Lösungshinweise zu Blatt 10

(a) $a \times b = 0 \in \mathbb{R}^3$ genau dann, wenn (a, b) linear abhängig.

Beweis:
I.
Es sei (a, b) linear abhängig; d.h. $b = \alpha \cdot a$.

$$a \times b = a \times \alpha\, a = \begin{pmatrix} a_2\, \alpha\, a_3 \; - a_3\, \alpha\; a_2 \\ a_3\, \alpha\, a_1 \; - a_1\, \alpha\, a_3 \\ a_1\, \alpha\, a_2 \; - \; a_2\, \alpha\, a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; .$$

II.
Es sei nun $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\, b_3 \; - a_3\, b_2 \\ a_3\, b_1 \; - a_1\, b_3 \\ a_1\, b_2 \; - a_2\, b_1 \end{pmatrix}$. Falls $a = 0$, folgt (a, b) linear abhängig.

Es sei also o.B.d.A. $a_1 \neq 0$.
Dann folgt aus der dritten Komponente $b_2 = \frac{b_1}{a_1} \cdot a_2$ und aus der zweiten $b_3 = \frac{b_1}{a_1} \cdot a_3$.
Trivialerweise ist $b_1 = \frac{b_1}{a_1} \cdot a_1$. Damit ist $b = \frac{b_1}{a_1} \cdot a$, also (a, b) linear abhängig.

(b)

$$a \times (b + c) = \begin{pmatrix} a_2\, (b_3 + c_3) - a_3 (\, b_2 + c_2) \\ a_3 (\, b_1 + c_1) - a_1\, (b_3 + c_3) \\ a_1 (\, b_2 + c_2) - a_2\, (b_1 + c_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\, b_3 - a_3\, b_2 \\ a_3\, b_1 - a_1\, b_3 \\ a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2\, c_3 - a_3\, c_2 \\ a_3\, c_1 - a_1\, c_3 \\ a_1\, c_2 - a_2\, c_1 \end{pmatrix} = (a \times b) + (a \times c) \; .$$

(c)

$$\begin{aligned} \langle a \times b, a \rangle &= (a_2\, b_3 \; - a_3\, b_2)\, a_1 + (a_3\, b_1 \; - a_1\, b_3)\, a_2 + (a_1\, b_2 \; - a_2\, b_1)\, a_3 \\ &= a_1\, a_2\, b_3 - a_1\, a_2\, b_2 - a_1\, a_2\, b_3 + a_2\, a_3\, b_1 - a_3\, a_2\, b_1 + a_1\, a_2\, b_2 = 0 \; . \end{aligned}$$

(d)

$$|\, a \times b\, |^2 = \langle a \times b, a \times b \, \rangle = (a_2\, b_3 - a_3\, b_2)^2 + (\, a_3\, b_1 - a_1\, b_3)^2 + (a_1\, b_2 - a_2\, b_1)^2 \; ,$$

$$\langle \, a, a \, \rangle \cdot \langle b, b \, \rangle = \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) \cdot \left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) \; ,$$

$-\langle a, b \rangle^2 = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} |a \times b|^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) \cdot \left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= \langle a, a \rangle \cdot \langle b, b \rangle - \langle a, b \rangle^2 . \end{aligned}$$

Nun gilt auch im $\mathbb{R}^3$

$$\langle a, b \rangle^2 = \| a \|^2 \cdot \| b \|^2 \cdot \cos^2(\varphi) \;,$$

also $\langle a, a \rangle \cdot \langle b, b \rangle - \langle a, b \rangle^2 = \| a \|^2 \cdot \| b \|^2 \cdot \left(1 - \cos^2(\varphi)\right) = \| a \|^2 \cdot \| b \|^2 \cdot \sin^2(\varphi)$.

(e)
Wegen (d) gilt

$$|a \times b| = \| a \| \cdot \| b \| \cdot |\sin(\varphi)| \;.$$

Wenn $\| a \|$ die Länge der Grundseite des von a und b aufgespannten Parallelogramms ist, ist $\| b \| \cdot |\sin(\varphi)|$ die Höhe desselben.
Damit folgt die Behauptung.