Aufgabe 2

(a) Seien a und b die Seiten eines DINA$(n-1)$-Blattes und a' und b' die Seiten eines DINAn-Blattes. Dann gilt für den Streckfaktor k

$$k = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Wegen $a \cdot b = 2 \cdot a' \cdot b'$ folgt also

$$k = \frac{a}{a'} = \frac{2 \cdot a' \cdot b'}{a' \cdot b} = 2\frac{b'}{b}$$

und somit

$$\frac{b}{b'} = 2\frac{b'}{b} \qquad \Rightarrow \qquad 2 = \frac{b^2}{b'^2} \qquad \Rightarrow \qquad 2 = k^2,$$

also $k = \sqrt{2}$.

Alternativ: Seien a und b die Seiten eines DINA$(n-1)$-Blattes mit $a > b$. Dann beträgt die Länge der längeren Seite des DINAn-Blattes b und die Länge der kürzeren Seite $\frac{a}{2}$. Für k gilt also

$$k = \frac{2b}{a} = \frac{a}{b},$$

also wie oben $k^2 = 2$ und somit $k = \sqrt{2}$.

(b) Sei g die Grundlinie und h die Höhe des Dreiecks. Die Länge der Grundlinie des um k gestreckten Dreiecks beträgt $k \cdot g$ und für die Höhe erhält man $k \cdot h$ (Längenverhältnistreue). Genauso verlängern sich die Seiten a, b und c des Ausgangsdreiecks um das k-fache. Vergleicht man den Flächeninhalt bzw. den Umfang des Ausgangsdreiecks mit dem um k gestreckten Dreieck, so ergibt sich einerseits $\frac{g \cdot h}{2}$ bzw. $a + b + c$ und andererseits $\frac{(k \cdot g) \cdot (k \cdot h)}{2} = k^2 \frac{g \cdot h}{2}$ bzw. $(k \cdot a) + (k \cdot b) + (k \cdot c) = k \cdot (a + b + c)$. Der Flächeninhalt vergrößert sich demnach um das k^2-fache, während sich der Umfang um das k-fache vergrößert. Analog erhält man die gleichen Verhältnisse für Rechtecke (zwei Dreiecke).

(c) Sei a die Kantenlänge des Würfels. Die Kantenlänge des um k gestreckten Würfels beträgt $k \cdot a$. Der Oberflächeninhalt des Ausgangswürfels ist $6a^2$ und für den gestreckten Würfel ergibt sich $6(k \cdot a)^2 = k^2 \cdot 6a^2$. Somit vergrößert sich die Oberfläche um das k^2-fache. Das Volumen des Ausgangswürfels ist a^3 und für den gestreckten Würfel ergibt sich $(k \cdot a)^3 = k^3 \cdot a^3$. Somit vergrößert sich das Volumen um das k^3-fache.