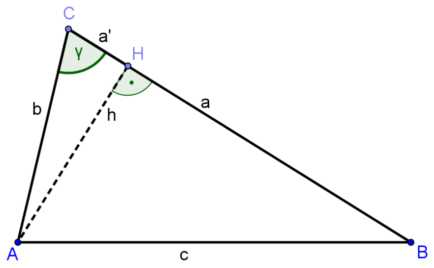
Cosinussatz

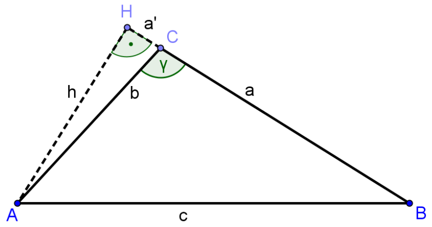
Wie im Abschnitt **Die Satzgruppe des Pythagoras** werden im Folgenden Strecken und ihre Längen jeweils gemeinsam mit dem gleichen kleinen Buchstaben bezeichnet.



Sei das Dreieck spitzwinkelig.
Mit dem Satz des Pythagoras folgt:

$$h^2 = c^2 - (a - a')^2 \,,$$
$$h^2 = b^2 - (a')^2 \,,$$
$$c^2 = (a - a')^2 + h^2 = (a - a')^2 + b^2 - (a')^2 =$$
$$= \quad a^2 - 2\,a \cdot a' + (a')^2 + b^2 - (a')^2$$
$$= \quad a^2 + b^2 - 2\,a \cdot a' \;.$$

Nun gilt $a' = b \cdot \cos(\gamma)$, so dass in diesem Falle die Aussage des Cosinussatzes folgt:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$.



Nun sei das Dreieck stumpfwinkelig.
Mit dem Satz des Pythagoras folgt:

$$
\begin{aligned}
h^2 &= c^2 - (a + a')^2 \,, \\
h^2 &= b^2 - (a')^2 \,, \\
c^2 &= (a + a')^2 + h^2 = (a + a')^2 + b^2 - (a')^2 = \\
&= a^2 + 2\, a \cdot a' + (a')^2 + b^2 - (a')^2 \\
&= a^2 + b^2 + 2\, a \cdot a' \,.
\end{aligned}
$$

Jetzt gilt $a' = b \cdot \cos(180\,° - \gamma)$ und $\cos(180\,° - \gamma) = \cos(\pi - \gamma) = -\cos(\gamma)$, so dass auch in diesem Falle die Aussage des Cosinussatzes folgt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \,.$$

The Law of Cosines
http://demonstrations.wolfram.com/TheLawOfCosines/