Richtungsableitung, Tangentialebene

Hörsaalanleitung
Dr. E. Nana Chiadjeu

27. 06. 2012

Richtungsableitung

Richtungsableitung

Richtungsableitung

Aufgabe 1 Sei $f(x, y, z) = -x^2 + 3y^2 - 2z$ und $\vec{e}$ der zu $(-1, 0, 1)$ gehörige Einheitsvektor.

(a) Man berechne die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x, y, z) \, .$$

(b) In welche Richtung muss man ableiten, damit die Richtungsableitung ein Minimum annimmt?

(c) Im Punkt $(-2, 3, 1)$ bestimme man die Richtung des stärksten Anstiegs und des stärksten Gefälles der Funktion $f(x, y, z)$.

Richtungsableitung

Lösung

Sei $f(x,y,z) = -x^2 + 3y^2 - 2z$ und $\vec{e}$ der zu $(-1,0,1)$ gehörige Einheitsvektor.

(a) Man berechne die Richtungsableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y,z) &= grad(f)^T \vec{e} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{e} \\
&= (-2x, 6y, -2) \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}x - \frac{2}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Richtungsableitung

Lösung

Sei $f(x, y, z) = -x^2 + 3y^2 - 2z$ und $\vec{e}$ der zu $(-1, 0, 1)$ gehörige Einheitsvektor.

(a) Man berechne die Richtungsableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x, y, z) &= grad(f)^T \vec{e} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{e} \\
&= (-2x, 6y, -2)\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}x - \frac{2}{\sqrt{2}} .
\end{aligned}$$

Richtungsableitung

Lösung

Sei $f(x,y,z) = -x^2 + 3y^2 - 2z$ und $\vec{e}$ der zu $(-1,0,1)$ gehörige Einheitsvektor.

(a) Man berechne die Richtungsableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y,z) &= grad(f)^T\vec{e} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{e} \\
&= (-2x, 6y, -2)\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}x - \frac{2}{\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}$$

Richtungsableitung

Lösung

Sei $f(x,y,z) = -x^2 + 3y^2 - 2z$ und $\vec{e}$ der zu $(-1,0,1)$ gehörige Einheitsvektor.

(a) Man berechne die Richtungsableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y,z) &= grad(f)^T \vec{e} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{e} \\
&= (-2x, 6y, -2)\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}x - \frac{2}{\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}$$

Richtungsableitung

Lösung

Sei $f(x,y,z) = -x^2 + 3y^2 - 2z$ und $\vec{e}$ der zu $(-1,0,1)$ gehörige Einheitsvektor.

(a) Man berechne die Richtungsableitung:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y,z) &= grad(f)^T \vec{e} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{e} \\
&= (-2x, 6y, -2)\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}x - \frac{2}{\sqrt{2}} .
\end{aligned}
$$

Richtungsableitung

Lösung

Sei $f(x, y, z) = -x^2 + 3y^2 - 2z$ und $\vec{e}$ der zu $(-1, 0, 1)$ gehörige Einheitsvektor.

(a) Man berechne die Richtungsableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x, y, z) &= grad(f)^T \vec{e} \\
&= (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})\vec{e} \\
&= (-2x, 6y, -2) \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} x - \frac{2}{\sqrt{2}} .
\end{aligned}$$

Richtungsableitung

Lösung

Sei $f(x,y,z) = -x^2 + 3y^2 - 2z$ und $\vec{e}$ der zu $(-1,0,1)$ gehörige Einheitsvektor.

(a) Man berechne die Richtungsableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y,z) &= grad(f)^T \vec{e} \\
&= (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})\vec{e} \\
&= (-2x, 6y, -2) \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}x - \frac{2}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Richtungsableitung

Lösung

Sei $f(x,y,z) = -x^2 + 3y^2 - 2z$ und $\vec{e}$ der zu $(-1,0,1)$ gehörige Einheitsvektor.

