Computeralgebra-praktikum 2013/14

UNI KASSEL VERSITÄT

FRÜHSTUDIUM MATHEMATIK

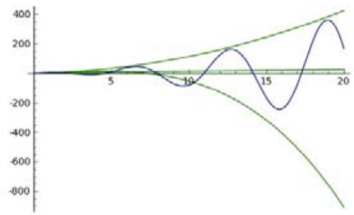
Computeralgebrapraktikum

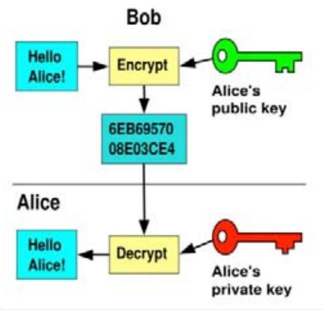
Prof. Dr. W. Koepf, Prof. Dr. W. Seiler,
F.-M. Quedenfeld

sage

Einige Themen

Modulares Rechnen
Programmieren mit sage
Kodierungstheorie
Kryptographie





START Mi., 30. Oktober 2013

Zeit: 16:15 - 17:45 Uhr

Wird als Frühstudium anerkannt

Anmeldung und Infos bei schaumburg@lg-ks.de

http://www.mathematik.uni-kassel.de/~seiler/AGCA.html

SAGE Computeralgebrapraktikum: Elementare Zahlentheorie und Anwendungen

Prof. Dr. Wolfram Koepf

Prof. Dr. Werner Seiler

Frank Quedenfeld

WS 2013/14

Frühstudium

- *Alle Teilnehmer dieses Praktikums können sich zum Frühstudium anmelden.*
- *Bei erfolgreicher Teilnahme (mündliche Prüfung) erhalten Sie 4 ECTS-Credits im Rahmen der Schlüsselkompetenzen, die Ihnen bei einem späteren Studium anerkannt werden.*

Frühstudium

- *Hierzu müssen Sie*
  - sich ein Anmeldeformular mitnehmen,
  - ein Empfehlungsschreiben des Lehrers besorgen,
  - und beides am nächsten Mittwoch mitbringen.
- *Dann werden wir die Formulare unterschrieben an die Universitätsverwaltung weiterreichen.*
- *Die Genehmigung für das Frühstudium gilt dann nur für diesen Kurs.*

Zum Kurs

- *Unser Kurs findet im Computerraum 2421 statt.*
- *Der Kurs besteht aus einem Wechsel zwischen Vorlesung und Übung.*
- *Ich rate Ihnen, das Wichtigste mitzuschreiben.*
- *Außerdem sollten Sie unbedingt die Programmierübungen mit SAGE durchführen.*

30.10.13 Heutige Themen Start

- *Rechnen mit Dezimalzahlen*
- *Rechnen mit ganzen Zahlen*
- *Rechnen mit algebraischen Zahlen*
- *Rechnen mit Polynomen und rationalen Funktionen*
- *Rechnen mit Matrizen*
- *Lösen von Gleichungen*
- *Graphische Darstellungen*
- *Differential- und Integralrechnung*

Vorläufiger Zeitplan (Raum 2421)

06.-27.11.13	*Quedenfeld*
04.-18.12.13	*Seiler*
15.01.14	*Seiler*
22.01.-12.02.14	*Quedenfeld*
19.02.14	*Prüfungen*

Programmiertechniken

- *SAGE besitzt wie alle General-Purpose-CAS eine eingebaute Programmiersprache.*
- *Diese enthält die üblichen Programmiertechniken, aber auch viele Hochsprachen-Konstrukte, die Schleifen z. T. unnötig machen.*
- *Wir beginnen mit der Fall-unterscheidung, dem if then else.*
- *SAGE*

Schleifen

- *Will man die Fakultät* $n! = 1 \cdots n$ *berechnen, so geht dies z. B. mit einer Zählschleife (for):*

- *x=1*
- *for k in range(1,101):*
  - x = x * k
- *print x*

Schleifen

- *Als vollständiges Programm sieht die Fakultätsfunktion dann so aus:*

- *def fac1(n):*
  - x = 1
  - for k in range(1,n+1)
    - x = x * k
  - return x

