MuPAD Computeralgebrapraktikum: Modelle mit Differentialgleichungen

Prof. Dr. Wolfram Koepf

Prof. Dr. Werner Seiler

Thomas Wassong

SS 2008

Frühstudium

- Alle Teilnehmer dieses Praktikums können sich zum Frühstudium anmelden.
- Bei erfolgreicher Teilnahme (mündliche Prüfung) erhalten Sie 4 ECTS-Credits im Rahmen der Schlüsselkompetenzen, die Ihnen bei einem späteren Studium anerkannt werden.

Frühstudium

- Hierzu müssen Sie
  - sich ein Anmeldeformular mitnehmen,
  - ein Empfehlungsschreiben des Lehrers besorgen,
  - und beides am nächsten Mittwoch mitbringen.
- Dann werde ich die Formulare unterschrieben an die Universitätsverwaltung weiterreichen.
- Die Genehmigung für das Frühstudium gilt dann nur für diesen Kurs.

Zum Kurs

- Unser Kurs findet im Computerraum 2421 statt.
- Der Kurs besteht aus einem Wechsel zwischen Vorlesung und Übung.
- Ich rate Ihnen, das Wichtigste mitzuschreiben.
- Außerdem sollten Sie unbedingt die Programmierübungen mit MuPAD durchführen.

Modell des Bevölkerungswachstums

- Gegeben sei eine Population $P(t)$. Wie wird sie sich in der zukünftigen Zeit t entwickeln?
- Wenn es keine Raumrestriktionen gibt, ist es plausibel anzunehmen, dass die Änderungsrate proportional zur jeweiligen Population ist:

$$\Delta P(t) \sim P(t)\ .$$

- Außerdem ist die Änderungsrate proportional zum Zeitintervall

$$\Delta P(t) \sim \Delta t.$$

Modell des Bevölkerungswachstums

- Also haben wir für eine Fertilitätskonstante $a>0$
$$\frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = a \cdot P(t) \ .$$
- Bedeutung von a: relative jährliche Zunahme.
- Wir gehen ferner davon aus, dass das Wachstum praktisch kontinuierlich vonstatten geht.
- Daher gilt für den Grenzübergang $t \to 0$

  die Differentialgleichung des unbegrenzten Wachstums
$$P'(t) = a \cdot P(t)$$
  mit Anfangsbedingung $P(t_0) = P_0$.
- MuPAD

Unbegrenztes Wachstum

- Die Lösung dieses Anfangswert-problems ist gegeben durch

$$P(t) = P_0 e^{a(t-t_0)} \quad .$$

- Reale Daten der Erdbevölkerung:
  - $P(1950)$ = 2,5 Milliarden
  - Wachstumsrate $a = 0{,}02$
- Die Formel stimmt gut zwischen 1700 und 2000 mit realen Daten überein.
- Aber langfristig kann es unbegrenztes Wachstum natürlich nicht geben.

MuPAD-Übungsaufgabe

- Geben Sie die Differential-gleichung des unbegrenzten Wachstums für $a = 0{,}02$, $t_0 = 1950$ und $P_0 = 2{,}5\ 10^9$ ein.
- Lösen Sie die Differential-gleichung mit MuPAD.
- Zeichnen Sie die Lösung mit plot::Function2d, der Option LineColor=RGB::Red und plot.

MuPAD-Übungsaufgabe

- Wieviel Platz hat ein Mensch im Jahr 2500? Der Erdradius beträgt 6,37 Millionen m.
- Zeichnen Sie das zugehörige Richtungsfeld der Differential-gleichung mit

```
plot2:=plot::VectorField2d([1,0.02*
y],t=1950..2050,y=0..2*10^10)
```

MuPAD-Übungsaufgabe

- Ebenso modelliert man den radioaktiven Zerfall. Hier ist $a<0$.
- Wie lautet die Mengenfunktion $M(t)$, wenn wir wissen, dass
  - $M(2000) = 1$ kg
  - die Halbwertszeit 100 Jahre beträgt.
- Stellen Sie die Mengenfunktion $M(t)$ graphisch dar.
- Wann ist die radioaktive Substanz auf 1 g reduziert?