(a) Man berechne die Richtungsableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y,z) &= grad(f)^T \vec{e} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{e} \\
&= (-2x, 6y, -2)\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}x - \frac{2}{\sqrt{2}} \ .
\end{aligned}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

(b) In welche Richtung muss man ableiten, damit die Richtungsableitung ein Minimum annimmt?

$$\vec{e_m} = \frac{gradf(x,y,z)}{||gradf(x,y,z)||} = \frac{-1}{\sqrt{4x^2+36y^2+4}} \begin{pmatrix} -2x \\ 6y \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) Im Punkt $P = (-2, 3, 1)$ bestimme man die Richtung des stärksten Anstiegs und des stärksten Gefälles der Funktion $f(x, y, z)$.

$$gradf(-2,3,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

(b) In welche Richtung muss man ableiten, damit die Richtungsableitung ein Minimum annimmt?

$$\vec{e_m} = \frac{grad f(x,y,z)}{||grad f(x,y,z)||} = \frac{-1}{\sqrt{4x^2+36y^2+4}} \begin{pmatrix} -2x \\ 6y \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) Im Punkt $P = (-2, 3, 1)$ bestimme man die Richtung des stärksten Anstiegs und des stärksten Gefälles der Funktion $f(x, y, z)$.

$$grad f(-2,3,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

(b) In welche Richtung muss man ableiten, damit die Richtungsableitung ein Minimum annimmt?

$$\vec{e_m} = \frac{gradf(x, y, z)}{||gradf(x, y, z)||} = \frac{-1}{\sqrt{4x^2 + 36y^2 + 4}} \begin{pmatrix} -2x \\ 6y \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) Im Punkt $P = (-2, 3, 1)$ bestimme man die Richtung des stärksten Anstiegs und des stärksten Gefälles der Funktion $f(x, y, z)$.

$$gradf(-2, 3, 1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

(b) In welche Richtung muss man ableiten, damit die Richtungsableitung ein Minimum annimmt?

$$\vec{e_m} = \frac{gradf(x,y,z)}{||gradf(x,y,z)||} = \frac{-1}{\sqrt{4x^2+36y^2+4}} \begin{pmatrix} -2x \\ 6y \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) Im Punkt $P = (-2,3,1)$ bestimme man die Richtung des stärksten Anstiegs und des stärksten Gefälles der Funktion $f(x,y,z)$.

$$gradf(-2,3,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

(b) In welche Richtung muss man ableiten, damit die Richtungsableitung ein Minimum annimmt?

$$\vec{e_m} = \frac{grad f(x,y,z)}{||grad f(x,y,z)||} = \frac{-1}{\sqrt{4x^2 + 36y^2 + 4}} \begin{pmatrix} -2x \\ 6y \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) Im Punkt $P = (-2, 3, 1)$ bestimme man die Richtung des stärksten Anstiegs und des stärksten Gefälles der Funktion $f(x,y,z)$.

$$grad f(-2,3,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

(b) In welche Richtung muss man ableiten, damit die Richtungsableitung ein Minimum annimmt?

$$\vec{e_m} = \frac{gradf(x,y,z)}{||gradf(x,y,z)||} = \frac{-1}{\sqrt{4x^2+36y^2+4}} \begin{pmatrix} -2x \\ 6y \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) Im Punkt $P = (-2, 3, 1)$ bestimme man die Richtung des stärksten Anstiegs und des stärksten Gefälles der Funktion $f(x, y, z)$.

$$gradf(-2,3,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

(b) In welche Richtung muss man ableiten, damit die Richtungsableitung ein Minimum annimmt?

$$\vec{e_m} = \frac{gradf(x,y,z)}{||gradf(x,y,z)||} = \frac{-1}{\sqrt{4x^2+36y^2+4}} \begin{pmatrix} -2x \\ 6y \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) Im Punkt $P = (-2, 3, 1)$ bestimme man die Richtung des stärksten Anstiegs und des stärksten Gefälles der Funktion $f(x, y, z)$.

$$gradf(-2,3,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

(b) In welche Richtung muss man ableiten, damit die Richtungsableitung ein Minimum annimmt?