Übungsaufgabe 1: Summen

- *Programmieren Sie die Berechnung der Summe*

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 4 + \cdots + n^2$$

- *Lösung:*
- *def exS(n):*
  - s = 0
  - for k in range(1,n+1): s=s+k**2
  - return s

Berechnung der Fakultät durch Hochsprachenkonstrukte

- *prod() (Produkt), sum() (Summe)*
- *factorial (Hochsprachenfunktion)*
- *rekursiv: Die Fakultät ist eindeutig gegeben durch die Vorschriften*

$$n! = n(n-1)! \quad \text{und} \quad 0! = 1 \,.$$

- *Zugehöriges Programm:*
- *def fac3(n):*
  - if n == 0: return 1
  - else: return n*fac3(n-1)

Berechnung der Fakultät durch Hochsprachenkonstrukte

- *prod() (Produkt), sum() (Summe)*
- *factorial (Hochsprachenfunktion)*
- *rekursiv: Die Fakultät ist eindeutig gegeben durch die Vorschriften*

$$n! = n(n-1)! \quad \text{und} \quad 0! = 1\,.$$

- *Zugehöriges Programm:*
- *def fac3(n):*
  - if n == 0: return 1
  - else: return n*fac3(n-1)

Fibonaccizahlen

- *Die Fibonaccizahlen sind erklärt durch*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{und} \quad F_0 = 0,\ F_1 = 1\,.$$

- *Wir bestimmen die Fibonaccizahlen rekursiv. SAGE*
- *Das Programm ist sehr langsam, weil die Anzahl der Aufrufe exponentiell wächst.*
- *Merkt man sich aber die bereits berechneten Resultate (im Speicher), dann ist die Anzahl der Aufrufe linear in n.*
- *SAGE*

Übungsaufgabe 2: Fibonaccizahlen mit Divide-and-Conquer

- *Schreiben Sie ein Programm, welches die Fibonaccizahlen aus den Beziehungen*

$$F_{2n} = F_n(F_n + 2F_{n-1}) \text{ und } F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$$

durch sukzessives Halbieren berechnet.

- *Abfrage für n gerade: n % 2==0*
- *Vergleichen Sie die Rechenzeiten Ihrer Funktion mit der eingebauten Funktion für n=100.000.*
- *SAGE*

Übungsaufgabe 3: Modulo

- *Programmieren Sie die Modulo-Funktion*

  mod1(a,b):=a modulo b

  die in der Vorlesung behandelt wurde, durch sukzessives Abziehen.
- *Benutzen Sie z. B. while.*
- *Berechnen Sie 1234567 mod 1234.*
- *SAGE*

Übungsaufgabe 4:
Euklidischer Algorithmus

- *Programmieren Sie die Berechnung des größten gemeinsamen Teilers rekursiv:*

- *ggT(a,b):=ggT(b,a) wenn a<b*
- *ggT(a,0):=a*
- *ggT(a,b):=ggT(b,a mod b)*

- *Verschachteltes if mit elif.*
- *Berechnen Sie ggT(12345678,234).*
- *Berechnen Sie den ggT zweier 100-stelliger Dezimalzahlen.*
- *SAGE*

Freiwillige Hausaufgabe 1: Primzahlzwillinge

- *Unter Primzahlzwillingen versteht man zwei Zahlen p und p + 2, die beide Primzahlen sind. So sind etwa 5 und 7 oder 101 und 103 Primzahlzwillinge.*
- *In dieser Aufgabe sollen Sie die kleinsten Primzahlzwillinge finden, die größer als 100.000 sind.*
- *Man verwende != und next_prime.*
- *SAGE*

Freiwillige Hausaufgabe 2: Listen

- *Kehren Sie mit Hilfe rekursiver Programmierung den Inhalt einer Liste um. Testen Sie Ihr Programm mit einer beliebigen Liste mit 100 Elementen.*
- *Eine Liste erzeugt man mit liste=[]*
- *Listenelemente spricht man mit liste[n] an. Eine Unterliste von Position a bis b-1 erhält man mit liste[a:b].*
- *Mit „+" verknüpft man Listen*
- *SAGE*

Übungsaufgabe 5: Schnelles Potenzieren

- *Programmieren Sie die Berechnung von a^n mod p rekursiv und effizient (Divide-and-Conquer):*