Logistisches Wachstum

- Wir müssen in unser Modell also Konkurrenz einbauen.
- Konkurrenz führt zu einer Abnahme der Wachstumsrate, welche wegen „Jeder steht mit jedem in Konkurrenz" als proportional zu $P(t)^2$ angenommen werden kann.
- Dies führt zur Differentialgleichung des logistischen Wachstums ($a,b > 0$)

$$P'(t) = a \cdot P(t) - b \cdot P(t)^2 \ .$$

- Zunächst sehen wir uns wieder das zugehörige Richtungsfeld an: MuPAD

Logistisches Wachstum

- Stellen, an denen $P'(t) = 0$ ist, wo sich die Population also lokal nicht ändert, nennt man Gleichgewichtsstellen.
- Für die Gleichgewichtsstellen des logistischen Wachstums gilt also

$$0 = a \cdot P(t) - b \cdot P(t)^2 = P(t)\left(a - bP(t)\right) \ .$$

- Gleichgewicht herrscht also für $P(t) = 0$ und für $P(t) = a/b$.
- Ist die Anfangspopulation $P(t_0) > 0$ und $P(t_0) < a/b$, so wird die Population also wachsen.

Logistisches Wachstum

- Die Lösung der logistischen Differentialgleichung ist
$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 - (a - bP_0)e^{-a(t-t_0)}} \quad .$$
- MuPAD
- Wir haben den Grenzwert $P(\infty) = a/b$.
- Was wissen wir über den Wendepunkt W? Wir können leicht berechnen, dass dieser den Wert $P(W)=a/(2b)$ liefert.
- Wir werden uns noch Gedanken machen, wo der Wendepunkt liegt.

MuPAD Übungsaufgabe

- Stellen Sie das Richtungsfeld des logistischen Wachstums für $a = 0{,}025$, $b = 2\ 10^{-12}$ im Zeitintervall [1800,2200] dar.
- Geben Sie in MuPAD die logistische Funktion ein:

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 - (a - bP_0)e^{-a(t-t_0)}} \quad .$$

- Stellen Sie die logistische Funktion für $t_0 = 1950$ und $P_0 = 2{,}5\ 10^9$ im selben Graphen rot dar.

MuPAD Übungsaufgabe

- Finden Sie den Wendepunkt $(t_W, P(t_W))$ mit $P''(t_W)=0$.
- Zeigen Sie, dass der Graph der logistischen Funktion symmetrisch zu $(t_W, P(t_W))$ ist.

Numerische Lösungen

- Da MuPAD ja die logistische Differentialgleichung nicht lösen konnte – und das ist eher der Normalfall als die Ausnahme – stellt sich die Frage einer numerischen Lösung.
- Es gibt viele Methoden der numerischen Lösung von Differentialgleichungen, insbesondere das Runge-Kutta-Verfahren, auf welche man in MuPAD zugreifen kann. MuPAD

MuPAD Übungsaufgabe

- Geben Sie in MuPAD die numerische Lösungsfunktion ein mittels

  numeric::ode2vectorfield

  und

  numeric::odesolve2

- und stellen Sie die Lösung im selben Schaubild mit dem Richtungsfeld grün dar.

Räuber- und Beutemodelle

- Viele Wachstumsprozesse laufen in Abhängigkeit voneinander ab.
- Manche Spezies leben in einer Räuber-Beute-Beziehung wie Marienkäfer/Blattläuse, Fuchs/Hase.
- Wir werden für das Wachstums-verhalten in diesem Fall ein Modell angeben.

Historisches Beispiel

- Dem italienischen Biologen D'Ancona lag Anfang der 1920er Jahre die folgende Tabelle vor, welche er versuchte zu verstehen.

	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
%	11,9	21,4	22,1	21,2	36,4	27,3	16,0	15,9	14,8	10,7

Prozentualer Anteil der Haie unter den Fischen des Seehafens Triest

Begründungsversuch

- Während der Kriegszeit wurde natürlich weniger gefischt als sonst. D’Ancona fragte sich: Ist dies der Grund dafür, warum die Haipopulation prozentual zunahm?
- Da er die Aufgabe nicht selbst lösen konnte, übergab d’Ancona die Fragestellung an den Mathematiker Volterra, welcher folgendes Modell aufstellte. Zunächst lassen wir den Fischfang außen vor.

