v_1 \||}$:

$\| v_1\|^2 = 1 + 1 = 2$, also $e_1 = \dfrac{v_1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)$

$$(v_2, e_1) = \left( (1, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 0 + 0 + 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\epsilon_2 = v_2 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} e_1 = (1, 1, 0, 0) - \tfrac{1}{2}(1, 0, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

$e_2 = \dfrac{\epsilon_2}{\| \epsilon_2 \|}$, usw.

$e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1, 0)$, $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{21}}(-2, 2, 2, 3)$

Hinweise zur 'Orthonormalisierung' mit *Mathematica* finden Sie in dem package Vector Operations .

Die Liste der zu orthogonalisierenden Vektoren:

```
liste = {{1, 0, 1, 0}, {1, 1, 0, 0}, {0, 1, 1, 1}};
```

Ist das kanonische innere Produkt vorausgesetzt, genügt folgender Aufruf:

```
Orthogonalize[liste, Method → "GramSchmidt"]
```

$$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right\}, \left\{-\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \sqrt{\frac{3}{7}}\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{21}} & \sqrt{\frac{3}{7}} \end{pmatrix}$$

Beispiel II.1.7:

Nach einer Übungsaufgabe folgt, dass auf dem $\mathbb{R}^3$ durch

$$\langle x, y\rangle := x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3\, x_2 y_2 + 2\, x_2 y_3 + 2\, x_3 y_2 + 4\, x_3 y_3$$

ein inneres Produkt definiert wird. Danach sollen die Vektoren $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ orthornormiert werden. Dazu muss eine entsprechende *pure function* in *Mathematica* definiert werden:

```
f = ((#1[[1]] #2[[1]] + #1[[1]] #2[[2]] + #1[[2]] #2[[1]] + 3 #1[[2]] #2[[2]] +
      2 #1[[2]] #2[[3]] + 2 #1[[3]] #2[[2]] + 4 #1[[3]] #2[[3]]) &);

liste = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};

Orthogonalize[liste, f, Method → "GramSchmidt"]
```

$$\left\{\{1, 0, 0\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Bzgl. dieses inneren Produktes stehen also die Vektoren $(1, 0, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 1)$ paarweise aufeinander senkrecht.

Als weitere Anwendung des GRAM-SCHMIDTschen Orthonormalisierungsverfahrens zuerst die QR-Zerlegung einer Matrix, die dann in dem folgenden Satz als eine Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme benutzt wird.

Satz II.1.10 QR-Zerlegung einer Matrix (*QR decomposition of a matrix*)

Es sei $A \in \mathbb{K}(m, n)$ mit $\operatorname{rg} A = n$.

Dann gibt es Matrizen $Q$ und $R$, $Q \in \mathbb{K}(m, n)$ und $R \in \mathbb{K}(n, n)$, so dass

$$Q \cdot R = A,$$

ist und $R$ eine reguläre, obere Dreiecksmatrix und die Spalten von $Q$ ein Orthogonal- bzw. Orthonormalsystem bilden.

Beweis:

Es seien $a_1,\dots,a_n$ die Spalten von A , also $a_\nu \in \mathbb{K}^m$ und $\dim[a_1,\dots,a_n] = n$ . Es sei $(e_1,\dots,e_n)$ das nach dem Schmidtschen Verfahren aus $(a_1,\dots,a_n)$ erzeugte Orthogonal- bzw. Orthonormalsystem. Es bezeichne

$$e_\nu := \begin{pmatrix} e_{1\nu} \\ \vdots \\ e_{m\nu} \end{pmatrix} \text{ und } Q := \begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & \cdots & e_{mn} \end{pmatrix} .$$

Wegen

$$\begin{array}{lcl} [a_1] & = & [e_1] \\ \vdots \quad \ddots & \vdots & \vdots \quad \ddots \\ [a_1, \dots, a_\nu] & = & [e_1, \dots, e_\nu] \\ \vdots \qquad\qquad \ddots & \vdots & \vdots \qquad\qquad\qquad \ddots \\ [a_1, \dots, a_\nu, \dots, a_n] & = & [e_1, \dots, e_\nu, \dots, e_n] \end{array}$$

gibt es $r_{\nu\mu} \in \mathbb{K}$ mit

$$\begin{array}{lcl} a_1 & = & r_{11}\, e_1 \\ \vdots & & \vdots \quad \ddots \\ a_\nu & = & r_{1\nu}\, e_1 + \dots + r_{\nu\nu}\, e_\nu \\ \vdots & & \vdots \qquad\qquad\qquad \ddots \\ a_n & = & r_{1n}\, e_1 + \dots + r_{\nu n}\, e_\nu + \dots + r_{nn}\, e_n \end{array}$$

Es sei nun $R$ die obere Dreiecksmatrix

$$R := \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für $Q \cdot R$ :