- *a^0 mod p:=1*
- *a^n mod p:=($a^{n/2}$ mod p)^2 mod p (n gerade)*
- *a^n mod p:=(a^{n-1} mod p)*a mod p (sonst)*

- *Abfrage für n gerade: n % 2=0*
- *Berechnen Sie a^n mod p für drei hundertstellige Dezimalzahlen.*
- *SAGE*

Schnelles Potenzieren iterativ

- *Überlegen Sie sich, wie man die Funktion*

  $PowerMod(a,n,p) := a^n \bmod p$

  iterativ statt rekursiv programmieren kann.
- *Während das rekursive Programm top-down (Halbieren von n) verläuft, läuft das iterative Programm bottom-up (Verdoppeln).*

Schnelles Potenzieren: iterativ

- *Das rekursive Programm ist sehr einfach.*
- *Hier ist es schon etwas komplizierter, ein iteratives Programm zu erstellen.*
- *Mit der Binärdarstellung des Exponenten*

$$n = n_L n_{L-1} \cdots n_2 n_1 n_0 = n_0 + 2n_1 + 4n_2 + \cdots + 2^L n_L$$

lässt sich die Potenz wie folgt darstellen:

$$a^n = a^{n_0} (a^{n_1})^2 \cdots (a^{n_{L-1}})^{2^{L-1}} (a^{n_L})^{2^L} \; .$$

Schnelles Potenzieren: Iteratives Programm

- *Erst müssen wir also die binären Ziffern bestimmen.*
- *Übungsaufgabe:* *Schreiben Sie ein Programm Ziffern(n,b) mittels Division mit Rest (quo_rem).*
- *SAGE*
- *Falls die Liste umgekehrt werden muss, verwende man reverse.*
- *Nun können wir iterativ multiplizieren: ItPowerMod*

Erweiterter Euklidischer Algorithmus

Algorithm 1 Euklidischer Algorithmus $\texttt{EA}$

Eingabe: zwei natürliche Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x \leq y$

Ausgabe: $d = \mathrm{ggT}\,(x, y)$

```
if x | y then
    return x
else
    return EA(y mod x, x)
end if
```

Algorithm 2 Erweiterter Euklidischer Algorithmus $\texttt{EEA}$

Eingabe: $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x \leq y$

Ausgabe: $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}\,(x, y) = sx + ty$

```
if x | y then
    return (1, 0)
else
    (s', t') ← EEA(y mod x, x)
    s ← t' − s' · (y div x);   t ← s'
    return (s, t)
end if
```

Übungsaufgabe 6: Erweiterter Euklidischer Algorithmus

- *Programmieren Sie den erweiterten Euklidischer Algorithmus EEA(x,y) anhand des gegebenen Programms.*
- *Eingabe: x,y, wobei x nicht notwendig kleiner als y ist.*
- *Man benutze ggfs. quo_rem.*
- *Ausgabe: [s,t] (oder sogar [g,s,t]), wobei g=ggT(x,y) und s und t die zugehörigen Bézoutkoeffizienten mit g = s x + t y sind.*
- *Lösen Sie EEA(1234,56789) und vergleichen Sie mit mit xgcd.*

Chinesischer Restsatz

- *Das Restproblem*

$$x \equiv l_1 \mod m_1$$
$$x \equiv l_2 \mod m_2$$
$$\vdots$$
$$x \equiv l_k \mod m_k$$

  hat eine eindeutige Lösung modulo $m := m_1 m_2 \cdots m_k$ *, sofern die Moduli* m_j *paarweise teilerfremd sind.*
- *Ein diesbezüglicher Algorithmus wurde von Prof. Werner Seiler angegeben.*

Chinesischer Restsatz: Algorithmus

- *Eingabe:* $[l_1,\ldots,l_k]$ und $[m_1,\ldots,m_k]$
- *Zwischenergebnisse:*

$$\mu_i = \frac{m}{m_i} = m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k \in \mathbb{N}$$

$$s_i, t_i \in \mathbb{Z} \text{ mit } s_i \mu_i + t_i m_i = 1.$$

$$\hat{x} = \ell_1 s_1 \mu_1 + \ell_2 s_2 \mu_2 + \cdots + \ell_k s_k \mu_k$$

- *Ausgabe:* $x = \hat{x} \bmod m$.