Volterras Modell

- $x(t)$ sei die Anzahl der Essfischpopulation (zum Zeitpunkt t)
- $y(t)$ sei die Anzahl der Haipopulation.
- Gäbe es nur Speisefische, könnten diese unbegrenzt wachsen und ihre Änderung pro Zeiteinheit wäre (positiv) proportional zu ihrer Anzahl:

$$x'(t) = a \cdot x(t) \qquad (a > 0).$$

Volterras Modell

- Gäbe es nur Haie, so hätten sie nichts zu essen, und ihre Änderung pro Zeiteinheit wäre (negativ) proportional zu ihrer Anzahl:

$$y'(t) = -c \cdot y(t) \qquad (c > 0).$$

- Volterra nahm an, dass die Verminderung der Essfische durch die Haie (genau wie die die Zunahme der Haipopulation) sowohl proportional zu $x(t)$ als auch zu $y(t)$ sei.

Volterras Modell

- Dies führt schließlich zu folgendem Modell:

$$x'(t) = a \cdot x(t) - b \cdot x(t) \cdot y(t) \qquad (a, b > 0)\ ,$$

$$y'(t) = -c \cdot y(t) + d \cdot x(t) \cdot y(t) \qquad (c, d > 0)\ .$$

- Bedeutung der positiven Konstanten:
  - $a > 0$: Vermehrungsrate der Speisefische,
  - $b > 0$: Sterberate der Speisefische durch Haie,
  - $c > 0$: Sterberate der Haie,
  - $d > 0$: Vermehrungsrate der Haie durch Fischverzehr.

Volterras Modell

- Da eine symbolische Lösung durch elementare Funktionen nicht möglich ist, bestimmen wir mit den Daten unseres Beispiels eine numerische Lösung mit MuPAD.
- Es erscheint, dass die Lösungen periodisch sind.
- Dies kann man gut an der Bahnkurve $(x(t), x(t))$ erkennen.
- In diesem Phasendiagramm drückt sich die Periodizität nun dadurch aus, dass die Bahnkurve geschlossen ist.

Volterras Modell

- Mit Methoden der höheren Analysis kann man beweisen, dass die Lösungen des Lotka-Volterra-Modells wirklich immer periodisch sind.
- Die Kettenregel erzeugt die Differentialgleichung der Bahnkurve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c \cdot x + d \cdot x \cdot y}{a \cdot y - b \cdot x \cdot y} = \frac{x}{y} \cdot \frac{-c + d \cdot y}{a - b \cdot x} \quad .$$

- Trennung der Variablen liefert eine implizite Darstellung der Lösung.

Gleichgewichtszustände

- Sind die Ableitungen gleich 0, so haben wir einen Gleichgewichts-zustand: Lokal ändert sich nichts.
- Beim Lotka-Volterra-Modell sind die Gleichgewichtszustände bei
  - $x(t)=0$ und $y(t)=0$ (uninteressant)

    und
  - $x(t)=c/d>0$ und $y(t)=a/b>0$.

Mittelwerte

- Da die Lösungen periodisch sind, kann man die langfristigen Mittelwerte der Populationen berechnen.
- Wir erhalten durch Integration über eine Periode *T* aus der Rechnung

$$0 = \frac{1}{T} \ln y(t) \Big|_0^T = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T (-c + dx(t)) dt = -c + d\overline{x} \ .$$

für die Mittelwerte

$$\overline{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{c}{d} \text{ und analog } \overline{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{b} \ .$$

Was bewirkt Fischfang?

- Nimmt man nun an, dass der Fischfang die Population der Speisefische pro Zeiteinheit um einen Anteil von $\varepsilon\, x(t)$ und die Haie um einen Anteil von $\varepsilon\, y(t)$ reduziert.
- Dann liefert dies ein gleichartiges Modell

$$x'(t) = (a - \varepsilon) \cdot x(t) - b \cdot x(t) \cdot y(t)$$

$$y'(t) = -(c + \varepsilon) \cdot y(t) + d \cdot x(t) \cdot y(t)$$

mit Mittelwerten

$$\overline{x} = \frac{c + \varepsilon}{d} \quad \text{und} \quad \overline{y} = \frac{a - \varepsilon}{b} \; .$$

Was bewirkt Fischfang?

- Tatsächlich steigt bei Fischerei also der Mittelwert der Speisefische an, während der Mittelwert der Haie fällt.
- Wird umgekehrt, wie im Weltkrieg, die Fischerei reduziert, erhöht dies – wie beobachtet – den Anteil der Haie.

Modifiziertes Modell

- Zum Schluss sehen wir uns ein modifiziertes Modell an, bei welchem auch die Konkurrenz innerhalb der Arten berücksichtigt wird.
- Dann sind die Lösungen nicht mehr periodisch, sondern nähern sich einem langfristigen Gleichgewichtszustand.