Definition 1.13a (*Kollinear*)

Seien $A, B, C \in \Gamma$. Gibt es eine Gerade $g \subset \Gamma$ mit $A, B, C \in g$,
so heißen A, B, C ***kollinear***.

Die Definition überträgt sich in "natürlicher" Weise auf mehr als drei Punkte.

Definition 1.13b (*Norm, Metrik*)

Es seien $\Gamma := \mathbb{R}^2$ und $P := (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Die Abbildung $\|\,.\,\|_e : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $P \to \|P\|_e := \sqrt{x^2 + y^2}$
heißt *euklidische Norm* .

Die Abbildung $\|\,.\,\|_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $P \to \|P\|_m := \max(|x|, |y|)$
heißt *Maximumsnorm* .

Die Abbildung $\|\,.\,\|_b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $P \to \|P\|_b := |x| + |y|$
heißt *Summennorm* .

Analog zur Definition 2.11 (Seite 116) werden zu diesen Normen die entsprechenden *Metriken* definiert;
etwa mit $P := (x, y)$ und $Q := (u, v)$

$$|P, Q|_b := \left| x - u \,| + |\, y - v \right|.$$

Bemerkung 1.13c
Wie sieht bzgl. dieser Metrik der Kreis mit Radius 1 aus?

Definition 1.18 (*Winkel*)

Seien $S, A, B \in \Gamma$ mit $S \notin \{A, B\}$ und $g = \lfloor SA$, $h = \lfloor SB$ zwei Halbgeraden mit Anfangspunkt S .
S heißt in diesem Zusammenhang ***Scheitelpunkt*** des Winkels
und die Halbgeraden werden ***Schenkel*** des Winkels genannt.

Fall 1:
Seien A, B, S kollinear; d.h. es gibt eine Gerade $g \subset \Gamma$ mit $A, B, S \in g$.
Es sei H eine der beiden abgeschlossenen Halbebenen, in die Γ durch g zerlegt wird.
Wenn $A < S < B$ oder $B < S < A$, dann heißt H ein ***gestreckter Winkel*** .
(A und B "liegen auf verschiedenen Seiten" von S .)

Wenn $S < A < B$ oder $S < B < A$ oder $B < A < S$ oder $A < B < S$,
dann heißt die jeweilige Halbgerade mit Anfangspunkt S ein ***Nullwinkel*** .
(A und B "liegen auf der gleichen Seiten" von S .)

Fall 2:
Seien A, B, S nicht kollinear.
Es bezeichne $\overline{g} := \overline{SA}$ bzw. $\overline{h} := \overline{SB}$ die zu g bzw. h gehörenden Geraden.
Es sei nun H_{gB} die Menge aller Punkte $P \in \Gamma$, die auf der selben Seite wie B bezüglich g liegen; also die offene Halbebene mit Rand $\overline{g}$, in der B liegt.
Analog sei H_{hA} die offene Halbebene mit Rand $\overline{h}$ in der A liegt.

Dann heißt $\langle g, h\rangle := H_{gB} \cap H_{hA}$ ein ***Innenwinkelbereich***
und $\langle(g, h) := \left(H_{gB} \cap H_{hA}\right) \cup (g \cup h)$ ein ***Innenwinkel*** .

Das Komplement bzgl. Γ des Innenwinkelbreichs $\langle g, h\rangle$ heißt ***Aussenwinkel*** und wird mit $\rangle (g, h)$ bezeichnet.

Winkel sind Nullwinkel, gestreckte Winkel sowie Innen- und Außenwinkel.

Bemerkung 1.19a

Nach dieser Definition haben Winkel keine Orientierung: D.h. es gilt z.B. $\langle(g, h) = \langle(h, g)$, in Konsistenz mit dem gleich folgenden **Axiom 11**.