Freiwillige Hausaufgabe 5: Chinesischer Restsatz

- *Programmieren Sie den chinesischen Restsatz.*
- *Verwenden Sie den angegebenen Algorithmus.*
- *Bestimmen Sie die Lösung des Problems*

$$x \equiv 2 \mod 3$$
$$x \equiv 3 \mod 4$$
$$x \equiv 1 \mod 7$$

Kleiner Satz von Fermat

- *Für* $n \in \mathbb{Z}$ *und* $p \in \mathbb{P}$ *gilt die Gleichung*

$$A(n): \qquad n^p \equiv n \mod p \,.$$

- *Wir testen diese Gleichung mit SAGE.*
- *Beweis durch vollständige Induktion. Man kann eine Aussage A(n) für die natürlichen Zahlen beweisen, indem man A(0) beweist und zeigt, dass aus A(n) die Aussage A(n+1) folgt.*
- *Induktionsanfang: Offenbar ist A(0) korrekt.*

Der binomische Lehrsatz

- *Genauso wie die binomischen Formeln*

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \quad \text{und}$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

gelten, ist für beliebige Exponenten p

$$(n+1)^p = n^p + \binom{p}{1} n^{p-1} + \binom{p}{2} n^{p-2} + \cdots \binom{p}{p-1} n^1 + 1$$

mit

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} = p\frac{(p-1)!}{k!(p-k)!} \;.$$

Kleiner Satz von Fermat

- *Induktionsschluss: Gilt der Satz für ein n, so folgt*

$$(n+1)^p \equiv n+1 \mod p \ ,$$

also A(n+1), da alle anderen Binomial-koeffizienten p als Teiler besitzen.

- *Damit ist der Kleine Satz von Fermat durch vollständige Induktion bewiesen.*
- *Für ggT(n,p)=1 gilt nach Division durch n*

$$n^{p-1} \equiv 1 \mod p \ .$$

Anwendungen der modularen Arithmetik in der Codierungstheorie und Kryptographie

- *Wir beginnen mit einigen Prüfzeichenverfahren.*
- *Die 10-stellige ISBN (Internationale Standard-Buch-Nummer)*

ISBN

- *Die zehnstellige ISBN besteht aus einer neunstelligen Dezimalzahl* $a_1 a_2 \cdots a_9$ *und einer zehnten Prüfziffer* a_{10}*, welche aus der Formel*

  $$a_1 + 2a_2 + \cdots + 9a_9 + 10a_{10} \equiv 0 \bmod 11$$

  berechnet wird.
- *Ist* $a_{10} = 10$*, so wird* $a_{10} = X$ *gesetzt.*

Übungsaufgabe 7: ISBN

- *Programmieren Sie eine Prozedur ISBNPruefziffer, welche die ISBN-Prüfziffer berechnet.*
- *Bestimmen Sie die Prüfziffer der ISBN meines Computeralgebra-Buchs 3-540-29894-?*
- *Ist die ISBN 3-528-06752-7 meines Schulbuchs DERIVE für den Mathematikunterricht korrekt?*
- *Test mit SAGE*

Die Europäische Artikelnummer (EAN)

- *Die 13-stellige EAN wird beim Einscannen an der Ladenkasse benutzt. Es gilt*

$$a_1 + 3a_2 + a_3 + \cdots + a_{11} + 3a_{12} + a_{13} \equiv 0 \bmod 10$$

ISBN 3-540-29894-0

9 783540 298946

Übungsaufgabe 8: EAN

- *Programmieren Sie eine Prozedur EANPruefziffer, welche die EAN-Prüfziffer berechnet.*
- *Bestimmen Sie die Prüfziffer der EAN meines Computeralgebra-Buchs 978354029894-?*
- *Prüfen Sie im Internet: Ist die neue dreizehnstellige ISBN eine EAN?*

Fehlerkorrigierende Codes

- *Benutzt man ein Prüfzeichen, das einer Gleichung genügt, kann man die Größe eines Fehlers entdecken.*
- *Benutzt man zwei Prüfzeichen, welche zwei simultanen Gleichungen genügen, kann man ggfs. die Größe eines Fehlers und simultan die Position des Fehlers berechnen.*
- *Dann kann man einen Fehler korrigieren.*

Multiplikatives Inverses

- *Um die Position des Fehlers aufzuspüren, muss man für ggT(e,p)=1 eine Gleichung der Form*

$$x \cdot e \equiv 1 \mod p$$

  nach $x = e^{-1} \bmod p$ *auflösen.*

- *Dies macht man mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus, angewandt auf (e,p).*
- *Die Lösung ergibt sich zu* $e^{-1} \bmod p = s \mod p$.