$$\vec{e_m} = \frac{gradf(x,y,z)}{||gradf(x,y,z)||} = \frac{-1}{\sqrt{4x^2+36y^2+4}} \begin{pmatrix} -2x \\ 6y \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) Im Punkt $P = (-2, 3, 1)$ bestimme man die Richtung des stärksten Anstiegs und des stärksten Gefälles der Funktion $f(x,y,z)$.

$$gradf(-2,3,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

(b) In welche Richtung muss man ableiten, damit die Richtungsableitung ein Minimum annimmt?

$$\vec{e_m} = \frac{grad f(x,y,z)}{||grad f(x,y,z)||} = \frac{-1}{\sqrt{4x^2+36y^2+4}} \begin{pmatrix} -2x \\ 6y \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) Im Punkt $P = (-2,3,1)$ bestimme man die Richtung des stärksten Anstiegs und des stärksten Gefälles der Funktion $f(x,y,z)$.

$$grad f(-2,3,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

(b) In welche Richtung muss man ableiten, damit die Richtungsableitung ein Minimum annimmt?

$$\vec{e_m} = \frac{gradf(x,y,z)}{||gradf(x,y,z)||} = \frac{-1}{\sqrt{4x^2+36y^2+4}} \begin{pmatrix} -2x \\ 6y \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) Im Punkt $P = (-2,3,1)$ bestimme man die Richtung des stärksten Anstiegs und des stärksten Gefälles der Funktion $f(x,y,z)$.

$$gradf(-2,3,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

Stärksten Anstiegs :

$$\vec{e_m} = \frac{gradf(-2,3,1)}{||gradf(-2,3,1)||} = \frac{1}{\sqrt{4^2+18^2+2^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Stärksten Gefälles:

$$-\vec{e_m} = \frac{gradf(-2,3,1)}{||gradf(-2,3,1)||} = \frac{-1}{\sqrt{4^2+18^2+2^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

Stärksten Anstiegs :

$$\vec{e_m} = \frac{gradf(-2,3,1)}{||gradf(-2,3,1)||} = \frac{1}{\sqrt{4^2+18^2+2^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Stärksten Gefälles:

$$-\vec{e_m} = \frac{gradf(-2,3,1)}{||gradf(-2,3,1)||} = \frac{-1}{\sqrt{4^2+18^2+2^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

Stärksten Anstiegs :

$$\vec{e_m} = \frac{gradf(-2,3,1)}{||gradf(-2,3,1)||} = \frac{1}{\sqrt{4^2+18^2+2^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Stärksten Gefälles:

$$-\vec{e_m} = \frac{gradf(-2,3,1)}{||gradf(-2,3,1)||} = \frac{-1}{\sqrt{4^2+18^2+2^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

Stärksten Anstiegs :

$$\vec{e_m} = \frac{gradf(-2,3,1)}{||gradf(-2,3,1)||} = \frac{1}{\sqrt{4^2+18^2+2^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Stärksten Gefälles:

$$-\vec{e_m} = \frac{gradf(-2,3,1)}{||gradf(-2,3,1)||} = \frac{-1}{\sqrt{4^2+18^2+2^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

Stärksten Anstiegs :

$$\vec{e_m} = \frac{gradf(-2,3,1)}{||gradf(-2,3,1)||} = \frac{1}{\sqrt{4^2+18^2+2^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Stärksten Gefälles:

$$-\vec{e_m} = \frac{gradf(-2,3,1)}{||gradf(-2,3,1)||} = \frac{-1}{\sqrt{4^2+18^2+2^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

Stärksten Anstiegs :

$$\vec{e_m} = \frac{gradf(-2,3,1)}{||gradf(-2,3,1)||} = \frac{1}{\sqrt{4^2+18^2+2^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Stärksten Gefälles:

$$-\vec{e_m} = \frac{gradf(-2,3,1)}{||gradf(-2,3,1)||} = \frac{-1}{\sqrt{4^2+18^2+2^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

