Aufgabe 1

(a) Mit dem zweiten Strahlensatz erhält man

$$\frac{|CP|}{|CA|} = \frac{|PQ|}{|AB|} \qquad \text{bzw.} \qquad |PQ| = \frac{|CP|\,|AB|}{|CA|}.$$

Nach Voraussetzung muss gelten

$$2\,(|PQ| + 2\,|CP|) = 2\,|CA| + |AB|\,.$$

Setzen wir die letzte Gleichung der ersten Zeile in den linken Ausdruck der letzten Gleichung ein, so erhalten wir

$$2\left(\frac{|CP|\,|AB|}{|CA|} + 2\,|CP|\right) = 2\cdot\frac{|CP|}{|CA|}\,(|AB| + 2\,|CA|) = 2\cdot\frac{|CP|}{|CA|}\,(2\,|CA| + |AB|)\,.$$

Vergleichen wir die beiden rechten Ausdrücke der letzten Gleichungen, so ergibt sich

$$2\cdot\frac{|CP|}{|CA|} = 1 \qquad \text{also} \qquad |CP| = \frac{|CA|}{2}.$$

Wähle also P so, dass $P \in |CA|$ und $|CP| = \frac{|CA|}{2}$ gilt.

(b) Sei S der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von A und B mit der Strecke $|PQ|$ und T der Lotfußpunkt von S auf $|AB|$. Nach Voraussetzung muss gelten

$$\frac{|AB|\,|CT|}{2} = 2\cdot\frac{|PQ|\,|CS|}{2} = |PQ|\,|CS| \qquad \text{also} \qquad \frac{|AB|}{|PQ|} = 2\cdot\frac{|CS|}{|CT|}.$$

Nach dem ersten Strahlensatz gilt

$$\frac{|CP|}{|CA|} = \frac{|CS|}{|CT|}.$$

Nach dem zweiten Strahlensatz gilt

$$\frac{|CP|}{|CA|} = \frac{|PQ|}{|AB|}.$$

Mit den letzten beiden Gleichungen gilt

$$\frac{|AB|}{|PQ|} = 2\cdot\frac{|CS|}{|CT|} \quad\Rightarrow\quad \frac{|CA|}{|CP|} = 2\cdot\frac{|CP|}{|CA|} \quad\Rightarrow\quad |CA|^2 = 2\cdot|CP|^2 \quad\Rightarrow\quad |CP| = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot|CA|$$

Wähle also P so, dass $P \in |CA|$ und $|CP| = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot|CA|$ gilt.

(10 Punkte)

Aufgabe 2

(a) Setze $x := |AS|$ und $y := |SB|$. Dann gilt $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$, also nach Umstellen $x^2 - yx - y^2 = 0$. Löst man diese quadratische Gleichung nach x, so erhält man $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}y$ (nur positive Nullstelle kommt in Frage), also $\varphi = \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(b) Setzt man $y = 1$ in (a), so ergibt sich $x = \varphi$ und aus obiger quadratischer Gleichung erhält man $\varphi^2 = \varphi + 1$. Alternativ kann man verifizieren, dass $\varphi^2 - \varphi - 1$ verschwindet.

(c) Man rechne

$$\varphi + \frac{1}{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2(1-\sqrt{5})}{4} = \sqrt{5}.$$

(d) Sei $s := |AB| = x + y$. Dann gilt mit dem Satz des Pythagoras

$$s^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{s}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad s^2 + \frac{s^2}{4} = x^2 + sx + \frac{s^2}{4} \quad \overset{-\frac{s^2}{4}}{\Rightarrow} \quad s^2 - xs - x^2 = 0.$$

Nach (a) gilt $\frac{s}{x} = \frac{x+y}{x} = \varphi$. Es gilt aber auch $\frac{x}{y} = \varphi$, wie man folgendermaßen einsieht. Sei $\tilde{y}$ definiert durch $\frac{x}{\tilde{y}} = \varphi$, dann folgt wegen $\frac{x+y}{x} = \varphi$

$$y = (\varphi - 1)x = (\varphi - 1)\varphi\tilde{y} = \left(\varphi^2 - \varphi\right)\tilde{y} \overset{(b)}{=} \tilde{y}.$$

(10 Punkte)