Übungsaufgabe 9: modulares Inverses

- *Programmieren Sie eine Funktion modinv(e,p), welche das modulare Inverse von e modulo p bestimmt*
- *Benutzen Sie xgcd.*
- *Bestimmen Sie das modulare Inverse von 1234 modulo 56789.*
- *Finden Sie heraus, wie dies auch mit power_mod geht.*
- *SAGE*

Reed-Solomon-Code

- *Nehmen wir an, wir wollen das Wort „WORT” verschlüsseln, so dass bei der Übertragung ein Fehler repariert werden kann.*
- *Im ersten Schritt schreiben wir für jeden Buchstaben seine Nummer im Alphabet:*
- *„WORT” → {23, 15, 18, 20}*
- *SAGE*
- *Für das Alphabet und das Leerzeichen reichen 30 Buchstaben.*

Reed-Solomon-Code

- *Nun fügen wir zwei weitere Elemente a_0 und a_1 zu $\{a_2,a_3,a_4,a_5\}$ an, welche folgenden Gleichungen genügen:*

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \equiv 0 \mod 31,$$

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 \equiv 0 \mod 31.$$

- *In unserem Fall liefert dies „WORT" → {1, 16, 23, 15, 18, 20}*

Reed-Solomon-Code

- *Nehmen wir an, es wird versehent-lich „WIRT" $\mapsto$ {1, 16, 23, 9, 18, 20} übertragen.*
- *Unter der Prämisse, dass höchstens ein Fehler aufgetreten ist, müssen wir herausfinden,*
  - dass der Fehler den Abstand -6 hat
  - und dass er an der Position x=3 aufgetreten ist.
- *Dann können wir den Fehler reparieren.*

Reed-Solomon-Code

- *Wir berechnen die Fehler*

$$e := a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$
$$\equiv 1 + 16 + 23 + 9 + 18 + 20 \mod 31$$

(also ist mind. ein Fehler aufgetreten) und

$$s := a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5$$
$$\equiv 1 \cdot 16 + 2 \cdot 23 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 18 + 5 \cdot 20 \mod 31$$

und erhalten $e=25$ sowie $s=13$.

Reed-Solomon-Code

- *Wie berechnen wir die Stelle x, an er der Fehler auftrat?*
- *Der Fehler e produziert in der zweiten Summe den Fehler xe mod 31.*
- *Also ist*

$$s \equiv x \cdot e \mod 31 \text{ oder}$$

$$x \equiv s \cdot e^{-1} \mod 31$$

und in unserem Fall x=3.

- *Dies alles kann leicht in SAGE programmiert werden.*

Fehlerkorrigierende Codes

- *Read-Solomon-Codes werden beim Lesen einer Musik-CD extensiv genutzt.*
- *Ohne fehlerkorrigierende Codes gäbe es bei der CD keinerlei Musikgenuss.*
- *Eine zerkratzte CD kann Hundert-tausende von Fehlern enthalten!*
- *Bei einer CD-ROM darf es (nach der Fehlerkorrektur!) überhaupt keine Lesefehler mehr geben!*

Kryptographie

- *Am 10. Januar und am 14. November 2007 war Verborgene Welten das Thema der Sendung Alles Wissen im dritten Fernsehprogramm des HR.*
- *Für einen Beitrag zu dieser Sendung wurde auch ich interviewt, und zwar zum Thema Kryptologie.*
- *Als kurzen Einblick in dieses aktuelle Forschungsgebiet sehen wir uns den fünfminütigen Beitrag über Kryptologie an.*
- *Filmstart*

Kryptographie

- *Bei einem Verschlüsselungsverfahren wird eine Nachricht N mit Hilfe einer Funktion E und eines Schlüssels e verschlüsselt:*

$$K = E_e(N)\ .$$

- *Die Dekodierung erfolgt mit der Funktion D und dem Schlüssel d:*

$$N = D_d(K) = D_d(E_e(N))\ .$$

- *Die Funktionen E und D sollten effizient berechnet werden können.*
- *Ein Problem ist die Schlüsselübergabe.*