Stärksten Anstiegs :

$$\vec{e_m} = \frac{gradf(-2,3,1)}{||gradf(-2,3,1)||} = \frac{1}{\sqrt{4^2+18^2+2^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Stärksten Gefälles:

$$-\vec{e_m} = \frac{gradf(-2,3,1)}{||gradf(-2,3,1)||} = \frac{-1}{\sqrt{4^2+18^2+2^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

Stärksten Anstiegs :

$$\vec{e_m} = \frac{gradf(-2,3,1)}{||gradf(-2,3,1)||} = \frac{1}{\sqrt{4^2+18^2+2^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Stärksten Gefälles:

$$-\vec{e_m} = \frac{gradf(-2,3,1)}{||gradf(-2,3,1)||} = \frac{-1}{\sqrt{4^2+18^2+2^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

Aufgabe 1

Stärksten Anstiegs :

$$\vec{e_m} = \frac{gradf(-2{,}3{,}1)}{||gradf(-2{,}3{,}1)||} = \frac{1}{\sqrt{4^2+18^2+2^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Stärksten Gefälles:

$$-\vec{e_m} = \frac{gradf(-2{,}3{,}1)}{||gradf(-2{,}3{,}1)||} = \frac{-1}{\sqrt{4^2+18^2+2^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f(x, y)$ definiert durch

$$f(x,y) = (x+y)e^{x^2-y^2} \qquad \text{und der Punkt} \qquad P = (0,1).$$

Man berechne die Tangentialebene im Punkt P.

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$z = f(P) + gradf(p) \cdot \vec{PM}$$

$$f(P) = f(0,1) = (0+1)e^{0^2-1^2} = e^{-1}.$$

$$grad(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2x(x+y))e^{x^2-y^2} \\ (1-2y(x+y))e^{x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow grad(f(P)) = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix}$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f(x, y)$ definiert durch

$$f(x, y) = (x + y)e^{x^2 - y^2} \qquad \text{und der Punkt} \qquad P = (0, 1).$$

Man berechne die Tangentialebene im Punkt P.

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$z = f(P) + gradf(p) \cdot \vec{PM}$$

$$f(P) = f(0, 1) = (0 + 1)e^{0^2 - 1^2} = e^{-1}.$$

$$grad(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + 2x(x + y))e^{x^2 - y^2} \\ (1 - 2y(x + y))e^{x^2 - y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow grad(f(P)) = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix}$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f(x,y)$ definiert durch

$$f(x,y) = (x+y)e^{x^2-y^2} \qquad \text{und der Punkt} \qquad P = (0,1).$$

Man berechne die Tangentialebene im Punkt P.

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$z = f(P) + gradf(p) \cdot \vec{PM}$$

$$f(P) = f(0,1) = (0+1)e^{0^2-1^2} = e^{-1}.$$

$$grad(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2x(x+y))e^{x^2-y^2} \\ (1-2y(x+y))e^{x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow grad(f(P)) = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix}$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f(x,y)$ definiert durch

$$f(x,y) = (x+y)e^{x^2-y^2} \qquad \text{und der Punkt} \qquad P = (0,1).$$

Man berechne die Tangentialebene im Punkt P.

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$z = f(P) + gradf(p) \cdot \vec{PM}$$

$$f(P) = f(0,1) = (0+1)e^{0^2-1^2} = e^{-1}.$$

$$grad(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2x(x+y))e^{x^2-y^2} \\ (1-2y(x+y))e^{x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow grad(f(P)) = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix}$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f(x,y)$ definiert durch

$$f(x,y) = (x+y)e^{x^2-y^2} \qquad \text{und der Punkt} \qquad P = (0,1).$$

Man berechne die Tangentialebene im Punkt P.

