Vorlesung am 22. 5. 2009

Sätze über zentrische Streckungen

Axiom 1.57a
Es seien $A, B, Z \in \Gamma$ und $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Mit $A' := Z_{Z,k}(A)$, $B' := Z_{Z,k}(B)$ und $g := \overline{AB}$

gilt $g' := Z_{Z,k}(g) = \overline{A'B'}$,

d.h. die zentrische Streckung ist *geradentreu*.

Bemerkungen 1.57b
Für $k \neq 1$ ist Z der einzige Fixpunkt von $Z_{Z,k}$, also $Z' = Z_{Z,k}(Z) = Z$.
Denn wäre $F = Z_{Z,k}(F) = F'$ ein weiterer Fixpunkt,
dann wäre $|ZF| = |ZF'| = |k| \cdot |ZF|$,
was ein Widerspruch ist, da für $k = -1$ $Z_{Z,-1} = D_{Z,180}$ eine Punktspiegelung ist.

Satz 1.58a
Es seien $A, B, Z \in \Gamma$ und $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Mit $A' := Z_{Z,k}(A)$ und $B' := Z_{Z,k}(B)$, $g := \overline{AB}$ und $g' := Z_{Z,k}(g) = \overline{A'B'}$

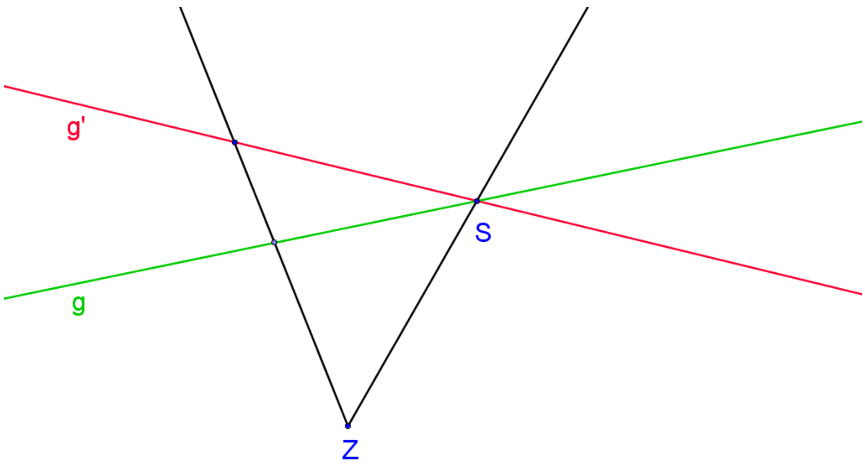
gilt $g \parallel g'$,

d.h. bei einer zentrischen Streckung sind Gerade und Bildgerade parallel.

Beweis:

1. Alle Geraden, die durch Z gehen, werden auf sich abgebildet.
Also gilt dafür die Behauptung.

2. g gehe nicht durch Z .
2.1: $k = 1$: Jetzt ist $Z_{Z,1} = \mathrm{id}$, und wieder folgt die Behauptung.
2.2: $k \neq 1$: Annahme: $g \rfloor\lceil g'$, d.h. also g und g' nicht parallel.
Dann gibt es einen Schnittpunkt S der beiden Geraden: $\{S\} = g \cap g'$.



Nun gilt $S' = Z_{Z,k}(S) \in \overline{ZS} \cap g' = S$ und damit wäre S neben Z ein zweiter Fixpunkt von $Z_{Z,k}$
im Widerspruch zu Bemerkung 1.57b.

Satz 1.58b
Es seien $A, B, Z \in \Gamma$ und $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Mit $A' := Z_{Z,k}(A)$, $B' := Z_{Z,k}(B)$ und $g := \overline{AB}$ gelte $Z \in \overline{AB}$.
Dann gilt $|A' B'| = |k| \cdot |AB|$,

d.h. die Länge einer Strecke auf einer Geraden durch Z multipliziert mit $|k|$ ergibt die Länge der Bildstrecke.

Der Beweis folgt z.B. für $A < B$ und $k > 0$ aus
$|A' B'| = |ZB'| - |ZA'| = |k| \cdot |ZB| - |k| \cdot |ZA| = |k| \cdot |A B|$.

