II.2. Lineare Abbildungen auf inneren Produkträumen

Zuerst werden lineare Abbildungen A, B zwischen verschiedenen Vektorräumen betrachtet. Dabei interessiert erst einmal, ob folgende Gleichungen überhaupt möglich sind:

$$(Ax, y) = (x, By)\ ,\ \ (Ax,\ Ay) = (x, y)\ ,\ (Ax, y) = (x, Ay)\ .$$

Die Gleichungen werden in diesem Kapitel erkenntnisleitend sein.

<u>Definition II.2.1:</u>
ADJUNGIERTE ABBILDUNG (*adjoint mapping*)
Es seien $(V, (\ ,\ ))$, $(W, \langle\ ,\ \rangle)$ innere Produkträume über dem selben Körper $\mathbb{K}$. Es sei $A \in \hom(V, W)$. Eine lineare Abbildung $B \in \hom(W, V)$ heißt die Adjungierte von A , falls für alle $v \in V$ und alle $w \in W$ gilt $\langle Av, w\rangle = (v, Bw)$.

<u>Satz II.2.1:</u>
Es seien $(V, (\ ,\ ))$, $(W, \langle\ ,\ \rangle)$ innere Produkträume über dem selben Körper $\mathbb{K}$. Es sei $A \in \hom(V, W)$. Dann gibt es höchstens eine adjungierte Abbildung zu A .

Beweis:

Es seien etwa $B, C \in \hom(W, V)$ mit $\langle Av, w\rangle = \begin{cases} (v,\ Bw) \\ (v,\ Cw) \end{cases}$ für alle $v \in V$ und $w \in W$. $(v, Bw) = (v, Cw)$ bedingt

$Bw = Cw$, d.h. $B = C$ ■

<u>Beispiel II.2.1:</u>
Es sei $V = W = \mathbb{R}^n$. Es seien $(e_1, ..., e_n)$ die kanonische Einheitsbasis des $\mathbb{R}^n$ und $x = \sum_{\nu=1}^n x_\nu\, e_\nu$, $y = \sum_{\nu=1}^n y_\nu\, e_\nu$.

Es seien $a_{\nu\mu} \in \mathbb{R}$ mit $\nu, \mu \in \mathbb{n}$, wobei $a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu}$. $A \in \hom(V, V)$ sei definiert durch:

$$Ae_\nu := \sum_{\mu=1}^n a_{\mu\nu}\, e_\mu\ ,\ \ \nu \in \mathbb{n}\ .$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}(Ax, y) &= \left(A(\textstyle\sum_{\nu=1}^n x_\nu\, e_\nu), \sum_{\kappa=1}^n y_\kappa\, e_\kappa \right)\\ &= \left(\textstyle\sum_{\nu=1}^n x_\nu\, A\, e_\nu, \sum_{\kappa=1}^n y_\kappa\, e_\kappa \right)\\ &= \textstyle\sum_{\nu=1}^n x_\nu \sum_{\mu=1}^n a_{\mu\nu} \left(e_\mu, \sum_{\kappa=1}^n y_\kappa\, e_\kappa \right)\\ &= \textstyle\sum_{\nu=1}^n x_\nu \sum_{\mu=1}^n a_{\mu\nu} \sum_{\kappa=1}^n y_\kappa (e_\mu, e_\kappa)\\ &= \textstyle\sum_{\nu=1}^n x_\nu \sum_{\mu=1}^n a_{\mu\nu}\, y_\mu\ ,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(x, Ay) &= \left(\textstyle\sum_{\nu=1}^n x_\nu\, e_\nu, A(\sum_{\mu=1}^n y_\mu\, e_\mu) \right)\\ &= \left(\textstyle\sum_{\nu=1}^n x_\nu\, e_\nu, \sum_{\mu=1}^n y_\mu\, A\, e_\mu \right)\\ &= \left(\textstyle\sum_{\nu=1}^n x_\nu\, e_\nu, \sum_{\mu=1}^n y_\mu \sum_{\kappa=1}^n a_{\kappa\mu}\, e_\kappa \right)\\ &= \textstyle\sum_{\nu=1}^n x_\nu \sum_{\mu=1}^n y_\mu \sum_{\kappa=1}^n a_{\kappa\mu} (e_\nu, e_\kappa)\\ &= \textstyle\sum_{\nu=1}^n x_\nu \sum_{\mu=1}^n y_\mu\, a_{\nu\mu}\\ &= \textstyle\sum_{\nu=1}^n x_\nu \sum_{\mu=1}^n y_\mu\, a_{\mu\nu}\ .\end{aligned}$$

Also gilt $(Ax, y) = (x, Ay)$ ■

<u>Satz II 2.2:</u>
Es sei $(V, (\ ,\ ))$ innerer Produktraum über $\mathbb{K}$. Zu jedem linearen Funktional $L \in \hom(V, \mathbb{K})$ gibt es genau ein $a \in V$ mit $L(x) = (x, a)$ für alle $x \in V$.

Beweis:
Es sei $(e_1, ..., e_n)$ Orthonormalbasis von V. Dann seien $l_\nu := L(e_\nu) \in \mathbb{K}$ und $a_\nu := \overline{l_\nu}$.
Mit $a := \sum_{\nu=1}^n a_\nu e_\nu$ und $x := \sum_{\mu=1}^n x_\mu e_\mu$ folgt

$$\begin{aligned} L(x) &= L\left(\sum_{\mu=1}^n x_\mu e_\mu\right) \\ &= \sum_{\mu=1}^n x_\mu L(e_\mu) \\ &= \sum_{\mu=1}^n x_\mu l_\mu \\ &= \sum_{\mu=1}^n x_\mu \overline{a_\mu}, \end{aligned}$$

andererseits gilt auch $(x, a) = (\sum_{\mu=1}^n x_\mu e_\mu, \sum_{\nu=1}^n a_\nu e_\nu) = \sum_{\mu=1}^n x_\mu \overline{a_\mu}$.