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$z = f(P) + gradf(p) \cdot \vec{PM}$$

$$f(P) = f(0,1) = (0+1)e^{0^2-1^2} = e^{-1}\,.$$

$$grad(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2x(x+y))e^{x^2-y^2} \\ (1-2y(x+y))e^{x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow grad(f(P)) = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix}$$

Tangentialebene

Aufgabe 2
Gegeben sei die Funktion $f(x,y)$ definiert durch

$$f(x,y) = (x+y)e^{x^2-y^2} \qquad \text{und der Punkt} \qquad P = (0,1).$$

Man berechne die Tangentialebene im Punkt P.
Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$z = f(P) + gradf(p) \cdot \vec{PM}$$

$$f(P) = f(0,1) = (0+1)e^{0^2-1^2} = e^{-1}\ .$$

$$grad(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2x(x+y))e^{x^2-y^2} \\ (1-2y(x+y))e^{x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow grad(f(P)) = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix}$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f(x, y)$ definiert durch

$$f(x, y) = (x + y)e^{x^2 - y^2} \qquad \text{und der Punkt} \qquad P = (0, 1).$$

Man berechne die Tangentialebene im Punkt P.

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$z = f(P) + gradf(p) \cdot \vec{PM}$$

$$f(P) = f(0, 1) = (0 + 1)e^{0^2 - 1^2} = e^{-1}\ .$$

$$grad(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + 2x(x + y))e^{x^2 - y^2} \\ (1 - 2y(x + y))e^{x^2 - y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow grad(f(P)) = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix}$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f(x,y)$ definiert durch

$$f(x,y) = (x+y)e^{x^2-y^2} \qquad \text{und der Punkt} \qquad P = (0,1).$$

Man berechne die Tangentialebene im Punkt P.

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$z = f(P) + gradf(p) \cdot \vec{PM}$$

$$f(P) = f(0,1) = (0+1)e^{0^2-1^2} = e^{-1}\ .$$

$$grad(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2x(x+y))e^{x^2-y^2} \\ (1-2y(x+y))e^{x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow grad(f(P)) = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix}$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f(x, y)$ definiert durch

$$f(x,y) = (x+y)e^{x^2-y^2} \qquad \text{und der Punkt} \qquad P = (0,1).$$

Man berechne die Tangentialebene im Punkt P.

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$z = f(P) + gradf(p) \cdot \vec{PM}$$

$$f(P) = f(0,1) = (0+1)e^{0^2-1^2} = e^{-1}\ .$$

$$grad(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2x(x+y))e^{x^2-y^2} \\ (1-2y(x+y))e^{x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow grad(f(P)) = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix}$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f(x,y)$ definiert durch

$$f(x,y) = (x+y)e^{x^2-y^2} \qquad \text{und der Punkt} \qquad P = (0,1).$$

Man berechne die Tangentialebene im Punkt P.

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$z = f(P) + gradf(p) \cdot \vec{PM}$$

$$f(P) = f(0,1) = (0+1)e^{0^2-1^2} = e^{-1}\ .$$

$$grad(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2x(x+y))e^{x^2-y^2} \\ (1-2y(x+y))e^{x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow grad(f(P)) = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix}$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f(x, y)$ definiert durch

$$f(x, y) = (x + y)e^{x^2 - y^2} \qquad \text{und der Punkt} \qquad P = (0, 1).$$

Man berechne die Tangentialebene im Punkt P.

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$z = f(P) + gradf(p) \cdot \vec{PM}$$

$$f(P) = f(0, 1) = (0 + 1)e^{0^2 - 1^2} = e^{-1} .$$

$$grad(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + 2x(x + y))e^{x^2 - y^2} \\ (1 - 2y(x + y))e^{x^2 - y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow grad(f(P)) = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix}$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f(x, y)$ definiert durch

$$f(x, y) = (x + y)e^{x^2 - y^2} \qquad \text{und der Punkt} \qquad P = (0, 1).$$

Man berechne die Tangentialebene im Punkt P.

