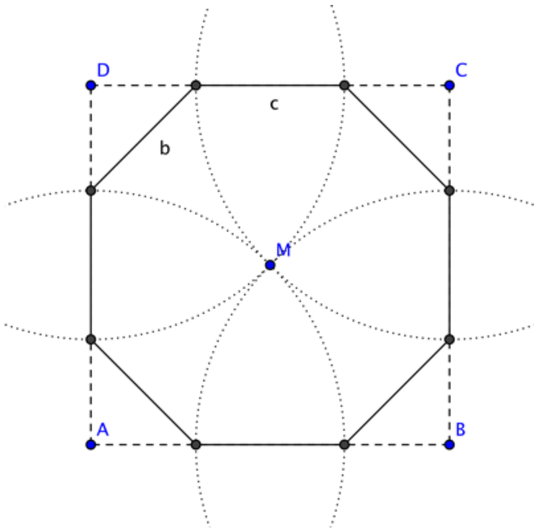
Aufgabe 1

(a) Ein regelmäßiges n-Eck kann man in n gleichschenklige Dreiecke aufteilen, deren Basiswinkel α sei. Bezeichne β den dritten Winkel. Dann gilt in den gleichschenkligen Dreiecken $2\alpha + \beta = 180^\circ$ und im n-Eck $n \cdot \beta = 360^\circ$. Das gesuchte Winkelmaß (des Innenwinkels des n-Ecks) beträgt demnach

$$2\alpha = 180^\circ - \beta = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ.$$

(b) Wir führen die beschriebene Konstruktion durch und erhalten



Bezeichne a die Seiten des Quadrates und $r = |AM|$ den Radius.

(i) Zeige $b = c$.
Wir erhalten für b

$$b^2 = 2\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = \frac{(a-c)^2}{2} \implies b = \frac{a-c}{\sqrt{2}}$$

Für r gilt zum Einen

$$r = \sqrt{2\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

und zum Anderen

$$r = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2}.$$

Gleichsetzen liefert

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a+c}{2} \implies c = (\sqrt{2}-1)a.$$

Setzen wir die letzte Gleichung in $b = \frac{a-c}{\sqrt{2}}$ ein, so ergibt sich

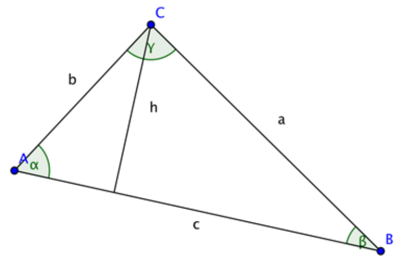
$$b = \frac{a-c}{\sqrt{2}} = \frac{2a - \sqrt{2}a}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}-1)a = c.$$

(ii) Zeige alle Innenwinkel sind gleich.
Da das Achteck durch acht gleichschenklige kongruente Dreiecke gebildet wird, sind auch alle Basiswinkel α gleich. Ein Innenwinkel des Achtecks beträgt somit 2α. Also ist der Innenwinkel des Achtecks an allen Eckpunkten gleich.

(10 Punkte)

Aufgabe 2

(a) Vorausgesetzt alle Winkel sind kleiner als 90°. Dann teile man das Dreieck $\triangle ABC$ in zwei rechtwinklige Dreiecke auf (betrachte Skizze).



Es gilt:

$$\sin\alpha \cdot b = h = \sin\beta \cdot a.$$

Nach Umstellen der Gleichung erhält man

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Analog bekommt man

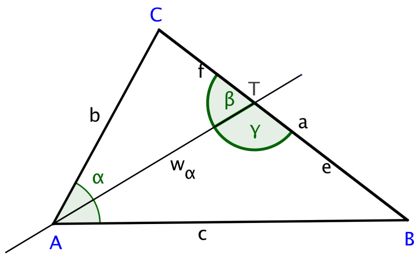
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Ist ein Winkel größer als 90° bspw. $|\gamma| > 90°$, dann folgt:

$$\sin\beta \cdot c = h = \sin(180° - \gamma) \cdot b.$$

Da sin eine ungerade Funktion ist gilt: $\sin(180° - \gamma) = -\sin(\gamma - 180°) = -(-\sin\gamma) = \sin\gamma$ und somit folgt wiederum die Behauptung.

(b) Mit dem Sinussatz erhalten wir mit den Bezeichnungen (der Punkt T teile die Seite a in die Teilstrecken e und f) aus



zum Einen $\frac{e}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ und zum Anderen $\frac{f}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$. Mit $180° - \beta = \gamma$ und damit $\sin(\beta) = \sin(\gamma)$ folgt die Behauptung

$$\frac{f}{e} = \frac{b}{c}.$$

(10 Punkte)