Zur Eindeutigkeit:
Es sei $b \in V$, so dass auch $L(x) = (x, b)$ für alle $x \in V$. Aus $(x, a) = (x, b)$ für alle $x \in V$ folgt $a = b$ ■

Nun der wichtige

Satz II 2.3:
Es seien $(V, (\ ,\ ))$, $(W, \langle\ ,\ \rangle)$ innere Produkträume über dem selben Körper $\mathbb{K}$. Es sei V endlichdimensional.
Es sei $A \in \hom(V, W)$. Dann existiert zu A eine Adjungierte.

Beweis:
Es sei $w \in W$. Mit $x \in V$ wird durch $L(x) := \langle Ax, w\rangle$ ($= L_w(x)$) ein lineares Funktional $L \in \hom(V, \mathbb{K})$ definiert.
Nach Satz II.2.2 gibt es dann zu w und L ein $y \in V$ mit $L(x) = (x, y)$. Nun wird $A^*(w) := y$ für $w \in W$ gesetzt, d.h. $A^* \in \mathrm{abb}(W, V)$. Dann gilt für alle $x \in V$ und jedes $w \in W$

$$L(x) = \langle Ax, w\rangle = (x, y) = (x, A^*(w)).$$

Es bleibt zu zeigen, dass A^* linear ist: Es sei $\alpha \in \mathbb{K}$:
$(x, A^*(a\, w)) = \langle Ax, \alpha w\rangle = \overline{\alpha}\langle Ax, w\rangle = \overline{\alpha}(x, A^* w) = (x, \alpha A^* w)$.
Also ist $A^*(\alpha,w) = \alpha A^*(w)$.
Mit $v, w \in W$ folgt
$(x, A^*(v + w)) = \langle Ax, v+w\rangle = \langle Ax, v\rangle + \langle Ax, w\rangle = (x, A^* v) + (x, A^* w) = (x, A^* v + A^* w)$.
Also ist $A^*(v + w) = A^* v + A^* w$ und insgesamt A^* linear ■

Satz II 2.4:
Es seien $(V, (\ ,))$, $(W, \langle\ ,\ \rangle)$ innere Produkträume über dem selben Körper $\mathbb{K}$. Es seien $A \in \hom(V, W)$ und $(e_1, ..., e_n)$ Orthonormalbasis. Dann ist $A^* w = \sum_{\nu=1}^n \langle w, A e_\nu\rangle e_\nu$ für alle $w \in W$.

Beweis:
Für alle $x \in V$ gilt $x = \sum_{\nu=1}^n (x, e_\nu) e_\nu$ und damit auch $A^* w = \sum_{\nu=1}^n (A^* w, e_\nu) e_\nu = \sum_{\nu=1}^n \langle w, A e_\nu\rangle e_\nu$ ■

Satz II 2.5:
Es seien $(V, (\ ,\ ))$, $(W, \langle\ ,\ \rangle)$ innere Produkträume über dem selben Körper $\mathbb{K}$. Zu $A \in \hom(V, W)$ existiere die Adjungierte A^*.
Dann gilt:

(i) Es existiert $(A^*)^*$ und es gilt $A^{**} := (A^*)^* = A$.
(ii) $\ker A^* = (\mathrm{im}\, A)^\perp$.
(iii) $\ker A = (\mathrm{im}\, A^*)^\perp$.
(iv) Ist A surjektiv, so ist A^* injektiv.
(v) Ist A^* surjektiv, so ist A injektiv.

Beweis:

Zu (i): Es seien $v \in V$ und $w \in W$.

Dann folgt $(A^* w, v) = \overline{(v, A^* w)} = \overline{\langle \mathrm{Av}, w \rangle} = \langle w, Av \rangle$, also $A^{**} = A$.

Zu (ii): $\operatorname{im} A = \{ w \in W \mid \text{Es gibt ein } v \in V \text{ mit } Av = w \}$

$$\begin{aligned}(\operatorname{im} A)^{\perp} &= \{ w \in W \mid w \perp Av \text{ für alle } v \in V \} \\ &= \{ w \in W \mid 0 = \langle Av, w \rangle = (v, A^* w) \text{ für alle } v \in V \} \\ &= \{ w \in W \mid A^* w = 0 \} \\ &= \ker A^*\end{aligned}$$

zu (iii):
$$\begin{aligned}\ker \mathrm{A} &= \{ w \in W \mid Aw = 0 \} \\ &= \{ w \in W \mid 0 = \langle A^* v, w \rangle = (v, Aw) \} \\ &= \{ w \in W \mid w \perp A^* v \text{ für alle } v \in V \} \\ &= (\operatorname{im} A^*)^{\perp}\end{aligned}$$

Zu (iv): Ist A surjektiv, dann ist $\operatorname{im} A = W$. Da $\{0\} = W^{\perp} = (\operatorname{im} A)^{\perp} = \ker A^*$ folgt, dass A^* injektiv ist.

Zu (v): Ist A^* surjektiv, dann ist $\operatorname{im} A^* = W$. Da $\{0\} = W^{\perp} = (\operatorname{im} A^*)^{\perp} = \ker A$ folgt, dass A injektiv ist ■