Satz II 2.6:

Es sei $(V, (\ ,\ ))$ endlichdimensionaler innerer Produktraum über $\mathbb{K}$. Es sei $B = (e_1, ..., e_n)$ Orthonormalbasis von V. Es sei $A \in \hom(V, V)$. A habe bzgl. B die Matrix $[A] = \left(a_{i\,j}\right)$.

Genau dann ist A selbstadjungiert, wenn

$$a_{i\,j} = \overline{a}_{j\,i} \quad , \quad i,\ j \in \mathbb{n}\ .$$

Insbesondere sind die $a_{i\,i}$ reell.

Von daher ist die folgende Definition angebracht:

Definition II.2.2:

SYMMETRISCHE bzw. HERMITESCHE MATRIX (*symmetric or hermitian matrix*)

Es sei $A \in \mathbb{K}(n, n)$. A heißt symmetrisch oder hermitesch, falls

$$A = \overline{A^T} = (\overline{A})^T\ ,$$

also mit $A = \left(a_{i\,j}\right)$

$$a_{i\,j} = \overline{a}_{j\,i} \quad , \quad i,\ j \in \mathbb{n}\ .$$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so ist $a_{i\,j} = a_{j\,i}$, also $A = A^T$; daher die Bezeichnung hermitesch.

Die Aussage von Satz II.2.6 lautet jetzt:

Genau dann ist A selbstadjungiert, wenn $[A]$ hermitesch ist.

Beweis:

Es sei $B = (e_1, ..., e_n)$ Orthonormalbasis von V. Dann gilt mit $a_{i\,j} \in \mathbb{K}$

$$A\,e_j = \sum_{i=1}^n a_{i\,j}\,e_i\ .$$

A ist selbstadjungiert. Von daher (warum?) sind die folgenden Gleichungen äquivalent:

$$\left(A\,e_i,\ e_j\right) = \left(e_i,\ A\,e_j\right)$$

$$\left(A\,e_i,\ e_j\right) = \overline{\left(A\,e_j,\ e_i\right)}$$

$$a_{j\,i} = \overline{a_{i\,j}} \qquad \blacksquare$$

Die nächsten Sätze behandeln Eigenwerte und das charakteristische Polynom von selbstadjungierten Abbildungen.

Satz II 2.7:

Es sei $(V, (\ ,\ ))$ endlichdimensionaler innerer Produktraum über $\mathbb{K}$.

Es sei $A \in \hom(V, V)$ selbstadjungiert. Dann gilt

(i) $(A\,x,\ x) = (x,\ A\,x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in V$.

(ii) Die Eigenwerte von A sind reell.

(iii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Beweis:

Zu (i) :

Es sei $x \in V$. Dann gilt

$$(A\,x,\ x) = (x,\ A^*\,x) = (x,\ A\,x) = \overline{(A\,x,\ x)}\ .$$

Also ist $(A\,x,\ x) \in \mathbb{R}$.

Zu (ii) :

Es sei α EW von A . Dann gilt (weshalb?)

$$\begin{aligned}\alpha(x,\ x) &= (\alpha\,x,\ x) = (A\,x,\ x)\\ &= \overline{(A\,x,\ x)}\\ &= \overline{(\alpha\,x,\ x)}\\ &= (\overline{\alpha}\,x,\ x)\\ &= \overline{\alpha}\,(x,\ x)\ .\end{aligned}$$

Also ist $\alpha = \overline{\alpha}$, d.h. $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zu (iii) :

Es sei für $i = 1,\ 2$ α_i Eigenwert zum Eigenvektor x_i und $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Dann gilt

$$\alpha_1\,(x_1,\ x_2) = (\alpha_1\,x_1,\ x_2) = (A\,x_1,\ x_2) = (x_1,\ A\,x_2) = (x_1,\ \alpha_2\,x_2) = \alpha_2(x_1,\ x_2)\ .$$

Da $\alpha_1 \neq \alpha_2$ folgt $(x_1,\ x_2) = 0$, d.h. $x_1 \perp x_2$ ■

<u>Satz II 2.8:</u>

Es sei $(V, (\ ,\ ))$ endlichdimensionaler innerer Produktraum über $\mathbb{K}$.

Es sei $A \in \hom(V,\ V)$ selbstadjungiert.

Dann zerfällt das charakteristische Polynom von A über $\mathbb{R}$;

d.h. $\quad P_A = \prod_{k=1}^{n}(x - \alpha_k)\ ,\ \ \alpha_k \in \mathbb{R}$.

Beweis:

1. Fall: Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, also A unitär.

Dann zerfällt P_A nach dem Fundamentalsatz der Algebra über $\mathbb{C}$. Nach dem vorigen Satz ist aber jeder Eigenwert von A , also jede Nullstelle von P_A reell. Also gilt in diesem Fall die Behauptung.

