Symbolisches Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Thomas Wassong Prof. Dr. Koepf Prof. Dr. Sailer

Universität Kassel
FB17 Mathematik

23. April 2008

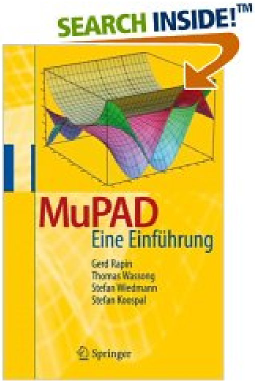
einfache Differentialgleichungen

Trennung der Variablen

Wer bin ich?

Thomas Wassong
In Göttingen von 2001 bis 2008
Mathematik, Werte&Normen und
Informatik auf Lehramt studiert
Januar 2008 1. Staatsexamen
in den drei Fächern

von 2004 – 2008 Betreuung
einer Lehrveranstaltung
zur Einführung in MuPAD.
Daraus hervorgegangen ist das
Buch: MuPAD. Eine Einführung.



Durchschwimmen eines Flusses

v_E *const.*

$v_F = v_0 \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)$

Gesucht ist: Die Schwimmrichtung

Modellierung des Problems

Die Schwimmrichtung wird durch einen Winkel angegeben. In dem Kräfteparallelogramm gilt für den Winkel α folgende Gleichung:

$$\tan(\alpha) = \frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = \frac{v_F}{v_E} = \frac{v_0}{v_E}\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)$$

Also haben wir die DGL

$$y'(x) = \frac{v_0}{v_E}\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right).$$

Aufgaben I

1. Berechnen Sie eine Lösung der DGL ohne das `ode`-Konstrukt.
2. Plotten Sie das Richtungsfeld und die Lösungskurve für das Problem mit einer Flußbreite von $2a = 20\ m$, einer Schwimmgeschwindigkeit von $v_E = 2\ km/h$ und einer maximalen Fliessgeschwindigkeit des Flusses von $v_0 = 10\ km/h$.
3. Berechnen Sie allgemein die Abdrift eines Schwimmers, also um welche Strecke ein Schwimmer versetzt auf der anderen Seite des Flusses ankommt.

Differentialgleichungen ohne Anwendung

In der Mathematik geht es selten um konkrete Probleme, sondern um allgemeine Lösungsverfahren, Existenz- oder Eindeutigkeitsaussagen.
Bisher haben wir uns im Bereich der Differentialgleichungen nur um konkrete Anwendungen gekümmert, z.B. unbegrenztes und logistisches Wachstum, Schwimmen durch einen Fluss.
Wir wollen die Anwendungen nun vorerst verlassen und uns Gedanken um die Lösbarkeit von Differentialgleichungen machen.

Differentialgleichungen ohne Anwendung - Aufgaben

1. Wie haben wir bisher die DGL gelöst?
2. Was wird wohl die Hauptaufgabe sein, um DGLs zu lösen?

Der Separationsansatz

Es gibt einige DGL, die folgende Struktur haben:

$$y' = f(x) * g(y)$$

Diese DGL kann man so umstellen, dass alle y-Variablen auf der einen Seite stehen und alle x-Variablen auf der anderen Seite.
Danach integriert man beide Seiten und stellt das Ergebnis nach y um.

Der Separationsansatz - Ein Beispiel

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{x * y}{10} \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

Der Separationsansatz - Ein Beispiel

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{x * y}{10} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{x * y}{10} \\
&= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

Der Separationsansatz - Ein Beispiel

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{x * y}{10} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{x * y}{10} \\
\frac{dy}{y} &= \frac{x\ dx}{10} \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}$$

Der Separationsansatz - Ein Beispiel

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{x * y}{10} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{x * y}{10} \\
\frac{dy}{y} &= \frac{x\ dx}{10} \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{x\ dx}{10} \\
&= \\
&=
\end{aligned}$$

Der Separationsansatz - Ein Beispiel

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{x * y}{10} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{x * y}{10} \\
\frac{dy}{y} &= \frac{x\ dx}{10} \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{x\ dx}{10} \\
\ln(y) &= \frac{x^2}{20} + C \\
&=
\end{aligned}$$

Der Separationsansatz - Ein Beispiel

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{x * y}{10} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{x * y}{10} \\
\frac{dy}{y} &= \frac{x\ dx}{10} \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{x\ dx}{10} \\
\ln(y) &= \frac{x^2}{20} + C \\
y &= \exp(C) * \exp\left(\frac{x^2}{20}\right)
\end{aligned}
$$

Der Separationsansatz - Ein Beispiel

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{x * y}{10} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{x * y}{10} \\
\frac{dy}{y} &= \frac{x\ dx}{10} \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{x\ dx}{10} \\
\ln(y) &= \frac{x^2}{20} + C \\
y &= \exp(C) * \exp\left(\frac{x^2}{20}\right)
\end{aligned}
$$

Die Konstante C berechnet sich durch Einsetzen der Anfangsbedingung.

Der Separationsansatz - Ein Beispiel

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{x * y}{10} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{x * y}{10} \\
\frac{dy}{y} &= \frac{x\ dx}{10} \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{x\ dx}{10} \\
\ln(y) &= \frac{x^2}{20} + C \\
y &= \exp(C) * \exp\left(\frac{x^2}{20}\right)
\end{aligned}
$$

Die Konstante C berechnet sich durch Einsetzen der Anfangsbedingung.MuPAD

Aufgaben

1. Berechne mit Hilfe des Separationsansatzes eine Lösung für die DGL
$$y'(x) = y(x)^2 * cos(x).$$
2. Welche allgemeine Form haben die Lösungen von DGL der Form
$$y'(x) = y(x) * f(x)?$$
3. Berechne mit Hilfe des Separationsansatzes eine Lösung des AWPs

$$y'(x) = y(x) * (x^2 * \exp(x) - sin(x)), y(0) = \exp(3).$$

Ende

Vielen Dank für Eure Aufmerksdamkeit!
Nächste Woche beschäftigen wir uns mit numerischen Lösungsmethoden.