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$z = f(P) + gradf(p) \cdot \vec{PM}$$

$$f(P) = f(0, 1) = (0 + 1)e^{0^2 - 1^2} = e^{-1} \, .$$

$$grad(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + 2x(x + y))e^{x^2 - y^2} \\ (1 - 2y(x + y))e^{x^2 - y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow grad(f(P)) = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix}$$

Tangentialebene

Aufgabe 2
Gegeben sei die Funktion $f(x, y)$ definiert durch

$$f(x, y) = (x + y)e^{x^2 - y^2} \qquad \text{und der Punkt} \qquad P = (0, 1).$$

Man berechne die Tangentialebene im Punkt P.
Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$z = f(P) + gradf(p) \cdot \vec{PM}$$

$$f(P) = f(0, 1) = (0 + 1)e^{0^2 - 1^2} = e^{-1}.$$

$$grad(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + 2x(x + y))e^{x^2 - y^2} \\ (1 - 2y(x + y))e^{x^2 - y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow grad(f(P)) = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix}$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
z &= f(P) + gradf(p) \cdot \vec{PM} \\
&= e^{-1} + \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow z = e^{-1} + e^{-1}x - e^{-1}(y-1)$$

$$\Longleftrightarrow e^{-1}x - e^{-1}(y-1) - z - e^{-1} = 0\,.$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
z &= f(P) + gradf(p) \cdot \vec{PM} \\
&= e^{-1} + \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow z = e^{-1} + e^{-1}x - e^{-1}(y-1)$$

$$\Longleftrightarrow e^{-1}x - e^{-1}(y-1) - z - e^{-1} = 0\,.$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
z &= f(P) + grad f(p) \cdot \vec{PM} \\
&= e^{-1} + \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow z = e^{-1} + e^{-1}x - e^{-1}(y-1)$$

$$\Longleftrightarrow e^{-1}x - e^{-1}(y-1) - z - e^{-1} = 0\,.$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
z &= f(P) + grad f(p) \cdot \vec{PM} \\
&= e^{-1} + \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow z = e^{-1} + e^{-1}x - e^{-1}(y-1)$$

$$\Longleftrightarrow e^{-1}x - e^{-1}(y-1) - z - e^{-1} = 0\ .$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} z &= f(P) + grad f(p) \cdot \vec{PM} \\ &= e^{-1} + \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow z = e^{-1} + e^{-1}x - e^{-1}(y-1)$$

$$\Longleftrightarrow e^{-1}x - e^{-1}(y-1) - z - e^{-1} = 0 \, .$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
z &= f(P) + grad f(p) \cdot \vec{PM} \\
&= e^{-1} + \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow z = e^{-1} + e^{-1}x - e^{-1}(y-1)$$

$$\Longleftrightarrow e^{-1}x - e^{-1}(y-1) - z - e^{-1} = 0 \, .$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
z &= f(P) + gradf(p) \cdot P\vec{M} \\
&= e^{-1} + \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow z = e^{-1} + e^{-1}x - e^{-1}(y-1)$$

$$\Longleftrightarrow e^{-1}x - e^{-1}(y-1) - z - e^{-1} = 0\,.$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} z &= f(P) + gradf(p) \cdot \vec{PM} \\ &= e^{-1} + \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow z = e^{-1} + e^{-1}x - e^{-1}(y-1)$$

$$\Longleftrightarrow e^{-1}x - e^{-1}(y-1) - z - e^{-1} = 0\ .$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} z &= f(P) + gradf(p) \cdot \vec{PM} \\ &= e^{-1} + \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow z = e^{-1} + e^{-1}x - e^{-1}(y-1)$$

$$\Longleftrightarrow e^{-1}x - e^{-1}(y-1) - z - e^{-1} = 0\,.$$

Tangentialebene

Aufgabe 2

Lösung: Die gesuchte Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} z &= f(P) + gradf(p) \cdot \vec{PM} \\ &= e^{-1} + \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow z = e^{-1} + e^{-1}x - e^{-1}(y-1)$$

$$\Longleftrightarrow e^{-1}x - e^{-1}(y-1) - z - e^{-1} = 0\,.$$