Asymmetrische Kryptographie

- *Das RSA-Verfahren ist ein Beispiel eines asymmetrischen Verschlüsselungs-verfahrens.*
- *Solche Verfahren wurden 1976 von Diffie und Hellman eingeführt.*
- *Hierbei verwenden Sender und Empfänger jeweils eigene Schlüssel e und d.*
- *Der Schlüssel e wird jeweils öffentlich bekannt gegeben, während der Schlüssel d geheim bleibt.*
- *Ein Schlüsselaustausch des persönlichen Dekodierungsschlüssels d ist demnach nicht erforderlich.*

Kryptographisches Protokoll des RSA-Verfahrens (1978)

- *Der Empfänger und Teilnehmer beim RSA-Verfahren*
  - besorgt sich eine 400-stellige Dezimalzahl $m = p \cdot q$ mit 200-stelligen Primzahlen $p, q \in \mathbb{P}$,
  - berechnet $\varphi = (p - 1)(q - 1)$,
  - bestimmt und veröffentlicht einen öffentlichen Schlüssel e, der keinen gemeinsamen Teiler mit φ haben darf,
  - und berechnet seinen privaten Schlüssel d mit der Eigenschaft $e \cdot d = 1 \pmod{\varphi}$.
  - Verschlüsselung und Entschlüsselung sind gegeben durch

$$K = E_e(N) = N^e \pmod{m} \quad \text{und} \quad D_d(K) = K^d \pmod{m} \,.$$

Was brauchen wir also für RSA?

- *Bestimmung großer Primzahlen: is_prime, next_prime*
- *Wir müssen möglichst effizient modulare Potenzen N^e (mod m) berechnen: power_mod*
- *Effiziente Bestimmung des modularen Inversen $d = e^{-1}$ (mod φ): power_mod*
- *Außerdem: Mit geeigneten Hilfsfunktionen wandeln wir unsere Nachrichten zuerst in Zahlen um und transformieren diese am Ende wieder zurück.*

Warum funktioniert RSA?

- *Der Funktionsmechanismus des RSA-Verfahrens beruht auf dem kleinen Satz von Fermat.*
- *Hierfür müssen wir zeigen, dass*

$$D_d(E_e(N)) = N \ .$$

- *Setzt man die Formeln des Verschlüsselungsverfahren ein, ist also zu zeigen*

$$(N^e)^d \equiv N^{ed} \equiv N \pmod{m} \ .$$

Warum funktioniert RSA?

- *Wegen e · d = 1 (mod φ) ist also e · d $=$ 1 + k · φ für eine ganze Zahl k.*
- *Also ist zu zeigen, dass*

$$N^{ed} \equiv N^{1+k(p-1)(q-1)} \equiv N \pmod{m}\ .$$

- *Wir rechnen zunächst modulo p und zeigen mit vollständiger Induktion:*

$$N^{1+K(p-1)} \equiv N \pmod{p}\ .$$

- *Da dieselbe Argumentation modulo q gilt, bekommen wir das Resultat schließlich modulo p · q = m .*

Warum funktioniert RSA?

- *Induktionsanfang: K=0 ist klar.*
- *Induktionsschluss:*

$$
\begin{aligned}
N^{1+(K+1)(p-1)} &\equiv N^{p} N^{K(p-1)} \\
&\equiv N \cdot N^{K(p-1)} \\
&\equiv N^{1+K(p-1)} \equiv N \pmod{p} .
\end{aligned}
$$

- *Damit ist gezeigt, dass das RSA-Verfahren korrekt ist.*

Übungsaufgabe 10

- *Schreiben Sie eine SAGE-Prozedur InitialisiereRSA, die das RSA-Verfahren initialisiert:*
  - Bestimme $m = p \cdot q$ mit 200-stelligen Primzahlen p und q.
  - Berechne $\varphi = (p - 1)(q - 1)$.
  - Bestimme einen öffentlichen Schlüssel e, der keinen gemeinsamen Teiler mit φ haben darf.
  - Berechnet den privaten Schlüssel d mit der Eigenschaft $e \cdot d = 1 \pmod{\varphi}$.
- *SAGE*