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & & r_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & r_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \cdots & e_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Eine mühselige aber dennoch triviale Rechnung (Zeile mal Spalte !!!) ergibt:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
x_{11} & = & e_{11}\, r_{11} & & x_{12} & = & e_{11}\, r_{12} & + & e_{12}\, r_{22} & \cdots & x_{1\,n} & = & e_{11}\, r_{1\,n} & + & e_{12}\, r_{2\,n} & + & \cdots & + & e_{1\,n}\, r_{nn} \\
x_{21} & = & e_{21}\, r_{11} & & x_{22} & = & e_{21}\, r_{12} & + & e_{22}\, r_{22} & \cdots & x_{2\,n} & = & e_{21}\, r_{1\,n} & + & e_{22}\, r_{2\,n} & + & \cdots & + & e_{2\,n}\, r_{nn} \\
 & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
x_{m1} & = & e_{m1}\, r_{11} & & x_{m2} & = & e_{m1}\, r_{12} & + & e_{m2}\, r_{22} & \cdots & x_{mn} & = & e_{m1}\, r_{1\,n} & + & e_{m2}\, r_{2\,n} & + & \cdots & + & e_{mn}\, r_{nn} \\
 & & \Downarrow & & & & & \Downarrow & & & & & & & & & \Downarrow & & \\
 & & e_1\, r_{11} & & & & e_1\, r_{12} & + & e_2\, r_{22} & \cdots & & & e_1\, r_{1\,n} & + & e_2\, r_{2\,n} & + & \cdots & + & e_n\, r_{nn} \\
 & & \parallel & & & & & \parallel & & & & & & & & & \parallel & & \\
 & & a_1 & & & & & a_2 & & \cdots & & & & & & & a_n & &
\end{array}$$

Damit ist der Beweis erbracht ■

<u>Bemerkung nach Satz II 1.10</u>

Wenn im Beweis von Satz II 1.10 für $Q$ statt eines Orthogonalsystems ein Orthonormalsystem gewählt wird, folgt analog die Zerlegung von $A$ in eine Orthonormalmatrix $Q$ und eine obere Dreiecksmatrix $R$ .

Doch: Wie ist eigentlich eine Orthogonal– bzw. Orthonormalmatrix definiert?

<u>Definition II.1.10:</u>

ORTHO $\begin{matrix}\text{GONAL}\\ \text{NORMAL}\end{matrix}$ - MATRIX

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}(n, n)$ heißt ORTHOGONALMATRIX bzw. ORTHONORMALMATRIX, wenn die Zeilen der Matrix ein Orthogonal- bzw. Orthonormalsystem bilden.

Die englischen Ausdrücke sind auch hier buchstabengleich.

Jetzt soll die Struktur von Orthogonal– bzw. Orthonormalmatrizen betrachtet werden. Erinnert sei noch an die Bedeutung von regulär: Eine quadratische Matrix $A$ heißt regulär, wenn $A$ "vollen Rang" hat, und das ist ja gleichbedeutend mit $\det A \neq 0$ .

<u>Satz II.1.11:</u>

Es sei $A \in \mathbb{K}(n, n)$ orthogonal bzw. orthonormal. Dann ist $A$ regulär . Ist $A$ orthonormal, so gilt $A^{-1} = A^T$.

Beweis:

Es seien $a_\nu$ , $\nu \in \mathrm{n}$ , die Zeilen von $A$ , d.h. $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $a_\nu = (a_{\nu 1}, \ldots , a_{\nu n})$ .

Dann ist $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1\,n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_1, \ldots , a_n)$ und es folgt

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (a_1, \ldots , a_n)$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & (a_1, a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n, a_1) & \cdots & (a_n, a_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (a_n, a_n) \end{pmatrix} .$$

Da $A$ orthogonal ist, stehen für $i \neq j$ $a_i$ und $a_j$ senkrecht aufeinander, d.h. $(a_i, a_j) = 0$ . Zusätzlich sind die $(a_i, a_i) > 0$ . Damit ist $A$ regulär.

Falls $A$ orthonormal, gilt $(a_i, a_i) = 1$ und damit $A \cdot A^T = E_n$ , woraus sofort $A^{-1} = A^T$ folgt ■

Hinweis: Die Matrix braucht nicht reell zu sein, das wird nicht gefordert!

<u>Satz II.1.12:</u>

Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit $A \in \mathbb{K}(n, n)$ und $A$ regulär, läßt sich mit dem QR-Verfahren lösen:

$$R \cdot x = Q^T \cdot b .$$

Beweis:

Nach Satz II.1.11 besitzt $A$ eine QR-Zerlegung mit einer Orthonormalmatrix $Q$ und einer regulären oberen Dreiecks-matrix $R$ . Also gilt $A \cdot x = Q \cdot R \cdot x = b$. Da $Q^T = Q^{-1}$, folgt $Q^{-1} \cdot Q \cdot R \cdot x = Q^{-1} \cdot b = Q^T \cdot b$ und damit $R \cdot x = Q^T \cdot b$ ■

Wozu der Aufwand? Das ist schnell erklärt: Wenn wir eine reguläre obere Dreiecksmatrix zum Lösen eines LGS erhalten, können wir die Lösungen schon fast ablesen. Wir müssen nur noch die Werte "von unten her" einsetzen, wie es auch in der Schule schon gemacht wird. Damit sparen wir uns einiges an Rechenarbeit, da wir den Gauß-Algorithmus dann nicht anwenden müssen.