2. Fall: Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, also A euklidisch.

Es sei $B = (\,e_1, ..., e_n)$ Orthonormalbasis von V und $[\,A\,] \in \mathbb{R}(n,\ n)$ sei die Matrix von A bzgl. dieser Basis. Dann ist nach Satz II 2.6 $[\,A\,]$ hermitesch, insbesondere reell symmetrisch. Die Matrix $[\,A\,]$ definiert eine lineare Abbildung, etwa $\tilde{A}$ auf dem $\mathbb{C}^n$ mit dem Skalarkörper $\mathbb{C}$, der kanonischen Einheitsbasis und dem kanonischen inneren Produkt. Nach Satz II 2.6 ist dann $\tilde{A}$ selbstadjungiert und hat nach Fall 1 ein charakteristisches Polynom, dass über $\mathbb{R}$ zerfällt.

Nach der Definition des charakteristischen Ploynoms gilt nun

$$P_A = P_{[A]} = P_{\tilde{A}}\ ;$$

also gilt auch in diesem Falle die Behauptung ■

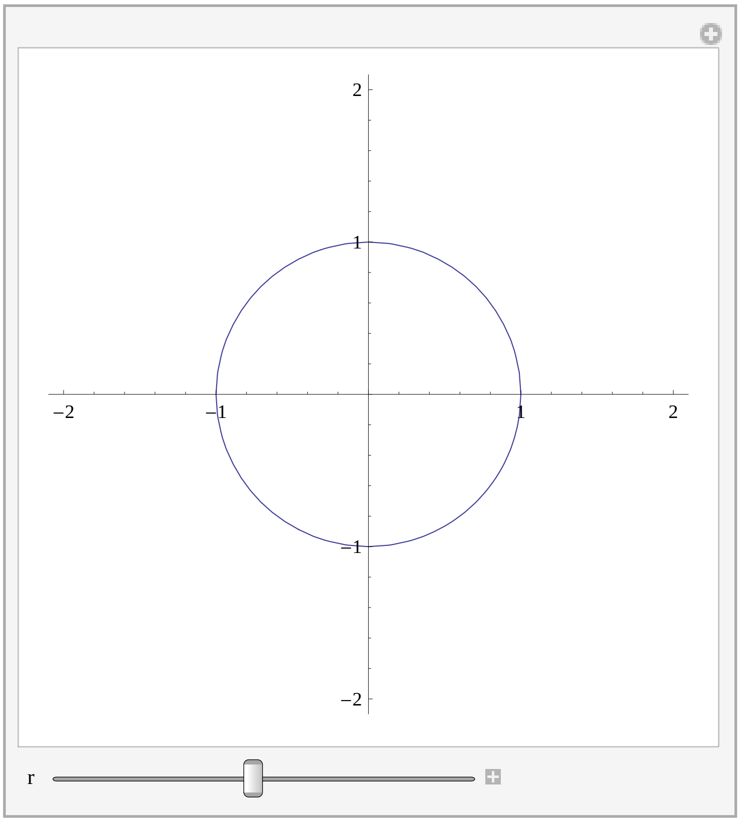
II.3. Kegelschnitte

http://demonstrations.wolfram.com/ConicSectionCurves/

Alle Punkte $x = (x_1, x_2)$, die die Gleichung

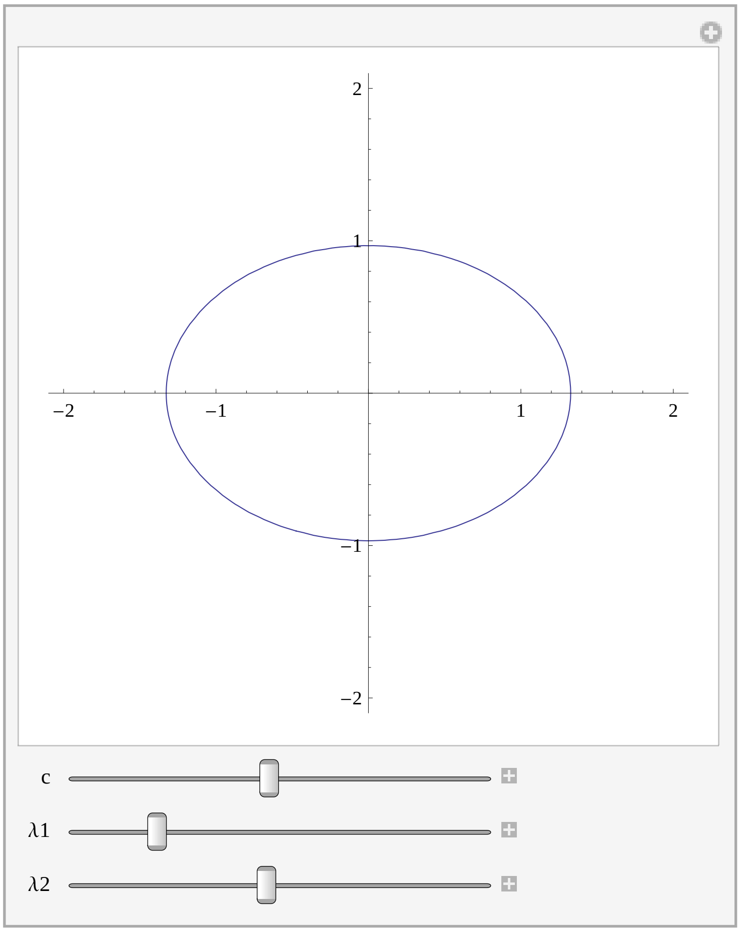
$$x_1^2 + x_2^2 = r^2$$

erfüllen, liegen auf einem Kreis um den Nullpunkt mit Radius r .



Eine Ellipsengleichung sieht nur wenig anders aus:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = c$$



Die Gleichung

$$\lambda_1\, x_1^2 + \lambda_2\, x_2^2 = c$$

läßt sich - auf den ersten Blick - etwas umständlicher schreiben:

$$(x_1,\ x_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - c = 0$$

oder auch

$$x^T\, D\; x - c = 0\,.$$

Jetzt soll die Ellipse noch gedreht werden mit einer Drehmatrix

$$R(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Also wird x ersetzt durch $R\,x$ und x^T durch $x^T\,R^T$:

$$x^T\,R^T\,D\;R\;x - c = 0\,.$$

Schließlich soll mit einem Verschiebungsvektor v die Ebene noch verschoben werden, also x durch $x - v$ ersetzt werden:

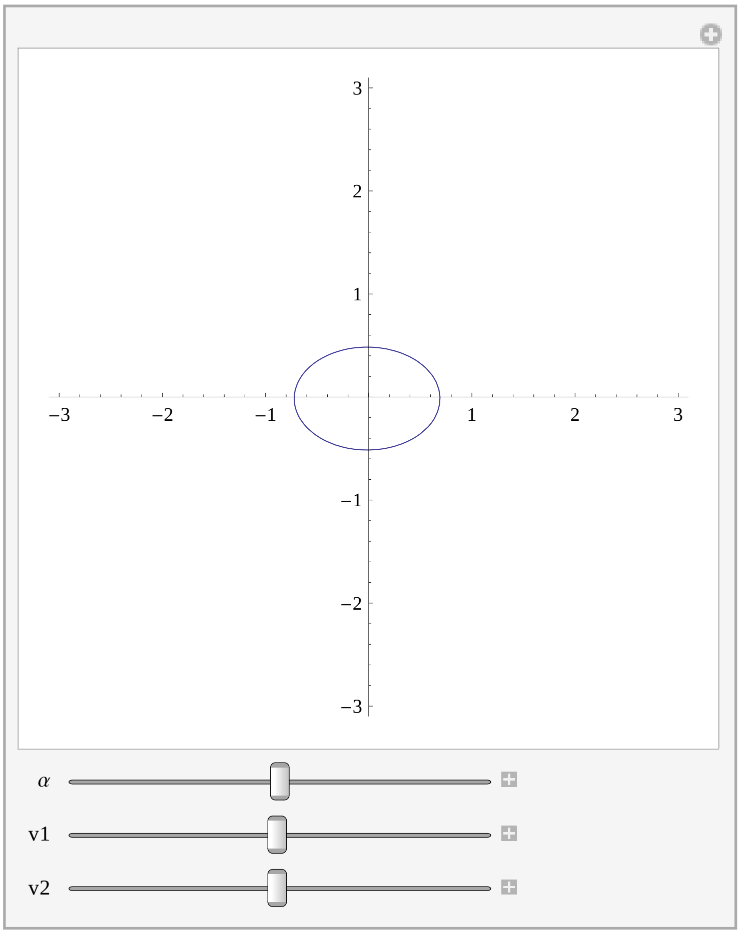
$$\left(x^T - v^T\right) R^T\,D\;R\,(x - v) - c = 0\;.$$

Da $A := R^T\,D\;R$ symmetrisch ist, gilt $x^T\,A\,v = v^T\,A\,x$ und damit folgt:

$$x^T\,A\,x - 2\,x^T\,A\,v + v^T\,A\,v - c = 0\,.$$

Werden nun noch $b := A\,v$ und $d := v^T\,A\,v - c$ gesetzt, so folgt als allgemeine Ellipsengleichung

$$x^T\,A\;x - 2\,x^T\;b + d = 0\,.$$



Wird speziell $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha = 45\,°$ und $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ gewählt, so folgt

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ und } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und nach einigen Rechnungen

$$3\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + 3\,x_2^2 - 14\,x_1 + 10\,x_2 + 18 = 0\,.$$

In allgemeiner Form:

$$a\,x_1^2 + 2\,b\,x_1\,x_2 + c\,x_2^2 + 2\,d\,x_1 + 2\,e\,x_2 + f = 0\,.$$