Ralf Schaper
Torsten Sprenger

Übungen zur Vorlesung

UNIKASSEL VERSITÄT

Übungsblatt 10 **ELEMENTARGEOMETRIE** **16.06.2009**

Für die Studierenden des L3 Studienganges.

Aufgabe 1
Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und es bezeichne $<\cdot\,,\,\cdot>$ das innere Produkt auf dem $\mathbb{R}^3$;
also, wenn $a = (a_1, a_2, a_3)^T$ und $b = (b_1, b_2, b_3)^T$, dann sei

$$< a, b > = \ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Nun werde das Vektorprodukt (auch Kreuzprodukt genannt) definiert durch

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad a \times b := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Symbolisch läßt sich $a \times b$ auch so schreiben ($e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ seien die Einheitsvektoren):

$$a \times b = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie

(a) $a \times b = 0 \in \mathbb{R}^3$ genau dann, wenn (a, b) linear abhängig ist;

(b) $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$;

(c) $< a \times b, a >= 0 \in \mathbb{R}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$.

Es sei $\varphi \in [0, 180]$ der Winkel zwischen a und b. Zeigen Sie

(d) $|a \times b| = \sqrt{< a, a > \cdot < b, b > - < a, b >^2} = |a| \cdot |b| \cdot \sin(\varphi)$.

(e) $|a \times b|$ ist der Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms.

(10 Punkte)

Falls Sie für die Aufgabe mehrere Blätter verwenden, tackern Sie diese zusammen. Geben Sie auf jedem Blatt NAMEN, VORNAMEN, AUFGABENNR. sowie ihre GRUPPENNR. an.

Abgabetermin: 23.06.2009 vor der Vorlesung im Hörsaal 1409, also bis 11.15 Uhr; in EINZELNEN Ausnahmefällen bis 11.20 Uhr.