In der Numerik-Vorlesung kann auf die Vor- und Nachteile des QR-Verfahrens noch näher eingegangen werden.

<u>Definition II 1.11:</u>

ORTHOGONALER UNTERRAUM (*orthogonal subspace*)

Es sei $(V, (\ ,\ ))$ innerer Produktraum. Es sei $X \subseteq V$ und $X \neq \emptyset$ . Dann heißt

$$X^{\perp} := \{ v \in V \mid v \perp x \text{ für alle } x \in X \}$$

der ORTHOGONALE UNTERRAUM zu $X$ .

$X^{\perp}$ ist Unterraum, denn $0 \in X^{\perp}$, und mit $v_1 \perp x, v_2 \perp x$, d.h. $(v_1, x) = 0, (v_2, x) = 0$ für alle $x \in X$ folgt

$(v_1 + v_2, x) = 0$ , also $v_1 + v_2 \in X^{\perp}$ .

<u>Definition II 1.12:</u>

ORTHOGONALE SUMME (*orthogonal sum*)

Es sei $(V, (\ ,\ ))$ innerer Produktraum. Es seien $U, W$ Unterräume von $V$ . Für alle $u \in U$ und alle $w \in W$ gelte

$u \perp w$ . Dann heißen $U$ und $W$ zueinander orthogonal, geschrieben $U \perp W$ . Ist noch $V' = U + W$ , dann heißt $V'$ die ORTHOGONALE SUMME von $U$ und $W$ .

<u>Bemerkung:</u>

Es sei $V' = U \perp W$ , dann folgt $U \cap W = \{0\}$ , denn:

Es sei $x \in U \cap W$ , dann folgt $(x, x) = 0$ (da $x \in U$ und $x \in W$ und $U \perp W$ ) , d.h. $x = 0$ . Deshalb ist eine orthogonale Summe eine direkte Summe.

Historisches:

Die abstrakten Vektorräume, wie wir sie kennengelernt haben, sind ein Ergebnis der Forschung der zweiten Häfte des 19. Jahrhunderts und der ersten Häfte des 20. Jahrhunderts. Allerdings wird Geometrie schon seit über 2000 Jahren betrieben. Auf Grund der Definition des inneren Produktes lassen sich jetzt aber die "altbekannten" Begriffe wie Winkel und Längen ohne Probleme übertragen.

Es stellt sich eine interessante Frage: Gibt es endlichdimensionale Vektorräume, in denen kein inneres Produkt existiert? Einen gewissen Hinweis über die Nichtexistenz gab eine Übungsaufgabe, bei der $K = \mathbb{Z}_2$ war. Aber wir können beruhigt aufatmen, denn:

<u>Satz II 1.13:</u>

Es sei $V$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann gibt es auf $V$ eine Abbildung $\pi: V \times V \to \mathbb{K}$, mit den Eigenschaften ($\pi$ i) bis ($\pi$ iii) , d.h. ein inneres Produkt.

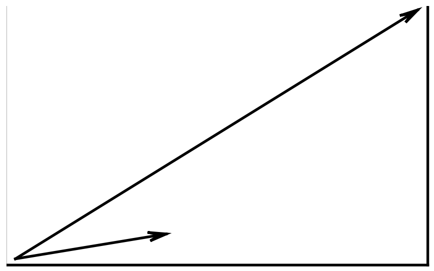
Also: Jeder endlichdimensionale Vektorraum über $\mathbb{K}$ läßt sich zu einem inneren Produktraum ergänzen, bzw. kann als innerer Produktraum interpretiert werden.

Beweis:

Es sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis von $V$. Setze für $i, j \in \mathbb{n}$ einfach $\pi(v_i, v_j) := \delta_{ij}$. Es seien nun $x, y \in V$ beliebig mit

$x = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu v_\nu$ , $y = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu v_\nu$ . Dann wird $\pi(x, y) := \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \overline{y_\nu}$ gesetzt. Es folgen ($\pi$ i) bis ($\pi$ iii) wie in einer Übungsaufgabe ■

Also existieren auch immer Winkel! Nur hängen die Winkel von der Wahl des inneren Produktes ab. Deshalb muss ein rechter Winkel nicht immer das sein, was wir aus dem Anschauungsraum kennen und gewohnt sind.



Es kann also im $\mathbb{R}^2$ ein inneres Produkt definiert werden, so dass die beiden obenstehenden Vektoren jeweils die Länge Eins haben und aufeinander senkrecht stehen!