Satz 1.58c

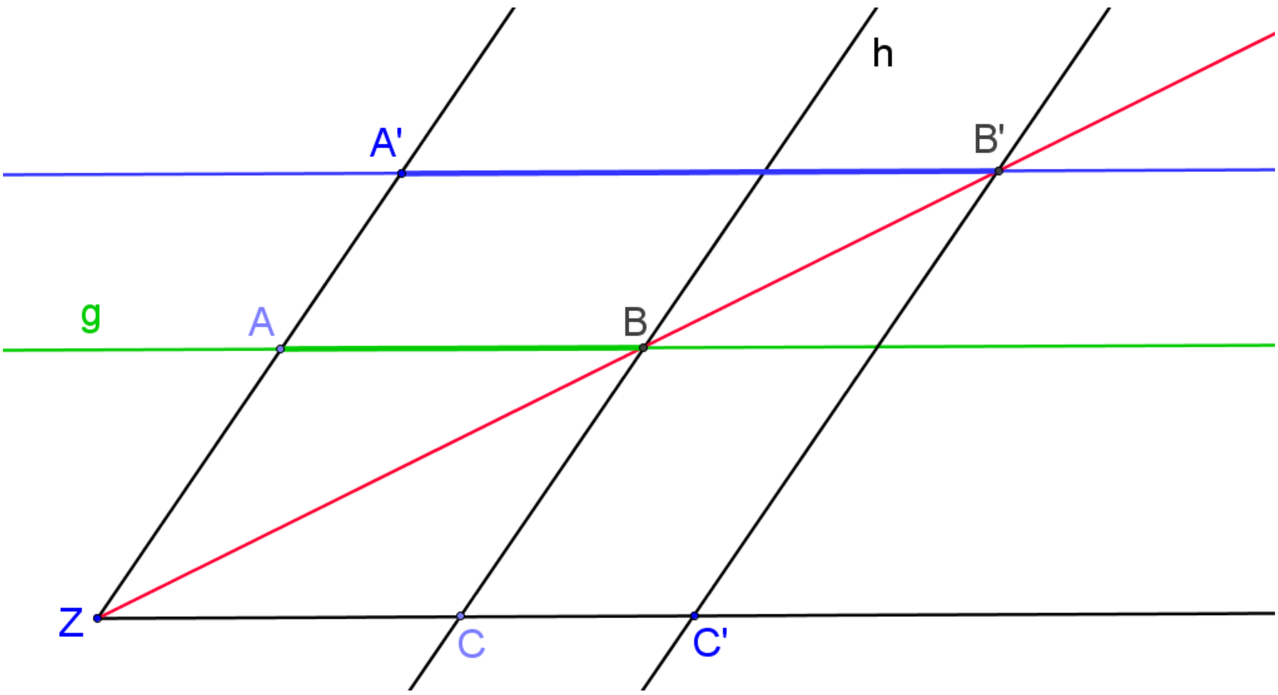
Es seien $A, B, Z \in \Gamma$ und $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Mit $A' := Z_{Z,k}(A)$, $B' := Z_{Z,k}(B)$, $s := [AB$ und $s' := Z_{Z,k}(s) = [A'B'$

gilt $s \parallel s'$ und $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$,

d.h. bei einer zentrischen Streckung sind Strecke und Bildstrecke parallel und die Länge der Bildstrecke ist das $|k|$ -facheder Länge der Strecke .

Beweis:
Die Parallelität folgt aus Satz 1.58a.

Es sei $k > 0$.



Es bezeichne g die Parallele zu $\overline{AB}$ durch Z und h die Parallele zu $\overline{ZA}$ durch B.
Für P sei jeweils $P' := Z_{Z,k}(P)$. Die Vierecke $ZABC$ und $ZA'B'C'$ sind nach Satz 1.58a Parallelogramme; die jeweils parallelen Seiten entsehen also durch Verschiebungen und sind somit jeweils gleich lang.
Damit folgt aus $|AB| = |ZC|$, $|A'B'| = |ZC'|$ und $|ZC'| = |k| \cdot |ZC|$ nun $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$.

Der Fall $k < 0$ folgt mit der Bemerkung, dass dann $Z_{Z,k} = D_{Z,180} \circ Z_{Z,|k|}$ gilt und Drehungen parallelen- bzw. längentreu sind.

Satz 1.58d
Eine zentrische Streckung $Z_{Z,k}$ ist winkeltreu.

Beweis:
Die Schenkel eines Winkels werden jeweils auf parallele Halbgeraden abgebildet.